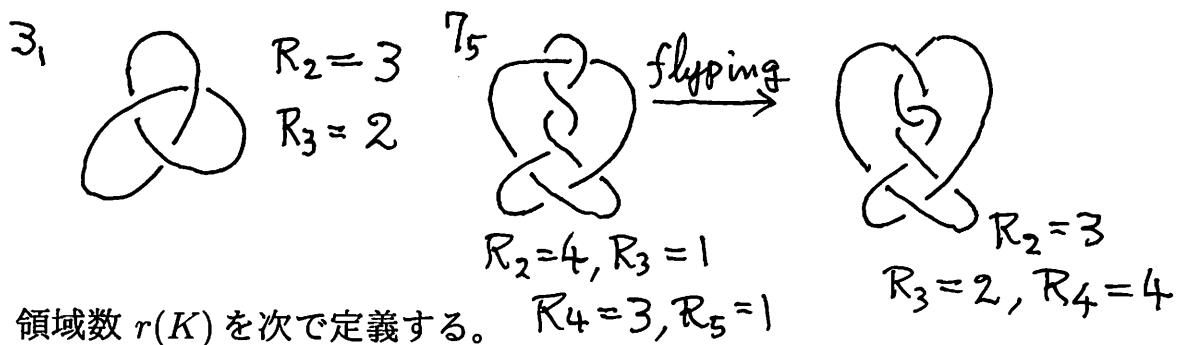


Lantern diagram の拡張と領域数 $r(K)$ について

東京女子大学 小林一章
東京女子大学現代教養学部 小館崇子

K を alternating prime knot とし、 $\{R_k\}_{\overline{K}}$ を K の 1 つの irreducible alternating diagram \overline{K} の k 辺形 ($k \geq 2$) の個数とする。



領域数 $r(K)$ を次で定義する。
 $r(K) := \#\overline{K}(\{R_k\}_{\overline{K}})$: $\{R_k\}$ を 1 つのベクトル (R_2, R_3, \dots) とみて異なるベクトルの個数とする。



Menasco-Thistlethwaite の定理 : 「knot K の任意の irreducible alternating diagram は flyping で移りうる。」を使うと次の命題が示される。

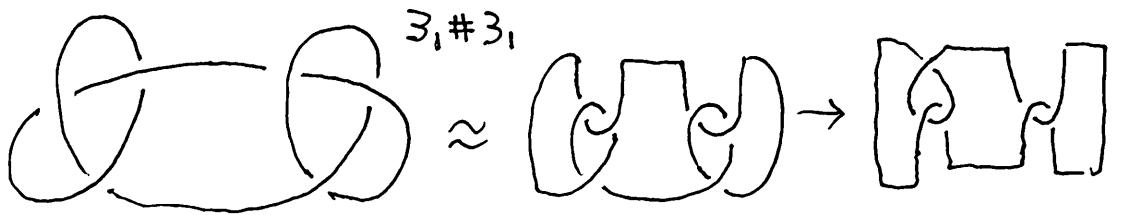
命題 1 $r(K)$ は knot K の knot type invariant である。

$$r_c := \text{mac}_K\{r(K)|c(K) = c : K \text{ の最少交差点数}\}$$

- r_c を決めるこことを目標とする。

$r(K)$ は knot の連結和に関し、加法的ではない。すなわち $r(K_1 \# K_2) = r(K_1) + r(K_2)$ ではない。

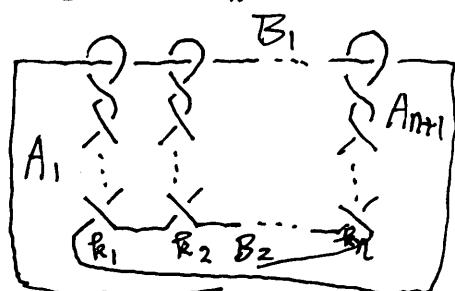
例 1 $K = 3_1$ (trefoil knot) とし、 $3_1 \# 3_1$ (granny knot) を考える。
(square knot $3_1 \# 3_1$! は non-alternating knot) この knot はどこで flyping を行っても $R_2 = 4$, $R_3 = 2$, $R_4 = R_6 = 1$ 従って $r(3_1 \# 3_1) = 1$ 。一方 $r(3_1) + r(3_1) = 2$



