

TSA をみたく領域数 $\{R_k\}$ について

東京女子大学 小林一章

K を交互、素な結び目とし、 c を K の最少交差点数とします。 D_K を K の一つの交互、既約 (irreducible) な結び目図とします。 R_k を D_K の k 辺形の個数とし、領域数 R とすると $R = \sum_{k=2}^c R_k$ であり、オイラー標数の式と D_K は連結4正則グラフと見なせるので $R = c+2$ です。これを $n := c+2$ とおき、整数 n の分割を考えます。 $R = \sum_{k=2}^c R_k$ に分割の考え方を導入します。 $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ を n の一つの分割とします。この時、この分割の長さは k と言う事にします。 $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ としておきます。) 分割 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ を $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ と書くこともあります。分割の集合 $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k)\}$ に辞書式順序をいれ、また $\underbrace{s + s + \cdots + s}_p$ を s^p と略記します。

例 1 $n = 7$ とすると分割数 $p(7) = 15$, $c = n - 2 = 5$ です。このとき素な結び目は $5_1, 5_2$ のみです。 $7 > 6 + 1 > 5 + 2 > 5 + 1^2 > 4 + 3 > 4 + 2 + 1 > 4 + 1^3 > 3^2 + 1 > [3 + 2^2 > 3 + 2 + 1^2 > 3 + 1^4 > 2^3 + 1 > 2^2 + 1^3 > 2 + 1^5 > 1^7$

この内結び目 $5_1, 5_2$ に対応しているのは分割 $5 + 2$ と分割 $3 + 2^2$ のみです。

結び目図を平面4正則グラフとみると次の命題が有ります。

命題 1 (田中一新庄 - Adams) 連結、4 - 正則平面グラフにおいて k 辺形の個数を R_k とすると

$$2R_2 + R_3 = 8 + R_5 + 2R_6 + \cdots + (c - 4)R_c \text{ が成立する。}$$

この等式を TSA と呼ぶことにする。上式の左辺の最大値を \mathcal{L} 、右辺の最小値を \mathcal{R} とします。ある分割 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ を k 辺形の集合 $\{R_k\}$ に割り振った時、 $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ なら当然 TSA は成立しません

が、 $\mathcal{L} > \mathcal{R}$ のときは、 $\{R_k\}$ への割り振りを取り換えることにより、TSA を満たす $\{R_k\}$ が出来ることがあります。

例 2 $n = 12$ で分割 $6 + 1^6$ のとき、 $\{R_k\} = (6_2, 1_3, 1_4, 1_5, 1_6, 1_7, 1_8)$ とすると $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ なので TSA を満たす $\{R_k\}$ への割り振りは無い。しかし分割 $9 + 1^3$ においては $\{R_k\} = (9_2, 1_3, 1_4, 1_5)$ とすると $\mathcal{L} = 19 > 8 = \mathcal{R}$ なので $\{R_k\}$ への割り振りを $(1_2, 9_3, 1_5, 1_6)$ $(1_2, 9_3, 1_4, 1_7)$ 等とすると $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ となり、TSA が成立する。

箱根セミナー 2016 において n の分割の内、結び目図が対応するもの、対応しないものの分類を行いました。分類の基準は以下のようなものです。

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_0$ は結び目に対応している。

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_1$ は分割 $n, 1^n, a + 1^n$ ($a > 1$) (命題 1 の系、命題 2 命題 4) のいずれかより、結び目図に対応していない。

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_2$ は $(4, 4, 4)$, $(4, 4, 4, 4)$ 以外の等分分割 (命題 5) より、結び目図に対応していない。 $(4, 4, 4)$ は箱根セミナー 2016 以降で訂正したものです。

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_3$ は $R_c \neq 0$ かつトーラス結び目図でないことより、除外 ($R_k \neq 0, k \geq c$ も含む)

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_4$ は長さ 2 の分割で、トーラス結び目の分割 $(c_2, 2_c)$ でもなく、 $R_2 = 0$ の結び目でもなく、2 重トーラスの分割でもない事より除外

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_5$ は定理 1 に矛盾

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_6$ は TSA を満たす領域数がない。

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_7$ は TSA を満たす領域数はあるが、2 以上の成分数の絡み目図が対応するか、平面 4 正則グラフが見つからない。

今年の箱根セミナー 2017 では $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)_7$ についてさらに考察を加えるものです。

