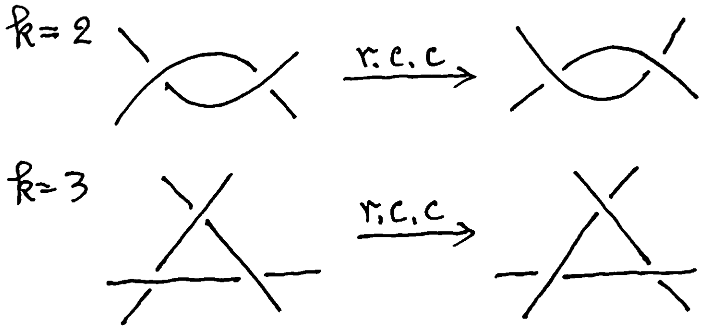
結び目の alternating diagram における c-type と 3 辺形以上を持つ knot diagram について

東京女子大学　小林一章
東京女子大学現代文化学部　小舘崇子

結び目の irreducible alternating diagram を考え、その領域（k-辺形）の境界上の k 個の交差点の上、下を一斉に交差交換する。これを regional crossing change （r.c.c. 領域交差交換）ということにする。

Irreducible alternating diagram K の k-辺形において r.c.c. を



行って、交差点数が Reidemaister 変形を使って減らない、または減る k-辺形の個数が、各々 a_k 個、b_k 個あるとき、K の k-辺形の c-type を (a_k, b_k) とかく。

$(a,b)_K := \sum_{k\geq 2}^{c-1}(a_k, b_k)$ を K の c-type という。

すべての交差点を、その境界上に持つ c 辺形があるとき、その c 辺形で r.c.c. を行うと、それは単に鏡映を求めたにすぎないので上記の和は $k=2$ から $c-1$ とする。

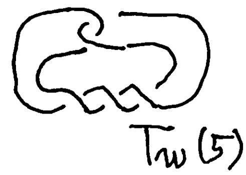
予想 1 K の *c-type* $(a,b)_K$ は K の *irr. alt. diag. inv* か。

注。　Aida([1]) の定理より、$(a,b)_K$ は K の knot type inv. ではない。

例。　・type $(c,2)(c: odd)$ の torus knot $T(c,2)$

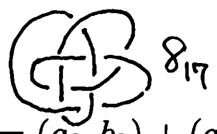
$(a,b)_{T(c,2)} = \sum(a_k,b_k) = (a_2,b_2) = (0,c)$

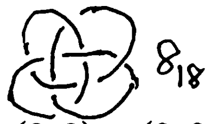
・twist knot $T_w(c)$



$(a,b)_{T_w(c)} = (a_2,b_2) + (a_3,b_3) + (a_{c-1},b_{c-1})$
$= (0,c-2) + (0,2) + (0,2) = (0,c+2)$

例。8_{17} $(a,b)_{8_{17}} = (a_2,b_2) + (a_3,b_3) + (a_4,b_4) = (2,0) + (2,2) + (2,2) = (6,4)$



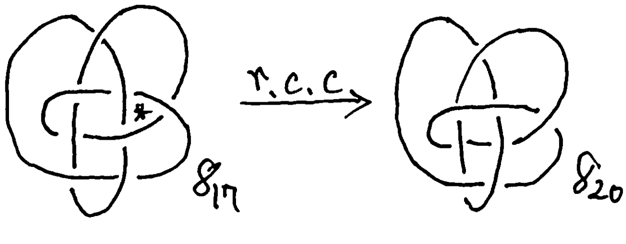


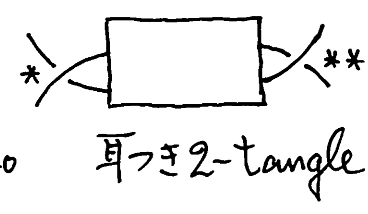
例。8_{18} $(a,b)_{8_{18}} = (a_3,b_3) + (a_4,b_4) = (8,0) + (2,2) = (10,0)$

命題 1．c-type が $(a,b) = (0,c)$ （この c は交差点数）　となる knot K は type $(c,2)(c: odd)$ の torus knot のみである。

証明。一般に領域数 $R = c+2$ なので $(a,b)_K = \sum_{k=2}^{c-1}(a_k,b_k) = (c,0)$ と言う事は数えられていない領域が２つあるという事。それを $X,,Y$ とすると X と Y は境界を共有し（それは circle)、その上にすべての交差点が載っているという事。それは type $(c,2)$ の torus knot である.

