

Knot, Link の本表現について

Kazuaki Kobayashi

Tokyo Womans Christian University

Takako Kodate

Tokyo Womans Christian University

この論文では、knot (link) diagram は原則 irreducible knot (link) diagram とする。

また knot (link) diagram の射影 (projection) をグラフと見たものを射影グラフという。これは4-正則、平面グラフである。knot (link) diagram の領域に頂点を対応させ、交差点に辺を対応させて出来るグラフを Goeritz グラフという。これは平面グラフであり、1つの knot (link) diagram から双対グラフを合わせ、常に2つのグラフが得られる。

1 本表現

Link(Knot) \bar{L} を各成分が適当な個数の頂点と辺を持つサイクルグラフと見る。 V を \bar{L} の頂点集合とする。

(B, Ξ) を (本, バインダー) とする。 S_i を B の (i 番目の) シートとする。 $\Xi = \bigcap_{i=1}^n S_i$, $B = \bigcup_{i=1}^n S_i$ である。

定義 1 絡み目 L の本表現とは埋め込み

$\varphi: (\bar{L}, V) \rightarrow (B, \Xi)$ で次の (0)~(3) を満たすものである。

(0) $\varphi(\bar{L}) \approx L$

(1) 任意の辺 $e \in E(L)$ に対し、 $\varphi(\text{Int}(e)) \subset S_i$ となる i が唯一つ存在する。

(2) 辺を載せていないシート S_j はない (空シートはない。)

(3) 折り返しはない。折り返しとは一つのシート内で1頂点を共有する2辺が有るもの。下図のようなものである。

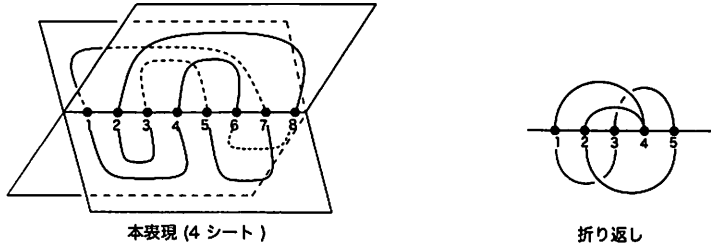


図 1:

折り返しを許すと最小頂点数が更に減少するし、偶数ではなくなる（一種の特異構造である）。

- 事実**

 - 最小シート数について
 - 自明な絡み目 \iff 2シート
 - 非自明な絡み目、結び目 \iff 3シート以上
 - 最小頂点数 $v(= \text{even})$ について
 - 自明な絡み目 $L \iff v = |L|$ 成分数
 - $v(\{\text{非自明な絡み目}\}) = v(\text{Hoph link}) = 4$
 - $v(\{\text{非自明な結び目}\}) = v(3_1) = v(4_1) = 6$
 - 頂点数が最小頂点数 v のときの最小シート数
 - {自明な絡み目} $\iff v = 2 \times$ 成分数 で 2シート
 - {非自明な絡み目} \implies 4シート (Hoph link) で実現
 - {非自明な結び目} \implies 5シート (3_1 knot) で実現
- 問題 1.** 頂点数 v が最小の時の最小シート数 s はトーラスknot $s(T(p, 2)) = 5$ である。逆は成立するか？

 - $s(K) = 5$ となるknot K を特徴づけよ。
 - $s(T_w(n)) \leq 6$ (twist knot with n twist) である。
- 2. 任意の $v \geq 8$ (偶数) 任意の $s \geq 8$ に対し、 $v(K) = v, s(K) = s$ となる K はあるか？

2 3シート本表現について

この節では、特に断らない限り、3シート表現を扱う。
 またknot diagram は特に断らない限り、irreducible なものとする。

定理 1 (1) 任意の非自明絡み目 L は3シート本表現をもつ。つまり

- 3シート本表現 $\varphi : (\bar{L}, V) \rightarrow (B, \Xi)$ で $L \approx \varphi(\bar{L})$ となるものがある。
 (2) $|V| = 4c$ をみたす3シート本表現 φ がある。ここで c は L の最小交差点数
 (3) \bar{L} が *alternating diagram* のとき、 $\min_{\varphi} |V| = 4c$ が成立する。

注。 • $|V| > 4c$ となる3シート表現もある。
 • (3) は *alternating diagram* ではなく、*alternating knot* では成立しない。以下で述べるように *alternating knot* の *non-alternating diagram* や *non-alternating knot diagram* では一般に $v < 4c$ である。

