結び目の領域数と整数の分割

東京女子大学　小林一章

K を交互、素な結び目とし、c を K の最少交差点数とします。D_K を K の一つの交互、既約（irreducible）な結び目図とします。R_k を D_K の k 辺形の個数とします。領域数 R とすると $R=\sum_{k=2}^{c} R_k$ であり、オイラー標数の式と D_K は連結４正則グラフと見なせるので $R=c+2$ です。これを $n:=c+2$ とおき、整数 n の分割を考えます。$R=\sum_{k=2}^{c} R_k$ に分割の考え方を導入します。$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ を n の一つの分割とします。この時、この分割の長さは k と言う事にします。（$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_k$ としておきます。）分割 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ を $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k)$ と書くこともあります。分割の集合 $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_k)\}$ に辞書式順序をいれ、また $\underbrace{s+s+\cdots+s}_{p}$ を s^p と略記します。

例 1 $n=7$ とすると分割数 $p(7)=15,\ c=n-2=5$ です。このとき素な結び目は $5_1,\ 5_2$ のみです。$7>6+1>5+2>5+1^2>4+3>4+2+1>4+1^3>3^2+1>[3+2^2>3+2+1^2>3+1^4>2^3+1>2^2+1^3>2+1^5>1^7$
ここで [は境界（*border*）と言います。これについてはのちに述べることにします。この内結び目 $5_1,\ 5_2$ に対応しているのは分割 $5+2$ と分割 $3+2^2$ のみです。

素な結び目の図を観察すると、分割数 $p(n)$ に比べ結び目に使われる分割の個数が非常に小さいことがわかります。その理由を考えるのが本稿の目的です。

命題 1（田中ー新庄ー *Adams*）連結、４ー正則平面グラフにおいて k 辺形の個数を R_k とすると

$2R_2+R_3=8+R_5+2R_6+\cdots+(c-4)R_c$ が成立する。

この等式をTSAと呼ぶことにする。　上式の左辺の最大値を$\mathcal{L}$、右辺の最小値を$\mathcal{R}$とします。ある分割$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$を$k$辺形の集合$\{R_k\}$に割り振った時、$\mathcal{L}<\mathcal{R}$なら当然TSAは成立しませんが、$\mathcal{L}>\mathcal{R}$のときは、$\{R_k\}$への割り振りを取り換えることにより、TSAをみたす$\{R_k\}$が出来ることがあります。

例 2 $n=12$で分割$6+1^6$のとき、$\{R_k\}=(6_2,1_3,1_4,1_5,1_6,1_7,1_8)$とすると$\mathcal{L}<\mathcal{R}$なので*TSA*を満たす$\{R_k\}$への割り振りは無い。しかし分割$9+1^3$においては$\{R_k\}=(9_2,1_3,1_4,1_5)$とすると$\mathcal{L}=19>8=\mathcal{R}$なので$\{R_k\}$への割り振りを$(1_2,9_3,1_5,1_6)$ $(1_2,9_3,1_4,1_7)$等とすると$\mathcal{L}=\mathcal{R}$となり、*TSA*が成立する。

系 1 • $R_2=R_3=0$という結び目図はない。
• 1^n という分割は結び目図に対応しない。
• $2\leq k\leq c$なるkに対し$R_k=0$又は1という結び目図は存在しない。

命題 2 $n(=c+2)$の分割のうちnという分割を持つ結び目図は存在しない。

証明。　$n\geq 5$のとき、TSAを満たさない。
$n\leq 4$のとき、$R_4=4$ならTSAを満たすが$n=4\leftrightarrow c=2$これは自明な結び目なので$R_k=0$となり、矛盾。
分割の辞書式順序に関し、ある分割$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\lambda_k)$以後にあるすべての分割がTSAをみたさないとき、かつ、分割$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\lambda_k)$の直前がTSAを満たすとき、この分割$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\lambda_k)$を境界（border）と言う事にします。

命題 3 $n=10(c=8)$ のとき、境界は分割$(3,3,2,2)$である。

証明。まず分割$(3,3,2,2)$に対しては$\mathcal{L}<\mathcal{R}$になるのでTSAが成立することはない。また分割$(3,3,2,2)$のひとつ前の分割は$(3,3,3,1)$で$(3_2,3_3,3_4,1_5)$が結び目8_{15}に対応している。$n=10$で