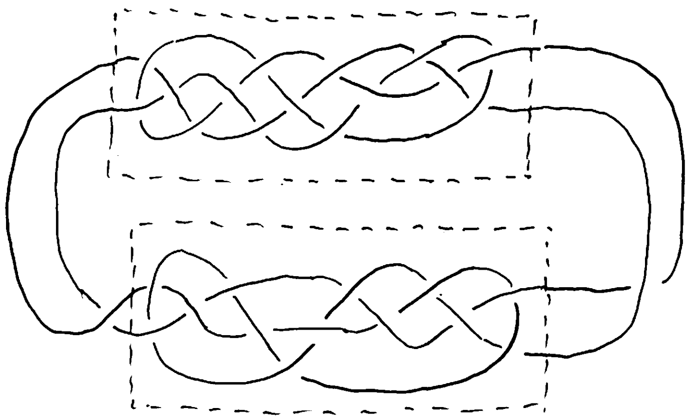
命題 2. irreducible alternating diagram K において $a_k \geq 1$ という a_k があれば K と射影図を同じにする reduced non-alternating knot が作れる。





命題 3. 耳付き 2-tangle があるとする。$*$ 又は $**$ どちらか一方の領域で r.c.c. を行うと交差点数を下げることが出来る。(up to rotation)

注。2辺形は耳付き2-tangleである．したがって2辺形があるならば耳付き2-tangleがある。逆は成立しない。つまり2辺形が無くても耳付き2-tangleがある diagram がある。



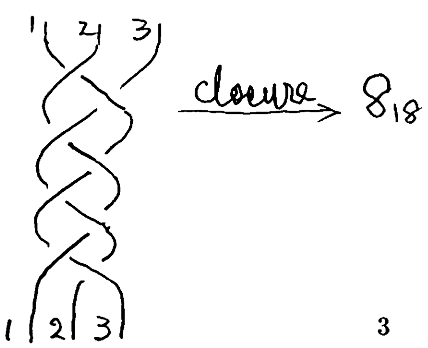
予想 2 耳付き*2-tangle*を持たない*irreducible alternating diagram*では、どの領域で*r.c.c.*を行っても*reduced non-alternating knot diagram*になる。

<u>耳付き2-tangleの無い irreducible alternating knot diagram の systematic な作り方</u>

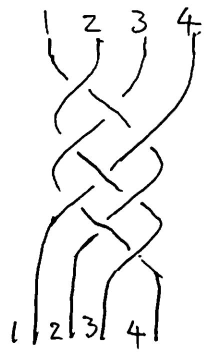
braid表示を利用する。closed braid表示においては耳付き2-tangleがない事とすべての領域が3辺形以上という事は同じことである。

● 交差点数 c が合成数のとき、$c = p * q$ $(p > 1, q > 1)$ とおく。$q+1$ 本の紐からなる braid を用意する。$(\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_q)^p = (1q+1q+2\cdots 32)^p$ は closed braid にすると $g.c.d(p, q+1) = r$ のとき、r 個の成分からなる link．つまり $r = 1$ のとき、結び目を表している。さらに $p \geq 3$ のとき、1, 2辺形の無い knot diagram になる。

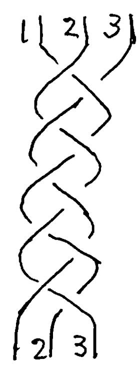
例。$CL(\sigma_1\sigma_2)^4$ は 8_{18} である。$(\sigma_1\sigma_2)^4 = (132)^4 = (132)$