問。 $r(K \# L) = r(K) + r(L)$ となる knot K, L はあるか。

type (c,2) (c:odd) の torus knot と twist knot K に対して $r(K) = 1$ なので $r_3 = r_4 = r_5 = 1, r_6 = 1$ (c = 6 のとき 6_1 は twist knot, $r(6_2), r(6_3)$ はその diagram から計算して。後述)

次のような diagram を simple Lantern diagram という (up to mirror image) 図のようなとき、simple Lantern diagram のタイプは (k_1, k_2, \dots, k_n) (k_i は柱の交差点の個数) という。 $k_i \geq 2, c = k_1 + k_2 + \dots + k_n + 1$



領域 A_1 は k_1 辺形、 $A_{(n+1)}$ は k_n 辺形、 A_2 は $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) = (k_1 + k_2 - 2)$ 辺形、 A_i は $(k_{i-1} + k_i - 2)$ 辺形 ($2 \leq i \leq n$)
 B_1 は $(2n + 1)$ 辺形、 B_2 は $(n + 1)$ 辺形。“柱” $1 \sim n$ に flyping を行う (Lantern diag. では $\{R_k\}$ が変わりうるのは “柱” $1 \sim n$ のところだけである。) “柱” $1 \sim n$ に flyping を行って領域 $A_1 \sim A_{(n+1)}$; B_1, B_2 のうち、辺数が変わるのは B_1, B_2 のみである。

そこで

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

を1つのパラメーターとして採用する。

はじめ次のような予想を立てた。

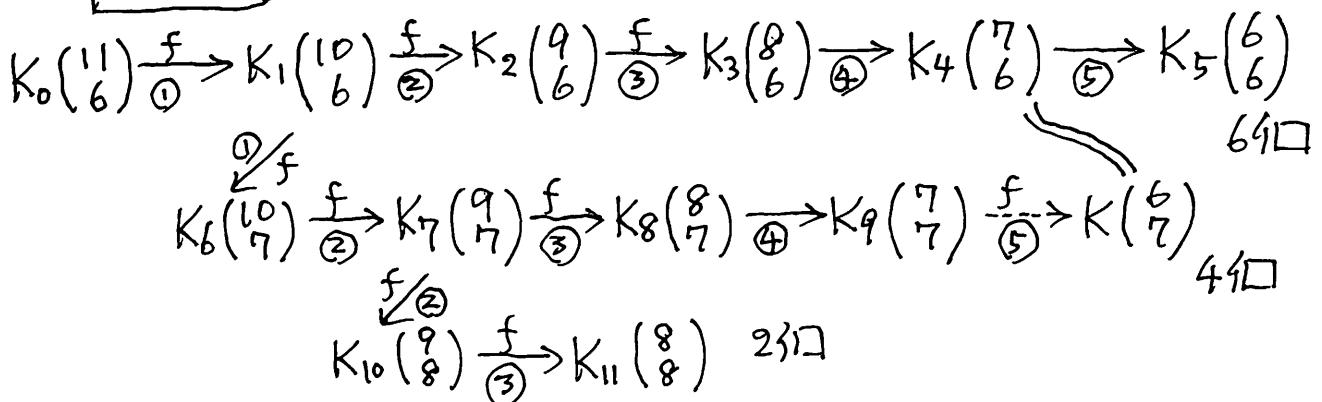
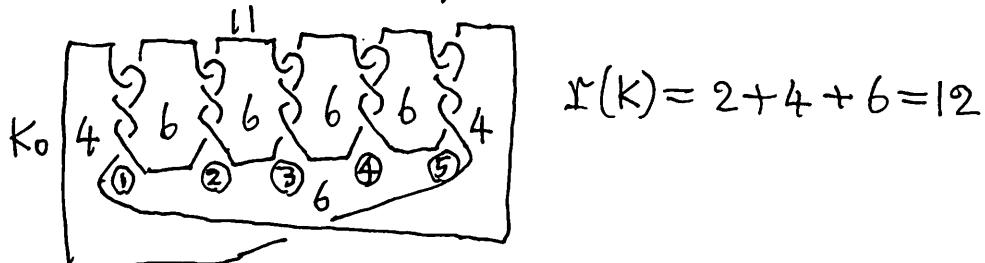
予想 1 r_c は交差点数 c をもつ simple Lantern diagram のところで到達する。さらに $c \geq 7$ のとき、交差点数 c を持つ simple Lantern diagram のタイプ (k_1, \dots, k_n) は $4 \leq k_1, k_2 \leq 5, k_3 = \dots = k_{n-1} = 4, k_n = 3 \text{ or } 4$ であり、かつ柱の本数は最小にする。