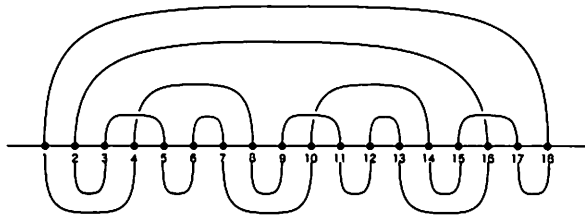


図 2: 3_1 knot の $|V| > 4c$ となる表現

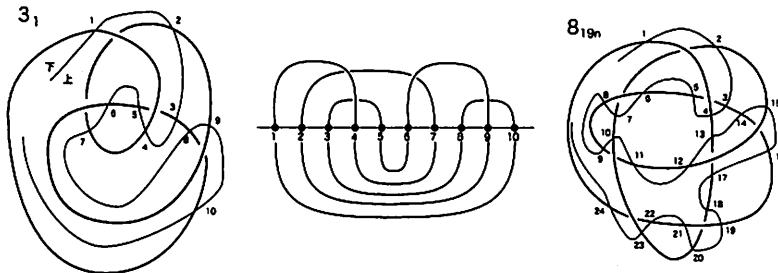


図 3: 3_1 knot の *non-alternating diagram* の頂点数および 8_{19n} の頂点数

定理 1 の証明 (1) L の *diagram* における各交点のまわりで局所的に4点で交わる小さな円 C_i を取り、 C_i の内側に全ての交点を含むように出来る。この C_i をサイクルが出来ないように、また *knot diagram* と交わらないように結び、その *arc* の近傍をとり、その境界をとる。それは内側に全ての交点を含む単純閉曲線になる。これを C とする。この C の1か所を切ったものを軸 Ξ とし、交点を含む方を軸の上とすると、上は2シートになり、下は交点が無いので1シートで合わせて3シートである。
 (2) C と *knot diagram* との交点は明らかに $4c$ である。
 (3) L を *alternating diagram* とし、その3シート表現を取る。

$|V| < 4c$ として矛盾を出す。

$|V| < 4c$ より、1つの交点のまわりに軸 (バインダー) との交点が4点は無交点がある。その状況は次の3つの場合(a), (b),(c)に分けられる。

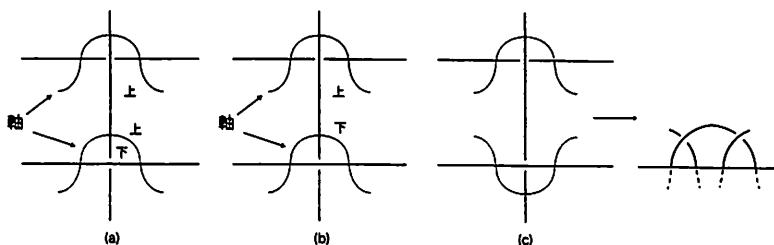


図 4:

(a) の時は、バインダーの上、下各々に少なくとも2シート有る事になり、3シート表現に矛盾

(b) の時は、1つの辺がバインダーの上下になり、本表現に矛盾する。

(c) の時は、ここだけで3シートが必要になり、少なくとも4シート表現になり、矛盾である。

以上より、alternating diagram においては、 $v = \min|V| = 4c$ である。

定義 2 以下の操作を *dealternating operation 1* という。knot diagram が非自明な2変形を持つ時に適用出来る。

(自明な2変形に適用しても最小頂点数の上限を下げる効果は無い)

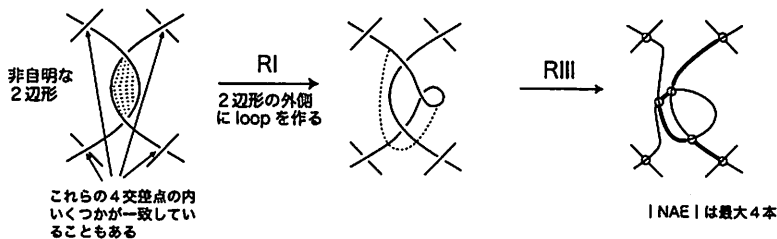


図 5: dealternating operation 1 の図

定義 3 以下のようなknot diagram の一部を *non-alternating edge* という。



図 6: non-alternating edge

dealternating operation 1 を行う回数は $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 回で適当に離しておこなう。
 non-alternating edges の集合を NAE と書く。その NAE がサイクルを含む時、
 $|NAE| = k$ 、独立なサイクルの個数を l とすると、 $k - l$ 本の NAE はそれをシート
 表現の下側のシート (交点を持たない方のシート) において、innermost にするよ
 うに軸 (バインダー) が取れる。その軸に関し、 $v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 2(k - l)$ となる。
 ここで $k = 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ である。軸は各交点の周りに circle を描き、それらの circle を tree
 になるようにつないでいくように作る。