$3+3+2+2$ 以後の分割は、
$3{+}3{+}2{+}2 > 3{+}3{+}2{+}1^2 > 3{+}3{+}1^4 > 3{+}2^3{+}1 > 3{+}2^2{+}1^3 > 3{+}2{+}1^5 > 3{+}1^7 > 2^5 > 2^4{+}1^2 > 2^3{+}1^4 > 2^2{+}1^6 > 2{+}1^8 > 1^{10}$
これらの分割において $\mathcal{L} \leq 9,\ \mathcal{R} \geq 10$ 従って $(3,3,2,2)$ 以後では TSA は成立しない。故に境界は $(3,3,2,2)$ である。□
上の命題と全く同じに考えて
$n=5$ の時の境界は $3+1^2$　直前は結び目 3_1 が対応している。
$n=6$ の時の境界は $3+1^3$ 直前の分割 $(3,2,1)$ は、領域数にして $(3_2,2_3,1_4)$ は TSA を満たすが対応する平面的 4 正則グラフ（ループレス）は存在しない。結び目 4_1 の領域数は分割 $(2_2,4_3)$ である。

$n=7$ の時の境界は $3+2+1^2$　直前の $(3_2,2_3,2_4)$ はは結び目 5_2 が対応している。
$n=8$ の時の境界は $3+2^2+1$　直前は $(3_2,3_3,1_4,1_5)$ が結び目 6_2 に対応している。
$n=9$ の時の境界は $3+3+1^3$　直前は $(3_2,3_3,2_4,1_5)$ が結び目 7_6 に対応している。
$n=11$ の時の境界は $4+3+1^4$　直前は $(4_2,3_3,2_4,1_5,1_6)$ が結び目 9_{21} に対応している。
$n=12$ の時の境界は $4+3+2^2+1$　直前は $(4_2,3_3,34,1_5,1_6)$ が結び目 $10_{53},10_{57}$ に対応している。
注 1。上の結び目図に対応している、対応していないは TSA を満たす、満たさないと言う事である。
注 2。ある分割 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ が TSA を満たさない時、それ以後の分割が TSA を満たさないとは限らない。

例 3 $n=9$ で分割 $\cdots > 3{+}3{+}3 > 3{+}3{+}2{+}1 > 3{+}3{+}1^3 > \cdots$ において $(3,3,3)$ は *TSA* を満たさないが $(3,3,2,1)$ は $(3_2,3_3,2_4,1_5)$ が結び目図 7_6 に対応している。そして $(3,3,1,1,1)$ が境界である。

注 3.「n の分割 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ において $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ が成立している（従って TSA は不成立）とき、$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ 以後の分割に関して TSA は不成立」としても反例がある。

例 4 $n = 18$ で分割 $(5,5,4,1,1,1,1)$ では TSA は不成立、次の $(5,5,3,3,2)$ では $(5_2,5_3,3_4,3_5,2_6)$ とすると TSA は成立する。しかし、この領域数から結び目図が作れるか否かは不明。

定理 1 分割の長さ

$$\#\{k|R_k \neq 0\} \leq \begin{cases} \frac{c+1}{2} \ c : odd \longleftrightarrow \frac{n-1}{2} \\ \frac{c+2}{2} \ c : even \longleftrightarrow \frac{n}{2} \end{cases}$$

