

2 辺形のない結び目図について

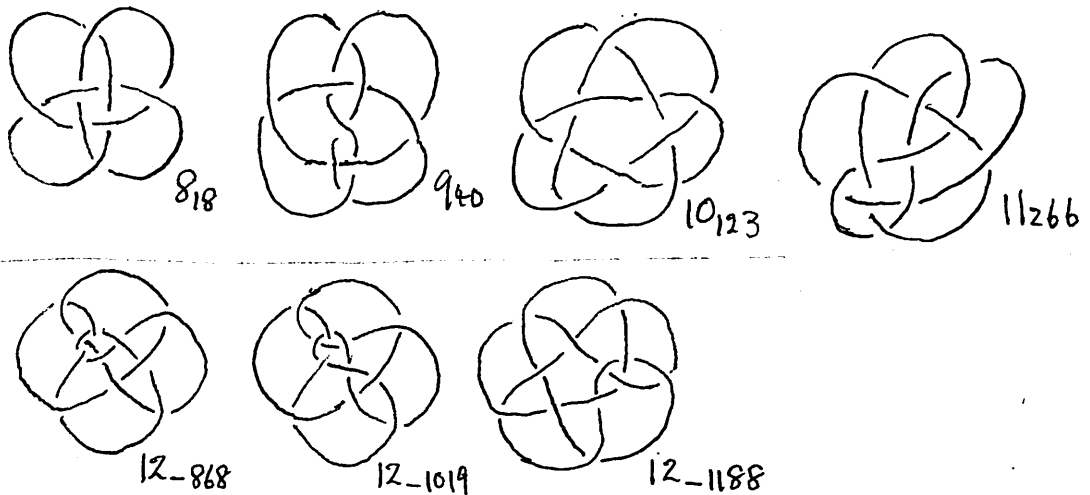
東京女子大学 小林一章

東京女子大学現代教養学部 小館崇子

K を alternating prime knot とし、 $\{R_k\}_{\overline{K}}$ を K の 1 つの irreducible alternating diagram \overline{K} の k 辺形 ($k \geq 2$) の個数とする。

以下特に断らない限り、 K は prime knot とする。 $R_2 = 0$ となる irreducible alternating knot diagram を持つ knot の例は

$8_{18}, 9_{40}, 10_{123}, 11_{266}, 12_{868}, 12_{1019}, 12_{1188}$ である。(11, 12 交差点の knot の番号は Knot Info による。)



注。 $R_3 = 0$ となる alternating prime knot の irre. alt. diagram は 沢山ある。 type $(c, 2)$ ($c \geq 5, \text{ odd}$) の torus knot $5_1, 7_1, 9_1, \dots, 8_3, 9_3, 9_4, \dots$, 等等。

knot diagram を 4-regular graph として見ると次が言える。

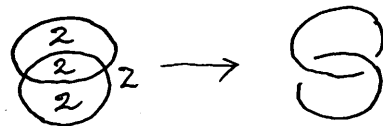
命題 1 2 辺形、3 辺形が無い ($R_2 = R_3 = 0$) 連結な 4-regular plane graph は無い。

証明。オイラー標数より、 $V - E + R = 2$ ($V = c$ は交差点数)。4-正則グラフなので $4V = 2E \rightarrow 2c = E$ よって $c - 2c + R = 2$ これから $R = c + 2$ $R = \sum_{k \geq 2} R_k$ また $2E = \sum_{k \geq 2} kR_k$ $c - \sum_{k \geq 2} \frac{kR_k}{2} + c + 2 = 2$, $R_2 = R_3 = 0$ なので $4c = \sum_{k \geq 4} kR_k \geq 4 \sum_{k \geq 4} R_k = 4R$ 故に $c \geq R = c + 2$ 矛盾
 故に knot proj. 及び廉潔な link proj. で $R_2 = R_3 = 0$ という diagram は無い。

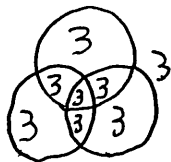
命題 2 全てが k -辺形 ($R = R_k$) という *irred. knot proj.* は無い。

証明。オイラー標数より、 $2 = c - E + R = c - E + R_k$ (c は交差点数) 4-正則グラフなので $4c = 2E \rightarrow E = 2c = \frac{kR_k}{2}$ よって $2 = c - \frac{kR_k}{2} + R_k = \frac{kR_k}{4} - \frac{kR_k}{2} + R_k$ これから $8 = (4 - k)R_k$ $4 - k > 0$ より可能性としては $k = 2, 3$

$k = 2$ のとき、Hopf link proj.