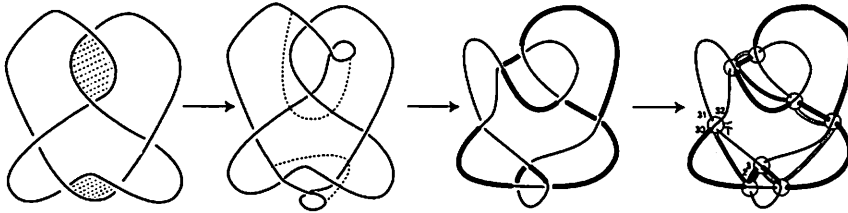


図 7: 軸の取り方

定義 4 2 辺形が無いときは、以下の dealternating operation 2 を適用する。
 (1 0 交差点以下の knot で 2 辺形が無いのは 8_{18} , 9_{40} , 10_{123} , 10_{141n} のみである。
 10_{141n} は non-alternating knot である。)

dealternating op.1. が出来る場合は v を減らす事に関し、dealt.op. 1 の方
 が dealt. op. 2 より効果が大きいか等しい。
 ただし次の命題から任意の knot diagram は 2 辺形か 3 辺形のいずれかを必ず持
 つので 2 辺形が無いときは、3 辺形に対する dealternating operation 2 が必ずできる。

定義 5 knot diagram の k 辺形領域において、その境界の辺が全て alternating
 になっているとき、非自明な k 辺形という。非自明でない領域を自明な領域とい
 う。従って alternating diagram においては全ての領域が非自明な k 辺形である。ま
 た non-alternating knot の全ての diagram は自明な領域を持つ。

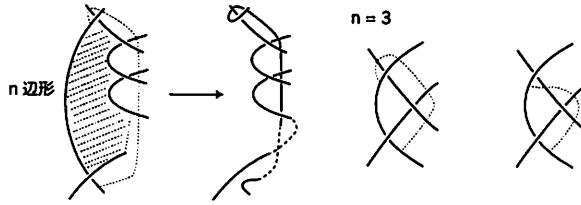


図 8: dealternating operation 2

予想 1 *Alternating knot* の任意の *irreducible alternating diagram* では非自明な k 辺形の個数 R_k は一定である。

注. 1. *alternating diagram* と *non-alternating diagram* の両方を考えると成立しない (図 9 (b))

2. *non-alternating diagram* では非自明な k 辺形と非自明な変形が互いに移り合うことがある。(図 9 (c))

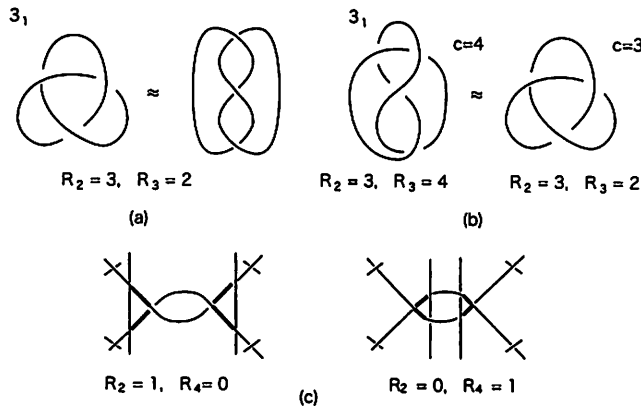


図 9:

命題 1 R_k を連結な *irreducible knot or link diagram* における k 辺形の個数とすると、 $2R_2 + R_3 \geq 8$ である。つまり、すべての領域が 4 辺形以上という *knot diagram* は無い。

さらに $V = c \geq 3$ なら $\sum_{k \geq 3} R_k \geq 2$ である。

$V = c \geq 3$ という条件は具体的には Hoph link を除外している。

証明。knot の射影図を考えると 4-正則、平面グラフである。このグラフをこの論文

では射影グラフと呼ぶ。オイラーの公式を使うと $V - E + R = 2$ かつ $4V = 2E$ これから、 $R = V + 2$ である。 $V + 2 = R = R_2 + R_3 + \sum_{k \geq 4} R_k$ であり、 $2R_2 + 3R_3 + \sum_{k \geq 4} kR_k = 2E = 4V$ 、そして $2R_2 + 3R_3 + \sum_{k \geq 4} kR_k \geq 2R_2 + 3R_3 + 4 \sum_{k \geq 4} R_k = 2R_2 + 3R_3 + 4(R - R_2 - R_3)$ で $R = V + 2$ だから $2R_2 + R_3 \geq 8$ である。