証明。n : odd のとき、$\#\{k|R_k \neq 0\} \geq \frac{n+1}{2}$ として矛盾を導く。1^n は結び目図にはならないので（命題 1 系 1）それ以外で分割の長さが一番長いのは $a + 1^{n-a}$ $(a > 1)$ 型の分割。これの長さは $n-a+1$ 従って $n-a+1 \geq \frac{n+1}{2}$ より $a \leq \frac{n+1}{2}$ つまり $\frac{n+1}{2} + 1^{\frac{n-1}{2}}$ より分割の順序としては前にあり、長さも $\frac{n+1}{2}$ 以上のものはない。次に分割の順序が $\frac{n+1}{2} + 1^{\frac{n-1}{2}}$ 以後にあるものでは、長さが $\frac{n+1}{2}$ 以上のものはあるが、それらは $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ となり、TSA が成立しないことを示す。$(*)$
$(*)$ の証明。まず、$\frac{n+1}{2} + 1^{\frac{n-1}{2}}$ 以後にあり、長さが $\frac{n+1}{2}$ 以上かつ $a + 1^{n-a}$ $(1 < a \leq \frac{n+1}{2}$) と言う形をしている場合。$\mathcal{L} = 2a+1$ $R_4 = 1$ としても $k \geq 5$ 以上で $R_k \neq 0$ となるものは $n-a+1-3 = n-a-2$ 個ある。したがって $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ である。
次に $\frac{n+1}{2}+1^{\frac{n-1}{2}}$ 以後にあり、長さが $\frac{n+1}{2}$ 以上かつ $a_1+a_2+1^{n-a_1+a_2}$ $(1 < a \leq \frac{n+1}{2}$) と言う形をしている場合。分割の長さは $n-(a_1+a_2)+2$ であり、$a_1 \leq \frac{n-1}{2}$, $a_2 \leq \frac{n-3}{2}$ である。すると $\mathcal{L} = n-1+\frac{n-3}{2} = \frac{3n-5}{2}$ であり、$\mathcal{R} = 8 + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ $\mathcal{L}$ は n の一次式、$\mathcal{R}$ は n の二次式、従って n を大きくすると $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ となる。つまり TSA は不成立。以下 $a_1 + a_2 + a_3 + 1^{n-(a_1+a_2+a_3)}$ の形も同様に示される。
$n : even$ の時も同様である。 □

命題 4 $a+1^{n-a}$ $(a > 1)$ と言う分割は素な結び目図に対応しない。

証明。$a = 2,3$ なら $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ なので TSA が不成立。$a = 4$, $n = 7$ のとき、領域数 $(4_2, 1_3, 1_4, 1_5)$ は TSA を満たすが、これから作られる

平面4正則グラフは2成分絡み目になる。実際交差点数$c=5$の結び目図には、この領域数を持つものはない。$a\geq 5$のとき、$a=5$で$(5_2,1_3,1_4,1_5,1_6)$はTSAをみたすが、定理1に矛盾。$a=6$のとき$(6_2,1_3,1_4,1_5,1_8)$はTSAを満たすが、これに対応する平面4正則グラフは合成結び目図$5_1\#3_1$が対応し、実際交差点数が8の素な結び目図にはこの分割を持つものはない。$a=7$のとき、$\mathcal{L}=15$ TSAの右辺$=8+\frac{k(k+1)}{2}$で右辺が15になるkはない。$a\geq 8$に対してはTSAを満たす領域数はない。□

予想 1 交差点数をcとして

$$\#\{k|R_k=1\}\leq\begin{cases}\frac{c-3}{2}\ c:odd\longleftrightarrow\frac{n-5}{2}\\ \frac{c-2}{2}\ c:even\longleftrightarrow\frac{n-4}{2}\end{cases}$$

注。予想1の上限（等号）が成り立っていると命題4の等号は成り立っているが、逆に命題4の等号が成立しても予想の等号が成立しない例はある。　9_{11}，9_{12}，9_{21}，9_{23}等
nは奇素数でないとする。

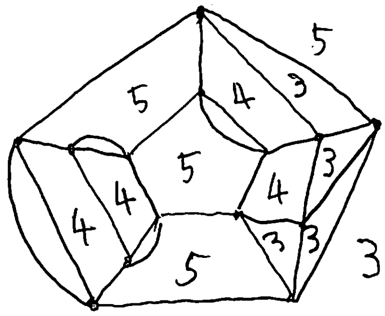
$$n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k}\ (ka=n)$$

と言う分割を等分分割ということにする。（nが奇素数のとき、等分分割は1^nのみであるが、これは結び目図には対応しないことがわかっている。）

命題 5 nを奇素数でないとする。nの等分分割

$$n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k}\ (ka=n)$$

は$4+4+4+4$ $(n=16)$を除いて結び目図に対応しない。　このときは領域数$(4_2,4_3,4_4,4_5)$が対応し、下図の平面4正則グラフが対応するが、これは3成分絡み目図になる。結び目図に対応する平面4正則グラフが存在するか否か不明である。