$k = 3$ のとき、 $R_3 = 8$, $c = 6$ Borrowmean ring proj.



仮定 R_3, R_4, R_5 以外は $R_k = 0$ とする。すると

$$R = R_3 + R_4 + R_5 = c + 2 \quad (1) \quad 3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 2E = 4c \quad (2)$$

命題 3 もし $R_5 = a$ とおいたとき、(1),(2)をみたす (R_3, R_4, a) がなければ、 $R_5 > a$ となる R_5 に対しても (1),(2)を満たす (R_3, R_4, R_5) は無い。

c を与えたとき、上の連立方程式 (1),(2) の解の個数 S_c は次で与えられる。

c	6	7	8	9	10	11	12	13	...
S_c	0	1	2	2	3	3	4	4	...

例 1 $c = 6$ $R_3 + R_4 + R_5 = 8$, $3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 24$

$R_5 = 0$ とすると、 $R_4 = 0$, $R_3 = 8$ これは命題 2 に矛盾。

$R_5 = 1$ とすると、 $R_4 < 0$ 不適。

$c = 7$ $R_3 + R_4 + R_5 = 9$, $3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 28$

$R_5 = 0$ とすると、 $R_4 = 1$, $R_3 = 8$ $(R_3, R_4, R_5) = (8, 1, 0)$

$R_5 = 1$ とすると、 $R_3 + R_4 + R_5 = 8$, $3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 23$ $R_4 < 0$ 矛盾

$c = 8$ $R_3 + R_4 + R_5 = 10$, $3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 32$

$R_5 = 0$ とすると、 $R_4 = 2$, $R_3 = 8$ $(R_3, R_4, R_5) = (8, 2, 0)$

$R_5 = 1$ とすると、 $R_4 = 0$, $R_3 = 9$ $(R_3, R_4, R_5) = (9, 0, 1)$

$R_5 = 2$ とすると、 $R_4 < 0$ 不適

$c = 9$ $R_3 + R_4 + R_5 = 11$, $3R_3 + 4R_4 + 5R_5 = 36$

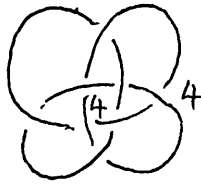
$R_5 = 0$ とすると、 $R_4 = 3$, $R_3 = 8$ $(R_3, R_4, R_5) = (8, 3, 0)$

$R_5 = 1$ とすると、 $R_4 = 1$, $R_3 = 9$ $(R_3, R_4, R_5) = (9, 1, 1)$

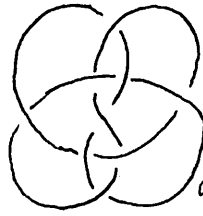
$R_5 = 2$ とすると、 $R_4 < 0$ 不適

以下同様にできる。

連立 1 次方程式 (1),(2) の解に対し、4-正則グラフが存在しない時がある。このとき、 S_c が $R_2 = 0$ の結び目図の個数の上限を与えているように見えるが、 $c = 12$ のとき、 $(R_3, R_4, R_5) = (8, 6, 0)$ から 2 つの結び目図 12_{868} , 12_{1019} が出てくるので S_c は必ずしも上限を与えていない。この 2 つの 4-正則グラフは平面上で 4 辺形のありようが異なるので平面グラフとしては異なる。(12_{1188} は $(R_3, R_4, R_5) = (10, 2, 2)$ から得られ、他の 2 つの解には 4-正則グラフが対応していない。)

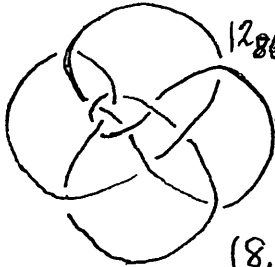


818 解(8,2,0)