次に $V = c \geq 3$ (最小交点数) とし、全てが 2 辺形とすると $R = R_2$ であり、 $\sum_{k \geq 2} kR_k = 2R_2 = 2E$ だから $R = R_2 = E$ 。よって $V - E + R = 2$ より $V = 2$ これは $V \geq 3$ に矛盾。ゆえに先ず $\sum_{k \geq 3} R_k \geq 1$ が示せた。次に $V = 3, 4$ のときは 3_1 knot, 4_1 knot しかないので、各々 $R_2(3_1) = 3, R_3(3_1) = 2; R_2(4_1) = 2, R_3(4_1) = 4$ なので $\sum_{k \geq 3} R_k \geq 2$ は成立している。そこで $V = c \geq 5$ のときを考える。もし $\sum_{k \geq 3} R_k = 1$ とすると $R = R_2 + \sum_{k \geq 3} R_k = R_2 + 1$ であり、 $R_k = 1$ かつ、その他の j について $R_j = 0$ という k が一意に存在する。そこで、 $R = R_2 + 1$ だから $2R_2 + k = 2E$ 。よって、 $E = R_2 + \frac{k}{2}$ 。そこで $2 = V - E + R = V - (R_2 + \frac{k}{2}) + R_2 + 1 = V + 1 - \frac{k}{2}$ 。それと $V = c \geq 5$ から $k \geq 8$ が出る。これは $V \geq 5$ のとき、3, 4, 5, 6, 7 辺形が無い事を意味するので矛盾である。以上より $V = c \geq 3$ なら $\sum_{k \geq 3} R_k \geq 2$ である。

• knot diagram に対し、dealt. op. 1 を適用した時に出来る non-alternating edge の出来方を見る便法。

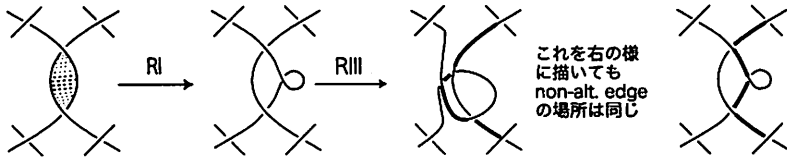


図 10: 便法

• dealternating operation 1 のグラフ化

knot diagram の領域に頂点を、交差点に辺を対応する事により、knot diagram から平面グラフ (及びその双対グラフ) が得られる。このグラフを、この論文では Goeritz グラフと呼ぶ。knot diagram での 2 辺形は、そのグラフにおいて次数 2 の頂点か 2 辺形が対応する。

knot diagram に対し dealt. op. 1 を行ったとき、それがグラフに於いてどのような変化になっているかを見る。

命題 2 $c \equiv 0 \pmod{3}$ とする。 c 交点 alternating knot において alternating knot diagram が 2 辺形を持ち、dealt. op 1 が $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 回出来るとする。このとき、どのように dealt. op 1 を $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 回行っても、UNAE は少なくとも一つサイクルを含む。

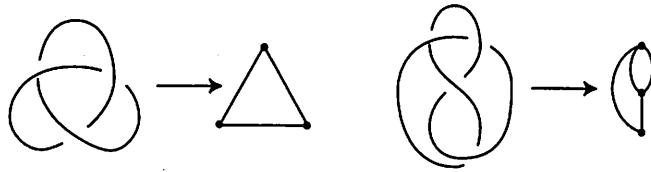


図 11: knot diagram から得られるグラフ

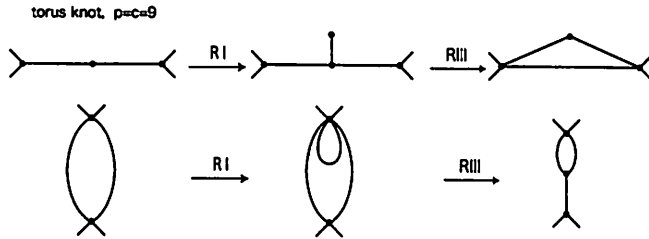


図 12: dealtenating op.1 のグラフでの解釈

証明。 knot projection を考えると 4 正則、平面グラフである。一回の dealternating operation 1 を行うと 4 本の non-alternating edge が出来る。この中にサイクルが含まれていると証明は終わり。そこで 4 本の辺から成る tree が出来る場合を考える。 $c \equiv 0 \pmod{3}$ 個の頂点を持つグラフにおいて 4 頂点 tree が $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 個有ると必ず少なくとも 1 つサイクルを含む事になる。

定理 2 タイプ $T(p, 2)$ のトーラス結び目 (p : 奇数) (即ち $3_1, 5_1, 7_1, 9_1, \dots$ knot) においては (最小交点数 $c = p$)

- (1) $p \equiv 0 \pmod{3} \implies v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 2(4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor - 1) = 4c - 4 \cdot \frac{c}{3} + 2$
- (2) $p \equiv 0 \pmod{3} \implies v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 8\lfloor \frac{c}{3} \rfloor = 4c - 4 \cdot \lfloor \frac{c}{3} \rfloor$