3成分絡み目図

証明。$a>1$として良い。$\mathcal{L}=3a$,
$\mathcal{R}=8+a+2a+3a+\cdots(k-3)a=8+\frac{(k-3)(k-2)}{2}a$
TSA をみたす a と k は $(4_2,4_3,4_5)$ $n=12,\ c=10$ 交差点数 10 の素な結び目図の領域数を調べて $(4_2,4_3,4_5)$ がないことがわかる。
$(4_2,4_3,4_5)$ は 3 成分絡み目図が対応している。
$a=2\longrightarrow\mathcal{L}=3a=6$ なので TSA は成立しない。
$a=3,k=2,3\longrightarrow\mathcal{L}=9,\ \mathcal{L}=8$
$a=3,\ k=2\longrightarrow$ 分割は $3+3\longrightarrow$ TSA をみたさない。
$a=3,\ k=3\longrightarrow$ 分割は $3+3+3\longrightarrow$ TSA をみたさない。
$a=3,\ k\geq 4\longrightarrow\ \ \mathcal{L}=9,\ \mathcal{R}=8+a=11$ なので TSA は不成立。　$a=4,\ k=2,3$ なら $\mathcal{L}=3a,\ \ \mathcal{R}=8$ 分割は $a+a$ 又は $a+a+a$。
$a+a$ の時は分割の長さが 2 なのでトーラス結び目か $R_2=0$ の結び目図の一部、又は 2 重ツイスト結び目（後述）。しかしトーラス結び目の領域数は $(c_2,2_c)$、また $R_2=0$ の結び目のときも、$(4_2,4_4)$ ではない。さらに、$c=6$ なので 2 重ツイスト結び目（後述）でもない。、よって、この分割は結び目図に対応しない。
$a+a+a$ は $(4_2,4_3,4_5)$ が TSA をみたす。これに関しては上で述べた。3 成分絡み目が対応している。
$a\geq 4,\ k\geq 4$ の時は $\mathcal{L}=3a,\ \ \mathcal{R}\geq 8+a$ TSA が成立するには $a=4,\ k=4\quad a+a+a+a=n=16,\ c=14\longrightarrow(4_2,4_3,4_4,4_5)$ は TSA をみたす。このとき、平面 4 正則グラフはあるが、3 成分絡み目図になり、結び目図が対応する 4 正則グラフが存在するか否かは不明。それ以外の $a+a+\cdots+a$ は TSA を満たさない。□

nが小さい時の分割表の完成度

以下、次の記号 $(\cdots)_k$ を使う

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_0$ は結び目に対応している。

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_1$ は分割 $n, 1^n, a+1^n \quad (a>1)$ （命題１の系、命題２命題４）のいずれかより、結び目図に対応していない。

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_2$ は $(4,4,4,4)$ 以外の等分分割（命題５）より、結び目図に対応していない。

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_3$ は $R_c \neq 0$ かつトーラス結び目図でないことより、除外 ($R_k \neq 0,\ k \geq c$ も含む)

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_4$ は長さ２の分割で、トーラス結び目の分割 $(c_2, 2_c)$ でもなく、$R_2=0$ の結び目でもなく、２重トーラスの分割でもない事より除外

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_5$ は定理１に矛盾

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_6$ はTSAを満たす領域数がない。

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)_7$ はTSAを満たす領域数はあるが、２以上の成分数の絡み目図が対応するか、平面４正則グラフが見つからない。

「完成」 は分割表が完成している事を意味している。

[は境界（border）を意味している。従って境界以後の分割は結び目図に対応しない。

$n \leq 4 (\longleftrightarrow c \leq 2)$ のときは、自明な結び目しかないので n の分割に対応する結び目図はない。分割数は $p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5$ である。以下の分類で複数の理由があるときもある。

$n=5,\ p(5)=7 \quad c=3$

$(5)_1 > (4{+}1)_1 > (3{+}2)_0 > [3{+}1^2 > 2^2{+}1 > 2{+}1^2 > 2{+}1^3 > 1^5$ 「完成」

$n=6,\ p(6)=11\ c=4$

$(6)_1 > (5+1)_1 > (4+2)_0 > (4+1^2)_1 > (3^2)_2 > (3+2+1)_3 > [3+1^3 > 2^3 > 2^2+1^2 > 2+1^4 > 1^6$ 「完成」 分割 $(3,2,1)$ は領域数 $(3_2, 2_3, 1_4)$ が対応しており、$R_c \neq 0$ でトーラス結び目図の領域数ではない。