9_{40} $c = 9 = 3 + 3 + 3 \longleftrightarrow (1432)^3 = (1234)$



10_{123} $c = 10 = 5 \times 2 \longleftrightarrow (132)^5 = (123)$

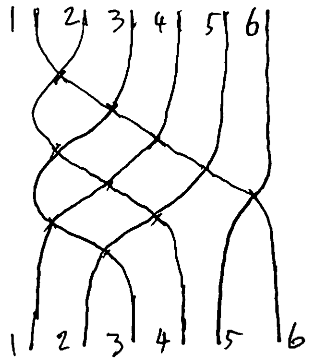


- 交差点数 c が素数のとき。

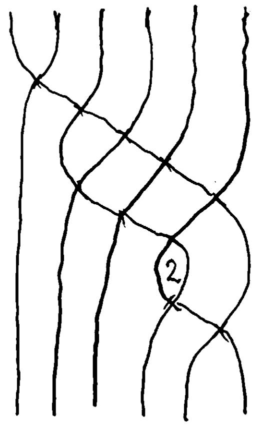
素数 c の素数による分割数 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ （a_i は素数、n_i は自然数, $i < j \Longrightarrow a_i > a_j$ とする。）を作る。$(a_1 + 1)$ 本の紐を用意し、ブレイド $\prod_{i=1}^{l}(\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_{a_i})^{n_i}$ を作る。このブレイドに対し、1，2辺形がない、結び目の射影図であるという事を調べる必要がある。

予想 3 *braid* 表示された *irreducible alt. knot diagram* が1，2辺形を持たなければ、どの領域で *r.c.c.* を行っても *reduced non-alternating diagram* になる。

射影図から交代図を作るのは容易なので以下射影図を考えることとする。
まず1，2辺形がない条件を記す。
分割 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ から braid をつくるとき、左端から交差点を作っていくが underline $c = \sum_{i=1}^{l} n_i \underline{a_i}$ がついているときは右端から作っていく。また hat $n_i \hat{a}_i$ がついているときは $\hat{a}_i$ が左端、右端に出ないように作る（$\hat{a}_i$ は unique に決まらない時がある）。
例。　$5 + 3 + 2$　　　　$5 + \hat{3} + \underline{2}$



$(16524)(3)$



重複が1 ⇨ 2辺形がある

$(165432)(2543)(465)$
$=(15342)(6)$

以下で重複の個数とは分割 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ を braid 表示したとき、上の行または下の行と共有する braid generator の個数のこととする。ただし共有する生成元が無いか、離れているときは $0, -1$ とする。

(I) 素数 c の素数による分割 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ （a_i は素数、n_i はとする。$i < j \Longrightarrow a_i > a_j$ としておく。）$n_1 \geq 3, l \geq 2$ (もし $l = 1$ なら c は合成数） $\Longrightarrow$ 分割 $\sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ に対応する braid 表示は 3 辺形以上しか持たない。

(II) 上記同様に $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ とかけ、$n_1 = 2$ 又は $n_1 = 1$ のとき、

(II-1) $n_1 = 2$ のとき、$l \geq 4$ で $a_2, a_3, \cdots, a_l$ に対し、$\_, \hat{}$ を使って、braid 表示において、どの重複の個数も 1 でなく（2 以上、0 又は -1 は良い ）、最左端、最右端に（a_1 も含めて） 3 つ以上頭出しがある。$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ に対応する braid 表示には 3 辺形以上しかない。

(II-2) $n_1 = 1$ のとき、$l \geq 5$ で $a_2, a_3, \cdots, a_l$ に対し、$\_, \hat{}$ を使って、どの重複も 1 でなく（2 以上、0 又は -1 は良い ）、最左端、最右端に（a_1 も含めて） 3 つ以上頭出しがある。$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ に対応する braid 表示には 3 辺形以上しかない。

<u>分割 $\sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ から得られる置換のタイプを変えない操作</u>

還元操作 1． 素数 c の素数による分割 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ において $n_i \geq a_i + 1$ なら適当な $m_i > 0$ を取って $a_i \geq n_i - m_i \times (a_i + 1) \geq 0$ としておく。$n_i' = n_i - m_i \times (a_i + 1) \geq 0$ とおき、$c' = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i (n_i \geq n_i' \geq 0)$ とする。c を c' にすることを c の還元操作といい、c' を