定理 3 twist knot with n -twist ($c = n + 2$) かつ $c \geq 5$ とする。

- (1) $c \equiv 0 \pmod{3} \implies v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 2(4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor - 1) = 4c - 4 \cdot \frac{c}{3} + 2$
(\cup NAЕ に含まれるサイクルは 1 つ)
- (2) $c \equiv 0 \pmod{3} \implies v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 8\lfloor \frac{c}{3} \rfloor = 4c - 4 \cdot \lfloor \frac{c}{3} \rfloor$

注。定理 3 で、 $n = 2$ 即ち $c = 4$ のときは、 $v \leq 4c - 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor + 2 = 14$ (つまり (1) の方)

定理 2、定理 3 の証明。 knot の diagram において、交点に辺を、交点に隣接する領域に頂点を対応させると、平面グラフ及びその双対グラフが出来る。torus knot,

twist knot に対し、このようなグラフを考えると下図のようなグラフが対応する。このグラフにdealternating op.1をグラフ化したもの(図12)を適用すると証明できる。

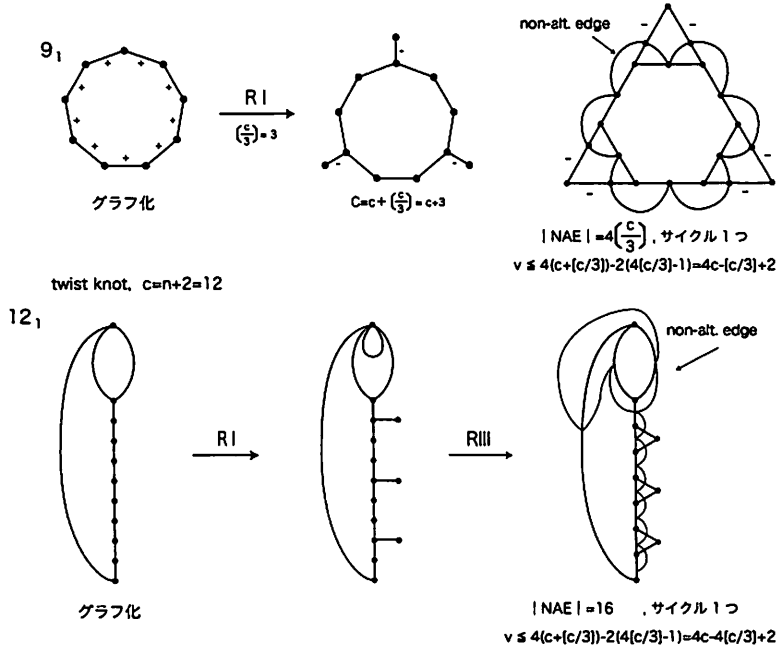


図 13: torus knot , twist knot のグラフ

予想 2 交点数 $c \geq 6$ とする。タイプ $(c, 2)$ の torus knot $T(c, 2)$, n twist をもつ twist knot $T_w(n)$ 以外の alternating knot で、その alternating diagram が非自明な 2 辺形を持っており (10 交点以下では 8_{18} , 9_{43} , 10_{123} 以外)、dealt.op.1 が $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 回出来るとする。

(1) $c \equiv 0 \pmod{3} \implies$

(a) $v \leq 4\left(c + \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor\right) - 2\left(4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor - 1\right) = 4c - 4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor + 2$ (サイクル1つ) 又は

(b) $v \leq 4\left(c + \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor\right) - 2\left(4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor - 2\right) = 4c - 4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor + 4$ (サイクル2つ) この

場合は dealt.op.1 を $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor - 1$ 回でサイクルなしと効果は同じ。

(2) $c \equiv 1 \pmod{3} \implies$

(a) $v \leq 4\left(c + \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor\right) - 2 \cdot 4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor = 4c - 4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor$ (サイクルが無い)

又は

(b) $v \leq 4\left(c + \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor\right) - 2\left(4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor - 1\right) = 4c - 4\left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor + 2$

(サイクルが1つ)

$$(9) c \equiv 2 \pmod{3} \implies v \leq 4(c + \lfloor \frac{c}{3} \rfloor) - 2 \cdot 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor = 4c - 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor \text{ (サイクルが無い)}$$

注。 $d \leq \lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ という knot が有る。つまり dealternating op1. が $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ 回出来ない knot が有る。

例。 $9_{31}, 9_{32}, 9_{33}$ は $d = 2$; 9_{34} は $d = 1$; 9_{40} は $d = 0$ である。

• Non-alternating knot について

命題 3 任意の *non-alternating knot* の *diagram* に対し、*projection* を同じにする *alternating knot diagram* (従って *alternating knot*) が存在する。つまり交点数が落ちない *alternating knot* が存在する。