$n=7,\ p(7)=15,\ c=5$

$(7)_1>(6+1)_1>(5+2)_0>(5+1^2)_1>(4+3)_4>(4+2+1)_3>(4+1^3)_1>(3^2+1)_3>(3+2^2)_0>[3+2+1^2$ 以下略 「完成」

$4+3$ の分割数の長さは 2 だがトーラス結び目図、$R_2=0$ の結び目図、2 重ツイスト結び目図のいずれでもない。 $4+2+1\longrightarrow(4_2,2_3,1_6)\ (2_2,4_3,1_4)$ 前者は $R_k\neq 0\ (k>c)$、後者は 2 成分絡み目が対応している。$3+3+1\longrightarrow(3_2,3_3,1_5)$

$n=8,\ p(8)=22,\ c=6$ 素な結び目は $6_1,6_2,6_3$

$(8)_1>(7+1)_1>(6+2)_4>(6+1^2)_1>(5+3)_4>(5+2+1)_7>(5+1^3)_1>(4^2)_2>(4+3+1)_3>(4+2^2)_0>(4+2+1^2)_3>(4+1^4)_1>(3^2+2)_7>(3^2+1^2)_0>[3+2^2+1>$ 以下略 「完成」

4^2 は等分分割、

$$(4,2,2)\longrightarrow\begin{cases}(4_2,2_3,2_5) & \longrightarrow 6_1\\ (2_2,4_3,2_4) & \longrightarrow 6_3\end{cases}$$

$$(5,2,1)\longrightarrow\begin{cases}(5_2,2_4,1_6) & \longrightarrow R_c\neq 0\text{ だがトーラス結び目でない。}\\ (5_2,1_4,2_5) & \\ (2_2,5_3,1_5) & \end{cases}$$

後者 2 つの領域数は TSA を満たすが平面 4 正則グラフが見つからない。

$(4,3,1)\longrightarrow(3_2,4_3,1_6)$ $R_c\neq 0$ だがトーラス結び目でない。

$(4,2,1,1)\longrightarrow(4_2,2_3,1_4,1_5)$ $R_c\neq 0$ しかしトーラス結び目図の領域数ではない。

$(3,3,2)\longrightarrow(3_2,2_3,3_4)$ 2 成分または 3 成分絡み目図が対応する。結び目図は対応しない。

$(3,2,1,1)\longrightarrow(3_2,2_3,1_4,1_5)$ これは 6_2 の結び目図に対応している。

$n=9,\ p(9)=30,\ c=7$ 素な結び目は 7_1〜7_7

$(9)_1>(8+1)_1>(7+2)_0>(7+1^2)_1>(6+3)_4>(6+2+1)_7>(6+1^3)_1>(5+4)_4>(5+3+1)_7>(5+2^2)_0>(5+2+1^2)_0>(5+1^4)_1>(4^2+1)_3>(4+3+2)_7>(4+3+1^2)_0>(4+2^2+1)_0>$

$(4+2+1^3)_5 > (4+1^5)_1 > (3^3)_2 > (3^2+2+1)_0 > [3^2+1^3$
以下省略 「完成」

$$(6,2,1) \longrightarrow \begin{cases} (6_2, 2_4, 1_8) \\ (6_2, 1_4, 2_6) \end{cases}$$

前者はＴＳＡを満たすが $R_k \neq 0\ (k > c)$ 従って結び目図が対応しない。後者も TSA を満たしている。ツイスト結び目の領域数ではない。結び目図に対応する平面４正則グラフはない。

$(4,4,1) \longrightarrow (4_2, 4_3, 1_8)\ R_k \neq 0\ (k > c)$

$(4,3,2) \longrightarrow (3_2, 2_3, 4_4)$ これは TSA を満たしているが平面４正則が見つからない。

$(4,2,1,1,1) \longrightarrow$ 定理１に矛盾。

$(5,3,1) \longrightarrow (5_2, 3_4, 1_6)$ TSA を満たしているが平面４正則グラフはない。

$n = 10,\ p(10) = 42,\ c = 8$ 素な結び目の射影図は $8_1 \sim 8_{18}$

$(10)_1 > (9+1)_1 > (8+2)_0 > (8+1^2)_1 > (7+3)_4 > (7+2+1)_7 > (7+1^3)_1 > (6+4)_0 > (6+3+1)_7 > (6+2^2)_0 > (6+2+1^2)_7 >)6+1^4)_1 > (5^2)_2 > (5+4+1)_7 > (5+3+2)_7 > (5+1^2)_1 > (5+2^2+1)_0 > (5+2+1^3)_0 > (5+1^5)_1 > (4^2+2)_0 > (4^2+1^2)_7 > (4+3^2)_7 > (4+3+2+1)_0 > (4+3+1^3)_0 > (4+2^3)_0 > (4+2^2+1^2)_6 > (4+2+1^4)_6 > (4+1^6)_1 > (3^3+1)_0 > [3^2+2^2 >$
以下省略　「完成」