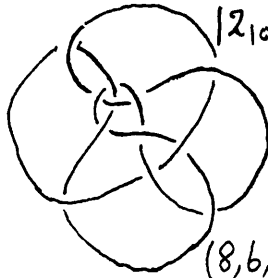


940 解(8,3,0)

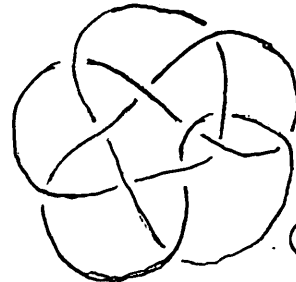
10123 は解(10,0,2)
に 対応している.



(8,6,0)



(8,6,0)



(10,2,2)

K を alternating knot とし、 D_K を K の K の alt. diag. ,
 R_k を D_K の k - 辺形の個数とする。

$r(D_K)(t) := \sum R_k t^k$ を D_K の領域多項式と言う。

$r(D_{K!})(t) = r(D_K)(t)$ である。

$\{r(D_K)(t) | D_K \in \{K \text{ の } diag\}\}$ に次のような辞書式簿書を入れる。

$s(D_K) = \#\{R_i | R_i \neq 0\}$ とする。

$r(D_1)(t), r(D_2)(t) \in \{r(D_K)(t) | D_K \in \{K \text{ の } diag\}\}$ に対し、

1. $s(D_1) > s(D_2) \implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$
2. $spn(D_1) > spn(D_2) \implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$
3. $\max \deg r(D_1)(t) > \max \deg r(D_2)(t) \implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$
4. $r(D_1)(t)$ の最高次の係数 $>$ $r(D_2)(t)$ の最高次の係数 $\implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$
5. $r(D_1)(t)$ の次の次数 $>$ $r(D_2)(t)$ の次の次数 $\implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$
6. $r(D_1)(t)$ の次の次数の係数 $>$ $r(D_2)(t)$ の次の次数の係数 $\implies r(D_1)(t) > r(D_2)(t)$

以下同様。

定義 1 knot K の領域多項式 $r(K)(t)$ を上で定義した辞書式順序での $\{r(D_k)(t)\}$ の最大元と定義する。 $r(K)(t) := \max\{r(D_k)(t)\}$

命題 4 c を *alt. irred. diag.* の交差点数とする。

$$r(D_K)(t) = \sum_{k \geq 2} R_k t^k$$

とおいたとき、 $\sum_{k \geq 2} R_k = c + 2$ である。

K_1 と K_2 を $c(K_1) = c(K_2)$ となる 2 つの *alt. knot* とする。 $r(K_1)(t)$, $r(K_2)(t)$ にも *knot* の図と全く同じ辞書式順序を入れる。例えば $s(K_1) > s(K_2) \Rightarrow r(D_1) > r(D_2)$

$r(K) = \#_{D_K} \{ \{R_k\}_{D_K} \mid \{R_k\} = (R_2, R_3, \dots) \}$ をベクトルとして考える。

例 2 $6_1, 6_2, 6_3$

$r(6_1) = r(6_2) = r(6_3) = 1$ にも関わらず

6_1 では $R_2 = 4, R_3 = 2, R_5 = 2$ なので $r(6_1)(t) = 2t^5 + 2t^3 + 4t^2$

6_2 では $R_2 = 3, R_3 = 3, R_4 = 1, R_5 = 1$ なので

$$r(6_2)(t) = t^5 + t^4 + 3t^3 + 3t^2$$

6_3 では $R_2 = 2, R_3 = 4, R_4 = 1, R_5 = 1$ なので

$$r(6_3)(t) = 2t^4 + 4t^3 + 2t^2$$

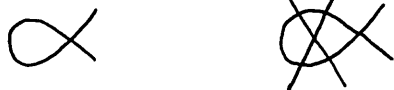
従って $r(6_2)(t) > r(6_1)(t) > r(6_3)(t)$ ($s(K)$ 及び $spn(K)$ で判定できる。) つまり $r(K)$ より $r(K)(t)$ の方が細かい S^2 上の *isotopy invariant* である。