注。逆は成立しない。alternating knot diagram と射影図が同じ non-alternating knot は最小交点数が同じ保証は無い。

注。projection が同じ Alternating knot は鏡像を含め 2 つしかない。

予想 3 *Non-alternating knot* については $v \leq 4c-8, 4c-10, 4c-12$ であろう。

non-alternating knot の non-alternating 度を最初の diagram における non-alternating edge (ONAE) の本数と”効果のある” dealt. operation の回数で測ることとする。

これが出来ると上記 $-8, -10, -12$ の評価の代わりに予想 2 の $\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ のようなパラメータつきのもので予想がさらに精密化出来るかも知れない。

定理 4 *Non-alternating prime knot* に対し、 $4 \leq |ONAE| \leq 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ かつ $|ONAE|$ は偶数である。

注。 square knot では $|ONAE| = 2$ なので prime knot という条件は必要である。

証明。 knot projection を 4-正則、平面グラフとして見ると $V - E + R = 2, 4V = 2E$ である。ある non-alt. knot が projection を同じにする alt. knot diagram から cross change して得られたとする。cross change する交差点は、そのグラフの頂点であり、複数の cross change に対応する頂点が全て非隣接なら、その頂点数の 4 倍が $|ONAE|$ になる。頂点が隣接しているとき、その頂点集合を V_c とおくと、 $|V_c| < c$ である。何故なら、もし $|V_c| = c$ なら、すなわち全ての交差点で crossing change すると元の knot の鏡像となり、再び alternating knot になって矛盾だからである。その V_c と crossing change しない頂点の集合 U との間を dotted circle で

分ける。dotted circle は V_c と U を結ぶ辺とのみ、しかも唯一点で交わるように取る。knot が prime knot なので、この dotted circle との交点は 4 個以上の偶数個。ゆえに $|ONAE| \geq 4$ である。

1つの頂点で cross change すると、それに incident している高々 4本の辺が NAE に変わる。ただし crossing change する頂点が隣接していると、その両頂点に incident する辺は non-alt. edge にはならない。ゆえに最大辺数は $\cup ONAE$ がサイクルを含まず重複辺も出来ない dealtenating op.1 の最大回数の 4倍であり、 $|ONAE| \leq 4\lfloor \frac{c}{3} \rfloor$ である。

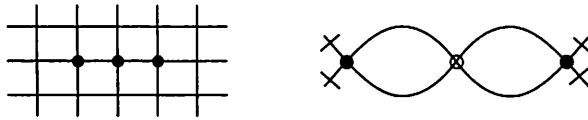


図 14:

3 diagram における非自明な 2 辺形の個数 d と knot の最小交差点数 c の関係について

定理 5 knot 又は Hopf link 以外の non-separable link diagram なら $d \leq c$ である。

注。 Hopf link では $c = 2, d = 4$ である。

注。 torus knot $T(c, 2)$ のとき、 $d = c$

twist knot $T_w(n)$ ($c = n + 2$) のとき $d = c - 2$

注。 d は dealt. op. 1 で不変である。

$d = c - 1$ という knot は無い事を以下の定理で証明する。

定理の証明。 knot の projection を 4-正則、平面グラフと見る。 $R = V + 2$ であり、射影図の k 辺形の個数を R_k とすると $R = R_2 + \sum_{k \geq 3} R_k = c + 2$ よって $d + \sum_{k \geq 3} R_k = c + 2$ 。命題 1 より、 $\sum_{k \geq 3} R_k \geq 2$ ゆえに $d \leq c$ である。

定義 6 次の操作をフック (hook) を作る (はずす) ということにする。自明な knot から R -move とフックを作る (はずす) 操作によって作られる knot を hooked knot と呼ぶ事にする。

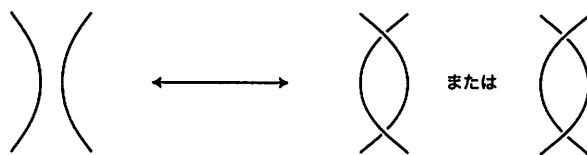


図 15: フックを作る (はずす) 操作

例。

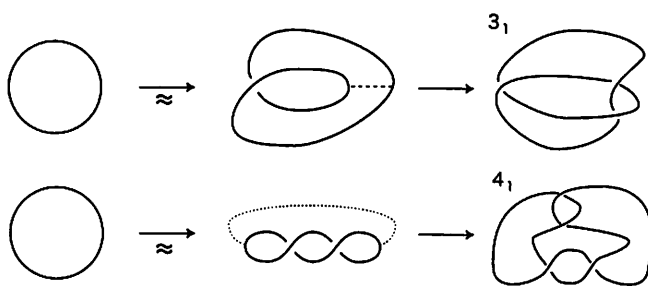


図 16:

定理 6 フックは *unknotting operation* である。従って全ての *knot* は *hooked knot* である。

証明。フックと *R-moves* で *cross change* が実現出来るから。

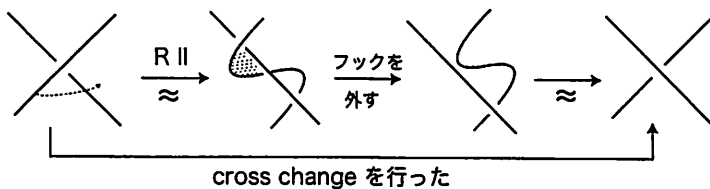


図 17: *cross change* をフックと *R-move* で実現する

定理 7 $d = c - 1$ という結び目は無い。

証明。knot diagram の projection グラフで証明する。projection グラフは4-regular, plane グラフである。交差点数を c 、2辺形の個数を d とすると、定理5よりknot に対しては $d \leq c$ であり、 $d(T(c, 2)) = c$ 、 $d(T_w(n)) = c - 2$ ($c = n + 2$)である。図 18 (a) を torus knot 型、(b) をtwist knot 型という事にする。 c が偶数のときはtorus knot 型は2成分絡み目になる。(b) は偶、奇に依らずknot diagram を復元できる。

c に対し、 d を多く作るには2辺形を $c - 2$ 個、連結成分が2個になるようにつないでおく。(ただし4-正則になるように。) 連結成分が1個で d が最も多いのは $T(c, 2)$ と決まる。ただし、 c の偶、奇により2成分link, またはknot になる。連結成分が3以上になると (a) , (b) 以外に $d < c - 2$ となる場合がある (c)。そこで、その連結2成分をつなぐ方法は(a) または (b) で、各場合 $d = c$ または $d = c - 2$ となり、 $d = c - 1$ というknot はない。

注。証明から次の事がわかる。 $d = c$ のときは、 $T(c, 2)$ (c が奇数ならtorus knot、偶数なら2成分 torus link)、 $d = c - 2$ のときは、twist knot とは限らないが、twist knot 型のknot。 連結成分2つの内1つが1つの2辺形になっている時がtwist knot である。(図19)

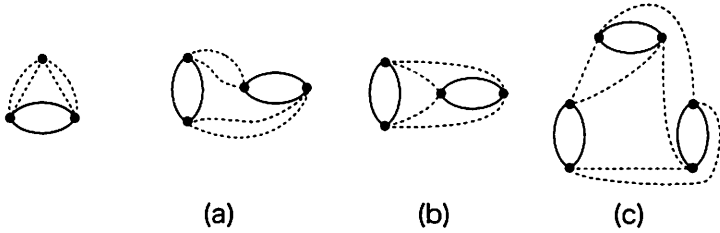


図 18:

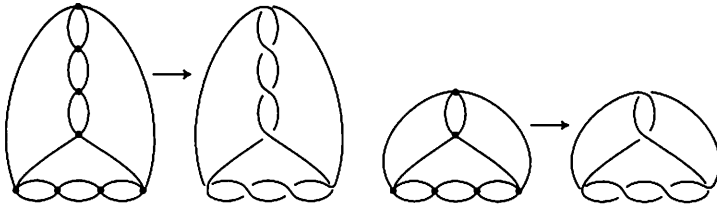


図 19:

4 double crossing change (DCC) について

次の操作をdouble crossing change (DCC) 及び strong double crossing change (SDCC) と呼ぶ。

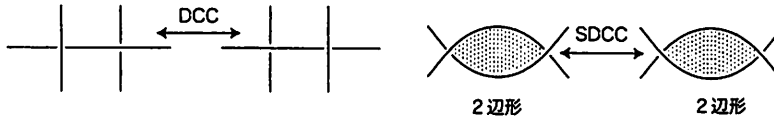


図 20: DCCとSDCC

定理 8 DCC は *unknotting operation* である。

図のようにDCCによってフックをはずす操作が実現出来る。そしてフックをはずす操作はunknotting operation なので DCCはunknotting operation である。図 2 1 より実際は 3 角形に対する DCC のみを考えればよい事がわかる。

定義 7 DCC で *trivial knot* になる最小の回数を *DCC unknotting number* と言い、 u_D と書く。

S DCC で *trivial knot* になる最小の回数を *SDCC unknotting number* と言い、 u_{SD} と書く。

予想 1 が成立すると、 $d = R_2 = 0$ となる knot ($8_{18}, 9_{40}, 10_{123}, 10_{141}$ など) に対してはSDCCは行えない。従って SDCC はunknotting operation ではないことになる。そこで $d = 0$ となる knot K に対しては $u_{SD}(K) = \infty$ とする。今のところ予想 1 が成立するか否か不明なのでSDCC で自明なknot に移せない knot K を $u_{SD}(K) = \infty$ とする。