結び目図に対応している整数の分割、領域数

$(8,2) \longrightarrow (8_3, 2_4)\ 8_{18}\ R_2 = 0$

$(6,4) \longrightarrow (6_2, 4_5)\ 8_3$ ２重ツイスト結び目（ Double twist knot）

$(6,2,2) \longrightarrow (6_2, 2_3, 2_7)\ 8_1$

$$(5,3,1,1) \longrightarrow \begin{cases} (5_2, 3_3, 1_6, 1_7)\ 8_2 \\ (5_2, 1_3, 1_4, 3_5)\ 8_6 \end{cases}$$

$$(5,2,2,1) \longrightarrow \begin{cases} (5_2, 2_3, 2_5, 1_6)\ 8_5 \\ (2_2, 5_3, 2_4, 1_5)\ 8_{16} \end{cases}$$

$(5,2,1,1,1) \longrightarrow (5_2, 2_3, 1_4, 1_5, 1_7)\ 8_4$

$(4,4,2) \longrightarrow (2_2, 4_3, 4_4)\ 8_{17}$

$$(4,3,2,1) \longrightarrow \begin{cases} (3_2, 4_3, 2_4, 1_6)\ 8_{13} \\ (3_2, 4_3, 1_4, 2_5)\ 8_{14} \end{cases}$$

$(4,3,1,1,1) \longrightarrow (4_2, 3_3, 1_4, 1_5, 1_6)\ 8_7\ 8_8$

$(4,2,2,2) \longrightarrow (4_2, 2_3, 2_4, 2_5)\ 8_9,\ 8_{10},\ 8_{11},\ 8_{12}$

上の２つの領域数を持つ複数の結び目図は I-不変量（後述）で区別できる。

$(3,3,3,1) \longrightarrow (3_2, 3_3, 3_4, 1_5)\ 8_{15}$　　　以上

$$(7,2,1) \longrightarrow \begin{cases} (7_2, 2_5, 1_8) \qquad R_c \neq 0 \\ \text{しかしトーラス結び目の領域数ではない。} \\ (7_2, 1_4, 2_7) \qquad TSA\ \text{をみたす。} \\ \text{ツイスト結び目の領域数ではない。} c = 10\ \text{のリストにない。} \\ (2_2, 7_3, 1_6) \qquad TSA\ \text{をみたす。} \\ \text{ツイスト結び目の領域数ではない。} c = 10\ \text{のリストにない。} \end{cases}$$

$$(6,3,1) \longrightarrow \begin{cases} (6_2, 3_4, 1_8)\ \ TSA\ \text{を満たす。} R_c \neq 0 \\ \qquad\qquad\quad \text{トーラス結び目図の領域数ではない。} \\ (3_2, 6_3, 1_8)\ \ TSA\ \text{を満たす。} R_c \neq 0 \\ \qquad\qquad\quad \text{トーラス結び目図の領域数ではない。} \end{cases}$$

$(6,2,1,1) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (6_2, 2_4, 1_5, 1_7) \\ (2_2, 6_3, 1_4, 1_6) \end{array} \right\}$ TSA を満たすが平面４正則グラフが見つからない。

$(5,4,1) \longrightarrow (5_2, 4_4, 1_6)$ TSA を満たす。$c = 10$ のリストにない。２成分絡み目図が対応している。

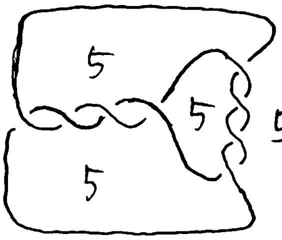
$(5,3,2) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (5_2, 3_4, 2_5) \\ (3_2, 2_3, 5_4) \end{array} \right\}$ TSA を満たす。$c = 10$ のリストにない。