例 3 タイプ $(p, 2)$ ($p: \text{odd}$) の *torus knot* $T(c, 2)$ は $R_2 = c, R_c = 2$ なので $r(T(c, 2)) = 1, r(T(c, 2)) = 2t^c + ct^2$

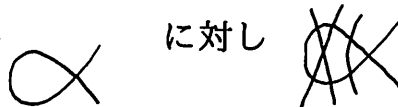




$R_2 = 0$ となる *alt. knot diag.* の一般的な作り方。



1 辺形 に対し とする。又は



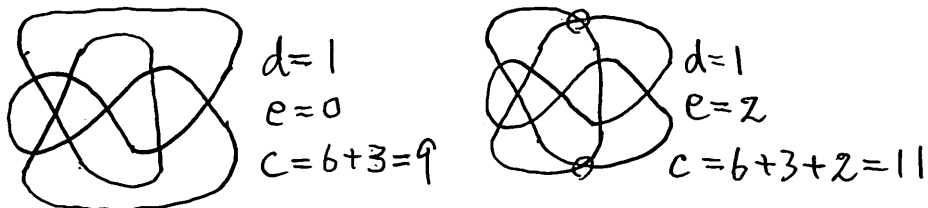
1 辺形 に対し とする。



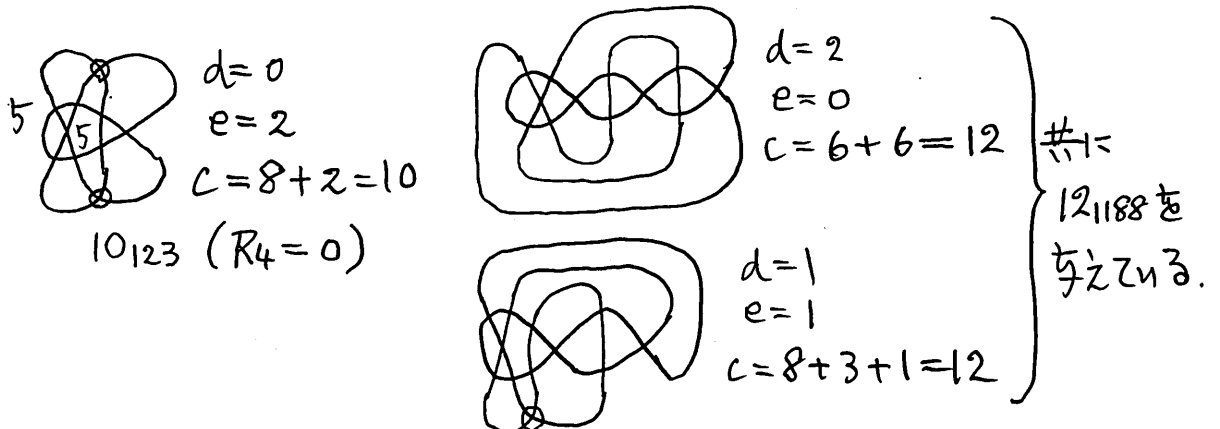
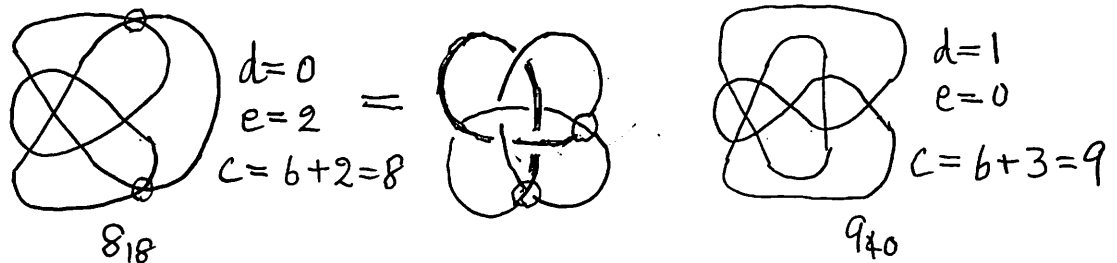
2 辺形  に対し  とする。
 上記の操作をして出来る knot diag. の一部を minimal diag. と