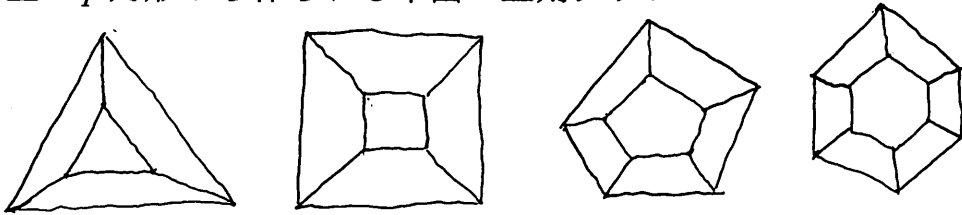
まず TSA を満たす領域数を $\{R_k\}$ とし、それに対応する 4 正則グラフの見つけ方を列挙します。(もし見つければ対応する行列の階数から link(knot) の成分数がわかります。

連結、平面 3 正則グラフに対する田中—新庄—Adams の命題 (TSA)₃ は次のようになります。

$$4R_2 + 3R_3 + 2R_4 + R_5 = 12 + R_7 + 2R_8 + \dots + (c - 6)R_c$$

最初から (TSA) をみたく 4 正則グラフを見つけるのは難しいので頂点の次数が低いグラフから 4 正則グラフを作る事を考えます。

- 2 重正 p 角形から作られる平面 3 正則グラフ

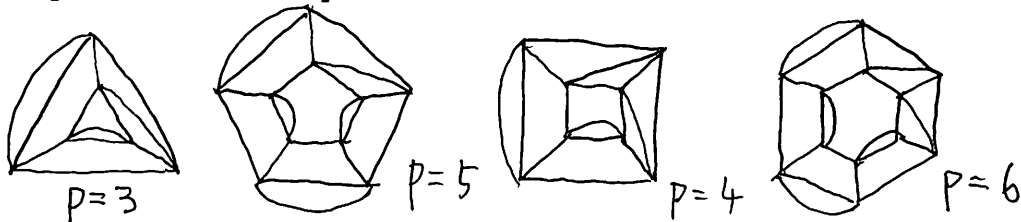


これに 2 辺形を加えて 4 正則グラフを作る。(4 正則化)

命題 2 2 重正 p 角形から作られる平面 3 正則グラフは常に平面 4 正則化可能です。(適当に辺を加えて 4 正則グラフにする)

p : odd のとき、外、内交互に 1 つづらして 2 辺形を加え、最後の 4 辺形を 4 正則グラフになるように 2 つの 3 角形に分割する。すると knot projection になる。

p : even のとき、 p : odd の時と同様に 2 辺形を加え、最後の 2 つ



の 4 辺形を 4 正則グラフになるように 2 つづつの 3 角形に分割すると knot projection になります。

全ての 4 変形に外、内交互に 2 辺形をつけると 3 成分 link の射影図になる。

命題 3 2 重正 p 角形から出来る平面 3 正則グラフは $R_4 = p$, $R_p = (p \geq 3)$ である。(他の $R_k = 0$)

命題 4 上記のように2重正 p 角形に2辺形を添加して出来る平面4正則グラフは

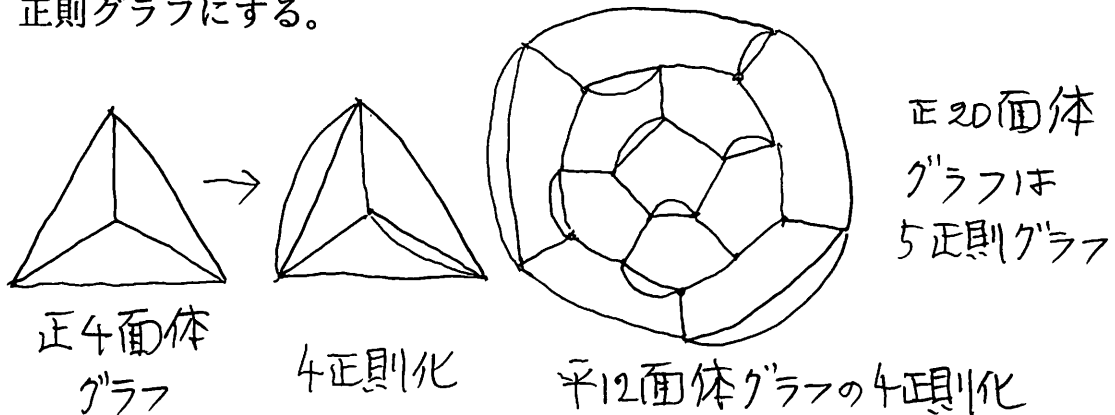
p が奇数のとき; $R_2 = p-1, R_3 = 2, R_4 = p-1, R_p = 2$ ($p = 3$ の時は $R_3 = 4$)

p が偶数のとき; $R_2 = p-2, R_3 = 4, R_4 = p-2, R_p = 2$ ($p = 4$ の時は $R_4 = 4$)