$(4,4,1,1) \longrightarrow (4_2, 4_3, 1_5, 1_7)$ TSA を満たす。$c = 10$ のリストにない。

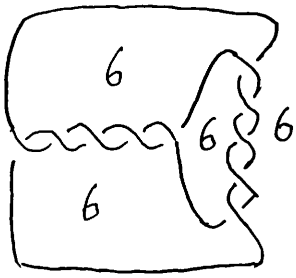
$(4,3,3) \longrightarrow (4_2, 3_3, 3_5)$ TSA を満たす。$c = 10$ のリストにない。

以下のような結び目図を持つ結び目を２重ツイスト結び目（Double twist knot）という事にする。これはツイスト結び目の一般化である。この結び目図の分割の長さは２で、領域数は一般に交差点数cのとき、$c=4k$で$(2(2k-1)_2, 4_{2k+1}) = ((4k-2)_2, 4_{2k+1})$である。

$k=2$
$c=8$
$n=10$

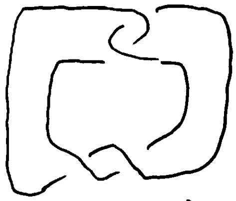


$(6_2, 4_5)$



$(8_2, 4_6)$

これは2成分絡み目

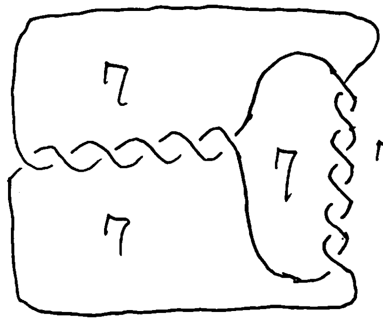


$c=4$

$(2_2, 4_3)$

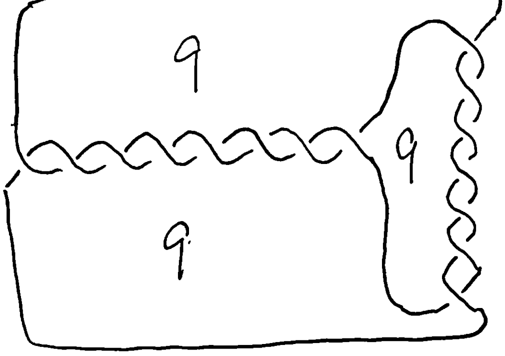
これの一般化

$k=3$



$c=12$
$n=14$
$(10_2, 4_7)$

$k=4$



$c=16$
$n=18$
$(14_2, 4_9)$

I-不変量について

ある結び目図 D において Δ^k を D の $k-$ 辺形とする。
$I^k(D) = \sum_{i<j} I(\Delta_i^k, \Delta_j^k)$ とおく。ここで Δ_i^k と Δ_j^k が a 本の辺と b 個の頂点（ただし、この頂点は a 本の辺の端点以外の頂点とする。）で交わっているとき、$I(\Delta_i^k, \Delta_j^k) = (a, b)$ とする。同様に $I^{s,t}(D) = \sum I(\Delta_i^s, \Delta_j^t)$ も定義できる。$I^k(D)$, $I^{s,t}(D)$ は結び目図の不変量である。ただし、D とその鏡映図 $D!$ は区別できない。結び目 8_7, 8_8 の領域数は全く同じ $(4_2, 3_3, 1_4, 1_5, 1_6)$ であり、$8_9, 8_{10}, 8_{11}, 8_{12}$ も領域数は $(4_2, 2_3, 2_4, 2_5)$ で同じであった。これを $I-$ 不変量で区別する。まず $I^2(8_7) = (0, 2)$, $I^2(8_8) = (0, 1)$ なので、この 2 つの結び目図は異なる。$8_9, 8_{10}, 8_{11}, 8_{12}$ に関しては I^2 を計算すると、$I^2(8_9) = (0, 2)$, $I^2(8_{10}) = (0, 1)$, $I^2(8_{11}) = (0, 1)$, $I^2(8_{12}) = (0, 0)$ なので 8_{10}, 8_{11} 以外は区別できた。この 2 つの結び目図は I^5 を計算する。$I^5(8_{10}) = (0, 2)$, $I^5(8_{11}) = (1, 0)$ なので結び目図として異なる事がわかった。

参考文献

- 鈴木晋一著：結び目理論入門　サイエンス社　　1991 年