 又は 
 という事にします。

minimal diag. 上の 2 辺形の個数を d , minimal diag. 以外における



交差点数を e とすると、knot diagram の (最小) 交差点数 c は $c = 6+3d+e$ または $c = 8+3d+e$ これにより、 8_{18} , 9_{40} , 10_{123} , 12_{868} , 12_{1019} , 12_{1188} はすべて構成できる。ただし 12_{1188} の例に見るように e は knot diagram invariant ではない。2つの 3 辺形同志、2つの 4 辺形同志、2つの 5 辺形同志のありようは knot diagram invariant である。(即ち、 S^2 上の isotopy invariant)

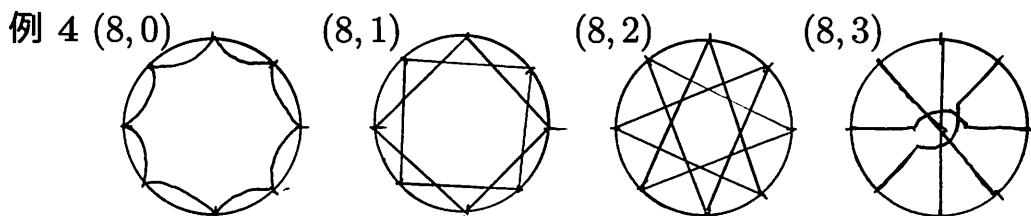


円周を利用して作った4-正則グラフから $R_2 = 0$

の knot diagram の作り方

以下では $m > 2n + 1$ とする。

1. (m, n) ($n \geq 1$): 円周上に m 個の点を取り、 $0, 1, \dots, (m-1)$ と番号をつけ、 n 個飛ばして、2 点を結ぶ (0 と $(n+1)$ を結ぶ。)



例 $(8, 0)$ からわかるように $n = 0$ だと 2 辺形が出来てしまう。

link(knot) の図にするために書く頂点で辺が横断的に交わるようにし、かつ上下が交互になるように結ぶ。中が複数個のサイクルでも横断的に結ぶと knot diagram になるときがある。

例 5 $(8, 1)$

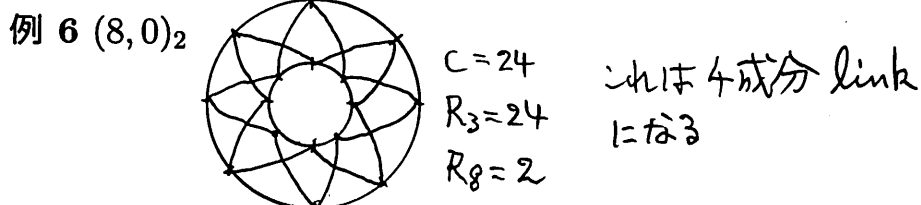


内部サイクルの個数 $d = g.c.c(m, n + 1)$

link diagram としての成分数 $e = g.c.d(m, n + 2)$

最小交差点数 $c = m + \frac{2 \times 2n \times m}{4} = m(n + 1)$

2. $(m, n)_2$ ($n \geq 0$): 2 つの同心円上に m 個の点を取り、各々 $0, 1, \dots, (m-1)$ と番号をつけ、外側の点から n 個飛ばして、内側の点を結ぶ (外側の 0 と内側の $(n + 1)$ を結ぶ。)



$(m, n)_2$ の場合は $n = 0$ であっても $R_2 = 0$ である。 (m, n) , $(m, n)_2$

から作られる 4-正則グラフは $\text{type}(p, q)$ の torus link の射影図になっている。ただし、 $\text{type}(p, 2)$ ($p : \text{odd}$) 以外の torus link は non-alt. link になる。そこで $R_2 = 0$ の link diagram は、その non-alt. torus link の alternating 化とみなすことが出来る。従って、 (p, q) ($p, q \geq 3$) の 4-正則グラフから得られる $R_2 = 0$ の alt. link diag. は torus link ではない。つまり $\text{standard torus} \subset \mathbf{R}^3$ の上には載っていない。