注。 knot K によっては simple Lantern diagram を持たない knot もある。したがってこのような knot K では r_c には到達しないことを意味している。

しかし後述するように $c = 12$ で上の予想に対し反例が存在することがわかった。

- 最少交差点数 c が与えられたとき、 $r(K) = \#\overline{K}\{R_k\}_{\overline{K}}$ が一番大きくなる simple Lantern diagram のタイプ

例) $c=21$ タイプ $(4, 4, 4, 4, 4)$, パラメータ $\binom{11}{5}, c=4k+1$
 $f=5 \rightarrow r(K)=12$



- 例えに $C = 4k+1$ のとき タイプ (4, 4, ..., 4) パラメータ $\binom{2k+1}{k+1}$

$$k \text{が odd} \rightarrow r(K) = 2\left(1 + 2 + \dots + \frac{k+1}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+3)}{4}$$

$$k \text{が even} \rightarrow r(K) = 1 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+2)^2}{4}$$

$C = 4k$ のとき タイプ (4, 4, ..., 4, 3)

$$k \text{が odd} \rightarrow r(K) = 2\left(1 + 2 + \dots + \frac{k+1}{2}\right) - 1 = \frac{(k+1)(k+3)}{4} - 1$$

$$k \text{が even} \rightarrow r(K) = 1 + 3 + 5 + \dots + (k-1) + k = \frac{(k+2)^2}{4} - 1$$

$C = 4k+2$ のとき タイプ (5, 4, ..., 4)

$C = 4k+3$ のとき タイプ (5, 5, 4, ..., 4)

以上より次が示せる。

命題 2 $c = 4k$ のとき、

$$k : \text{odd} \rightarrow r(K) = \frac{k^2+4k-1}{4}$$

$$k : \text{even} \rightarrow r(K) = \frac{k^2+4k}{4}$$

$c = 4k+1, 4k+2, 4k+3$ のとき、

$$k : \text{odd} \rightarrow r(K) = \frac{k^2+4k+3}{4}$$

$$k : \text{even} \rightarrow r(K) = \frac{k^2+4k+4}{4}$$

$c = 4k$ から $c = 4k+1$ へは k が奇数でも偶数でも 1 増えるが

$c = 4k+3$ から $c = 4(k+1)$ へは

k が奇数の時、

$$\frac{\{(k+1)^2 + 4(k+1)\} - (k^2 + 4k + 3)}{4} = \frac{k+1}{2}$$

だけ増える。

k が偶数の時、

$$\frac{\{(k+1)^2 + 4(k+1) - 1\} - (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{k}{2}$$

だけ増える。

例 2 $c = 6$ のときの $r(K)$

6_1



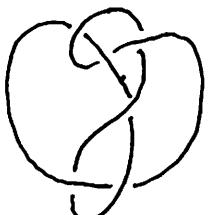
twist knot, $\Gamma(6_1) = 1$

6_2

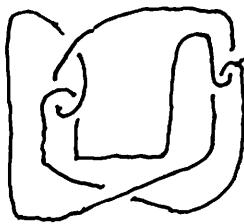


$\Gamma(6_2) = 1$.