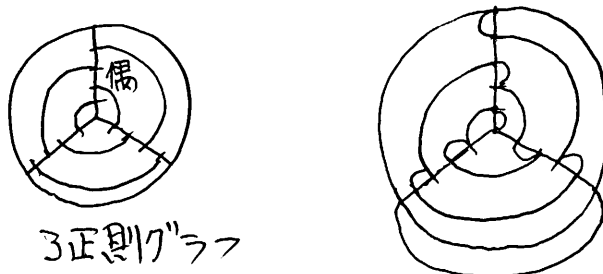
例 3 $p = 7$ なら2重14角形 ($\leftrightarrow n = 16$) $R_2 = 6, R_3 = 2, R_4 = 6, R_7 = 2, \sum_{k \geq 2} R_k = 16$

$p = 8$ なら2重16角形 ($\leftrightarrow n = 18$) $R_2 = 6, R_3 = 4, R_4 = 6, R_8 = 2, \sum_{k \geq 2} R_k = 18$

命題 5 正多面体グラフも4正則化可能です。ただし正20面体グラフでは一度5正則グラフを作り、そこから辺を除いていき4正則グラフにする。



- 3-pointed star グラフから作られる平面3正則グラフを4正



則化する。

•
$$\left(\begin{array}{l} 3 \text{ 正則グラフ} \\ R_2 = 0 \end{array} \right) \rightarrow (4 \text{ 正則グラフ})$$

ならば最初の 3 正則グラフの頂点数は偶数個です。これはオイラー標数だけから示せます。

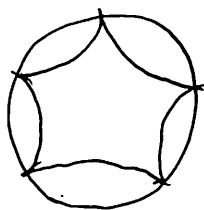
$V - E + R = 2$, $3V = 2E$ から $V - \frac{3}{2}V + R = 2 \rightarrow R - \frac{V}{2} \rightarrow V$ は偶数個

• 従って頂点数が奇数の結び目射影図は上の作り方からは出来ません。

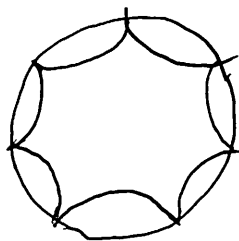
$c = \text{odd}$ の場合はどうなるか？

• タイプ $(k, 2)$ ($k : \text{odd}$) の torus knot は奇数頂点の円周グラフにおいて隣接 2 頂点を結んで出来る。

• twist knot は最後の 2 頂点以外は隣接 2 頂点を結び、最後の

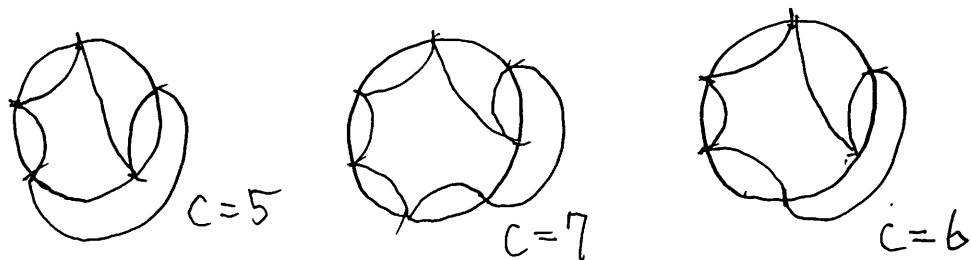


$k=5$

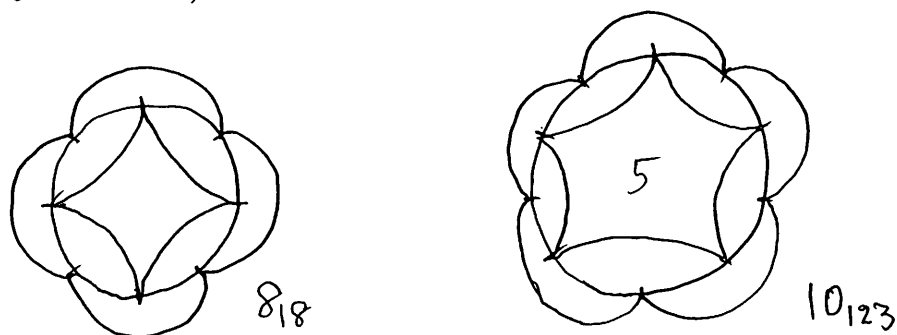


$k=7$

2 頂点は下図のようにします。



• 結び目図が Hamilton cycle (すべての頂点を通るサイクル) を含む場合は適当な個数の頂点を持つ円周グラフから出発して 4 正則グラフにする。(8 以下の交差点数を持つ結び目図では Hamilton cycle を含む)



箱根セミナー以後に Hamilton cycle を含まない結び目図が見つかりました。結び目 9_{35} がそうです。Hamilton cycle を含まない結び目図に関しては以後の研究とします。

参考文献

- 鈴木晋一著：結び目理論入門 サイエンス社 1991 年