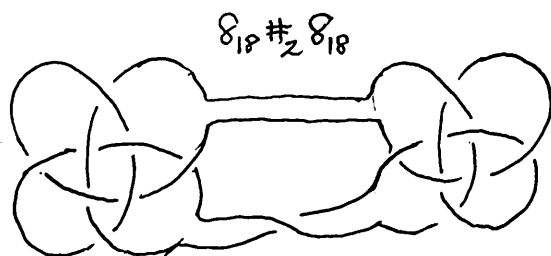
内部サイクルの個数 $d = g.c.c(m, 2(n+1))$

link diagram としての成分数 $e = g.c.d(m, 2(n+2))$

最小交差点数 $c = 2m + \frac{2 \times (2n+1) \times m}{2} = m(2n+3)$

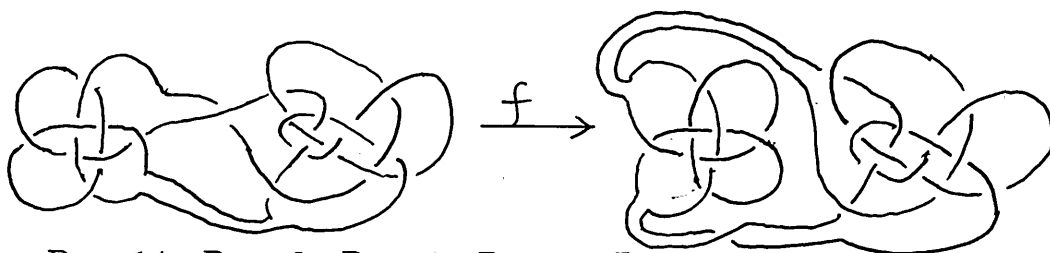
Double connected sum について

$R_2 = 0$ の prime knot diagram では 2-tangle が取れず、従って diagram は 1 つと考えられてきたが次の double connected sum の方法を使えば 2 種類以上の $R_2 = 0$ の knot diagram が作れる。



この例では *flying* を行なっても $\{R_k\}$ は変わらない。

例 7 $8_{18} \#_2 12_{868} \rightarrow \text{flying} (8_{18} \#_2 12_{868})'$



$R_3 = 14, R_4 = 6, R_5 = 1, R_6 = 1, R_7 = 1$

$R'_3 = 13, R'_4 = 7, R'_5 = 2, R'_7 = 1$

従って $\{R_k\} \neq \{R'_k\}$ であり、 $8_{18} \#_2 12_{868} \neq (8_{18} \#_2 12_{868})'$ である。

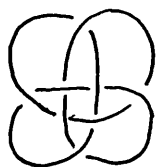
命題 5 $K_1 \#_2 K_2$ において K_1 及び K_2 がともに $R_2 = 0$ であるような diagram であれば $K_1 \#_2 K_2$ を *flying* しても再び $R_2 = 0$ の

diagram である。

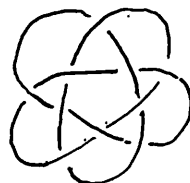
小さい m, n に対する (m, n) , $(m, n)_2$ について

$(4, 1)$ は 8_{18}

$(5, 1)$ は 10_{123}

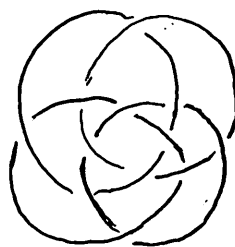
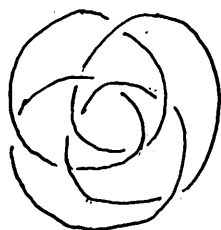


$(3, 0)_2$ は 9_{40}



$(4, 0)_2$ は $c = 12$ であるが 4 - 成分 link

である。



参考文献

Knot Info : C. Livingston and J.C. Cha <http://www.indiana.edu/knot-info/>

The Tait Flying Conjecture : W. W. Menasco and M.B. Thistlewaite,
Bull. AMS. vol 25 No. 2(1991) pp403-412