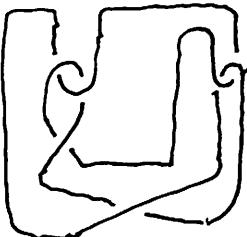
6_3



\approx



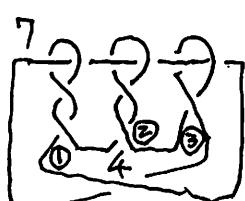
\approx



$\Gamma(6_3) = 1$

以上より $r_6 = 1$

例 3 $c = 12$ のとき、simple Lantern diagram のタイプは $(4, 4, 3)$ であり、 $r((4, 4, 3)) = 5$ しかし下図のようにすると $r((4, 4; 4)) = 8$ となる。これは予想 1 の反例である。



$$(7) \xrightarrow[f]{\textcircled{1}} (6) \xrightarrow[f]{\textcircled{2}} (5)$$

$$(6) \xrightarrow[f]{\textcircled{3}} (5)$$

$(4, 4, 3)$

$$f/\textcircled{1} \quad \Gamma(4, 4, 3) = 5$$

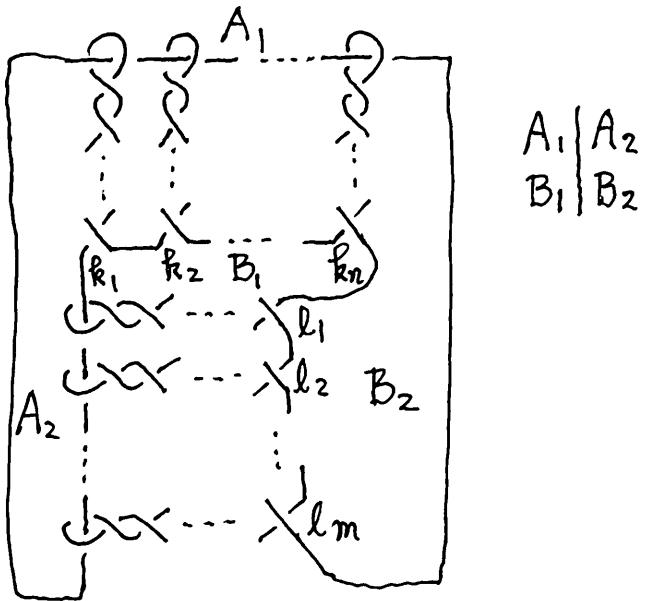


$$\Gamma(4, 4; 4) = 4 \times 2 = 8$$

$$7|5 \xrightarrow[f]{\textcircled{1}} 6|5 \xrightarrow[f]{\textcircled{2}} 5|5$$

$$5|4 \xrightarrow[f]{\textcircled{3}} 5|5$$

そこで上記の例 $(4, 4; 4)$ を一般化した Double Lantern diagram $(k_1, \dots, k_n; l_1, \dots, l_m)$ を下図のように定義する。またパラメータ $A_1 \left| \begin{matrix} A_2 \\ B_1 \end{matrix} \right| B_2$ も導入する。



$$\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & B_2 \end{array}$$

定理 1 1. $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 1$

2. $c \geq 7$ のとき、*simple Lantern diagram* のパラメータを (k_1, \dots, k_n) としたとき、 $r_c \geq r((k_1, \dots, k_n))$ (ただし最小交差点数 $c = k_1 + \dots + k_n + 1$) であり、