$\sum_{i=1}^{l} n_i a_i$ の還元という。
注。c が小さな素数のとき、c' も素数である。c が realizable で c' が合成数となる初の例は $c = 31 = 17+3+3+4\times 2$ であり、その還元は $c' = 25 = 17+3+3+2$ ここで c' 自身の braid 表示は _,^ を使っても 2 辺形を持ってしまう。ただし、$3+2+2+2+2 \longrightarrow 3+2$ は良いが、2 と $\underline{2}$ に対応する置換は異なるので $3+2+2+\underline{2}+\underline{2} \longrightarrow 3+2$ は間違い。
還元操作２．$n_1 = 1$ のとき、 $c = a_1 + \sum_{i=2}^{l} n_i a_i$ は 1 辺形を持つので Markov move I によって $c \longrightarrow c' = a_2 + \sum_{i=2}^{l} n_i a_i$ とできる。これを還元操作 2 とする。　ただし、$7+5+3+\underline{2}$ は 1 辺形が無いので還元操作 2 は出来ない。

<u>素数 c の素数による分割 $c = \sum_{i=1}^{l} n_i a_i$　(a_i は素数）に対応する braid から得られた 2 辺形のない knot projection のリスト</u>

$c = 11 = 2+3+\underline{2}+3+\hat{1}$ （これだけは素数でない 1 を使っている。）

$c = 13 = \underline{2}+3+2+3+3 = 3+2+2+3+3$

$c = 17 = 5+5+5+2 = 5+3+5+\underline{2}+\underline{2}$
$= 5+5+3+\underline{2}+\underline{2} = 3+3+3+3+3+2$
$= 5+3+3+\underline{2}+\underline{2}+\underline{2} = 5+3\times 2+3\times \underline{2}$

$c = 19 = 3\times 3+2+3+3+2$
$= 7+3+3+\underline{3}+\underline{3} = 7+3+3+3\times 2 = 7+6\times 2$
$= 3\times 5+2\times 2 \quad = 5+5+3+3+\underline{3} = 5+5+3+3\times \underline{2}$
$= 5+3+3+4\times 2 = 5+7\times 2 = 3\times 3+5\times 2$

$c = 23 = 11+3+3+2\times \underline{3} = 3\times 7+2 = 7+7+5+2+\underline{2}$
$= 7+5+3+4\times \underline{2} = 7+3+5+\hat{3}+\underline{3}+\underline{2}$
$= 3\times 5+\underline{3}+3+\underline{2} = 3\times 5+4\times 2 = 5+4\times 3+3\times \underline{2}$
$= 13+3+3+\underline{2}+\underline{2} = 5+3+3+3\times 2+3\times \underline{2}$
$= 5\times 3+4\times 2$

$c = 29 = 3\times 7+3+3+2$

$c = 31 = 19+3+3+3\times \underline{2} \longrightarrow (reduction)\ c' = 19+3+3$

これは realizable なもので reduction $c \longrightarrow c'$ で c' が合成数となる初の例。

例。 11_{367}（中西） $= 11_{266}$ (Livingston& Cha)
$\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}$
$= (1234) \longleftrightarrow c = 11 = 2 + 3 + \underline{2} + 3 + \hat{1}$
領域数 $R_2 = 0,\ R_3 = 9,\ R_4 = 3,\ R_5 = 1$

予想 4 *1,2* 辺形の無い *irreducible alternating knot diagram* は最少交差点数と等しい交差点数の *braid* 表示を持つ。

$8_{18}, 9_{40}, 10_{123}, 11_{266}$ *(Livingston & Cha)* はこの条件を満足している。

本稿で作った１，２辺形の無い braid 表示の closed braid は作り方から上の予想を成立させている。つまりこの方法で１，２辺形の無い knot diagram がすべて作り出せることが示せれば予想を示したことになる。
Alternating knot を braid 表示すると最少交差点数を実現していないものはたくさんある。([4]).

文献表

1. H. Aida ; Unknotting operation of polygonal Type, Tokyo J. Math. .15 (1992), 111 - 121
2. K.Kobayashi and T. Kodate ; Free n full twist ついて、箱根セミナー vol. 29 (2013), 1-13
3. A. Shimizu ; Region crossing change is an unknotting operation , J. Math. Soc. Japan (to appear) (http://arxive.org/abs/1011.6304
4. C.Livingston& J.C. Cha ; Table of knot invariants (Knot Info) , Indiana Univ.