$$c = 4n + 1 \text{ のとき, } (k_1, \dots, k_n) = (4, 4, \dots, 4)$$

$$c = 4n + 2 \text{ のとき, } (k_1, \dots, k_n) = (5, 4, \dots, 4)$$

$$c = 4n + 3 \text{ のとき, } (k_1, \dots, k_n) = (5, 5, 4, \dots, 4)$$

$$c = 4n \text{ のとき, } (k_1, \dots, k_n) = (4, \dots, 4, 3) \text{ であり,}$$

$$c = 4n \text{ のとき, }$$

$$n : \text{odd} \longrightarrow r((k_1, \dots, k_n)) = \frac{n^2 + 4n - 1}{4}$$

$$n : \text{even} \longrightarrow r((k_1, \dots, k_n)) = \frac{n^2 + 4n}{4}$$

$$c = 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3 \text{ のとき, }$$

$$n : \text{odd} \longrightarrow r((k_1, \dots, k_n)) = \frac{n^2 + 4n + 3}{4}$$

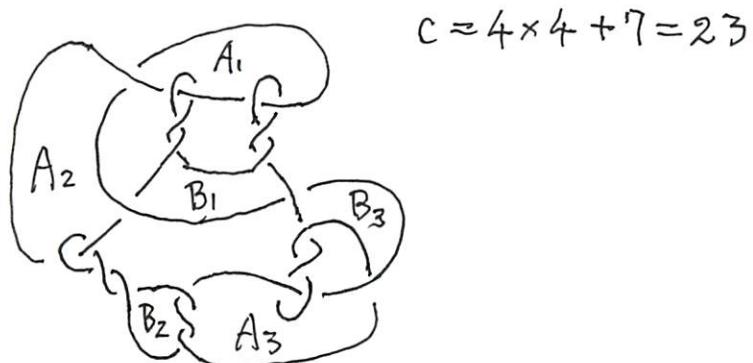
$$n : \text{even} \longrightarrow r((k_1, \dots, k_n)) = \frac{n^2 + 4n + 4}{4}$$

3. さらに $c \geq 9$ のとき、*Double Lantern diagram* を使って $r_c \geq r((k_1, \dots, k_{(n-1)}; l))$ ($l = 4$) である。ここで $c = k_1 + \dots + k_{(n-1)} + l = k_1 + \dots + k_{(n-1)} + 4$

注。 $c \geq 9$ のとき、 $r((k_1, \dots, k_{(n-1)}; 4)) > r((k_1, \dots, k_n))$ である。 $c = k_1 + \dots + k_{(n-1)} + 4 = k_1 + \dots + k_n + 1$

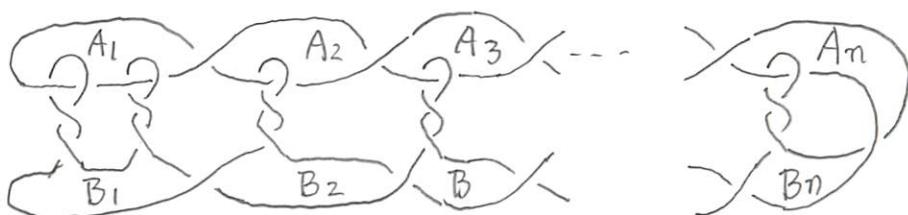
さらに Triple Lantern diagram $A_1 \Big| A_2 \Big| A_3$ $B_1 \Big| B_2 \Big| B_3$ も作れる。(下図)

以下の例は $c = 23$ である。



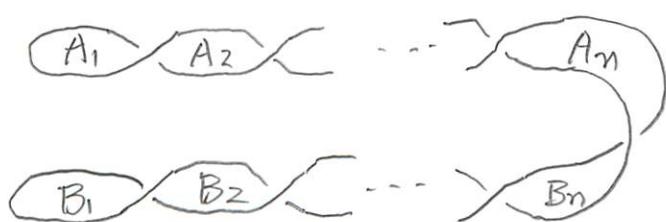
これを拡大して n が任意に与えられたとき、 n -ple Lantern diagram を作る。

$A_1 \Big| A_2 \Big| \cdots \Big| A_n$ の作り方。
 $B_1 \Big| B_2 \Big| \cdots \Big| B_n$

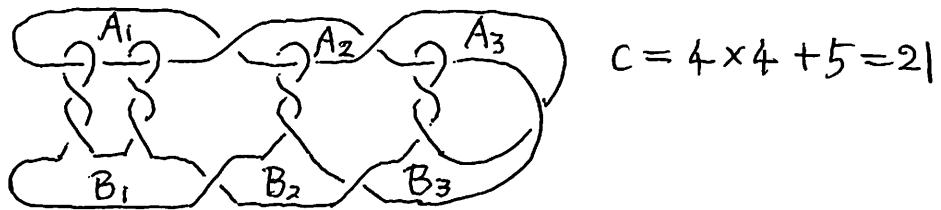


Lantern 部分を忘れると

ただしこの作り方では
L(K)を大きくはしない。



$n = 3$ のとき、 $c = 21$ なので、上で作った $A_1 \ A_2 \ A_3$ $B_1 \ B_2 \ B_3$ よりも
交差点数が少ない。



参考文献

The Tait Flyping Conjecture : W.W.Menasco and M.B.Thistlewaite
, Bull. AMS. vol. 25 No.2 (1991) pp403-412