定義より、 $u_{SD} \geq u_D$ である。通常のunknotting number u とは一般に違う。

例。 $u(T(c, 2)) = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ ($c: odd$)
 $u_{SD}(T(5, 2)) = 1$ (図 2 2)

定理 9 torus knot $T(c, 2)$ ($c: odd$)に関して、

$$u_{SD}(T(3, 2)) = u_D(T(3, 2)) = 1, \quad u_{SD}(T(5, 2)) = u_D(T(5, 2)) = 1$$

$$u_{SD}(T(c, 2)) = u_D(T(c, 2)) \leq 1 + u_{SD}(T(c-4, 2)) \quad (c \geq 7)$$

$$\text{または } u_{SD}(T(c, 2)) = u_D(T(c, 2)) \leq \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor + 1 \quad (c = 2n + 1, n \geq 3)$$

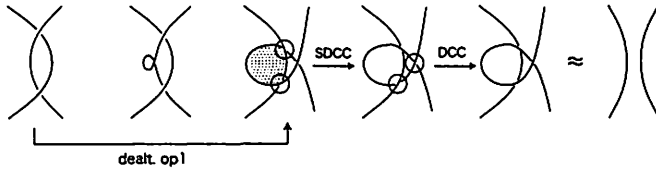


図 21: DCCによってフックをはずす操作を実現

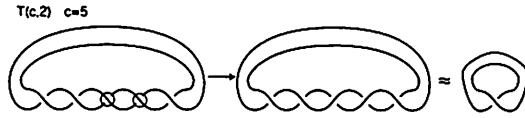


図 22:

ここで、 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ はSDCCを行う回数。

因みに、 $u(T(c,2)) = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ なので、 $u_{SD}(T(c,2)) < u(T(c,2))$ ($c \geq 5$) である。

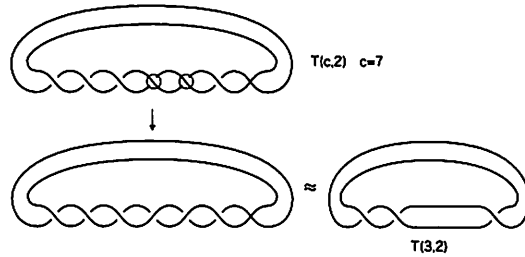


図 23:

定理 10 twist knot with n twist に関して($c = n + 2$),

$u_{SD}(T_w(1)) = 1, u_{SD}(T_w(2)) \leq 2, u_{SD}(T_w(3)) = 1, u_{SD}(T_w(4)) = 1$ で

$u_{SD}(T_w(n)) \leq 1 + u_{SD}(T_w(n-4))$ ($n \geq 5$) である。または

$u_{SD}(T_w(4n)) \leq n, (n \geq 1)$

$u_{SD}(T_w(4n+1)) \leq n+1, (n \geq 1)$

$u_{SD}(T_w(4n+2)) \leq n+2, (n \geq 1)$

$u_{SD}(T_w(4n+3)) \leq n+1, (n \geq 1)$

そして $u_D(T_w(n)) = u(T_w(n)) = 1$ ($n \geq 1$) である。

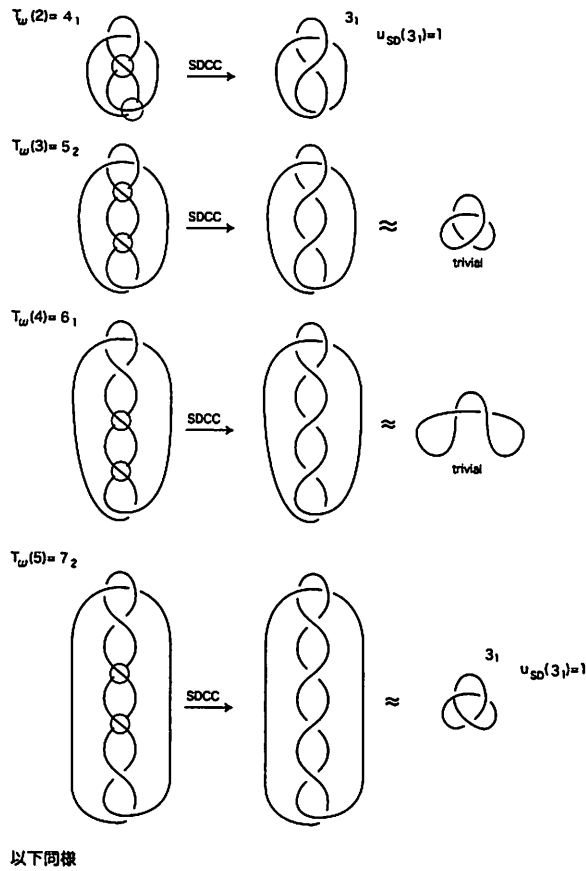


図 24:

5 シート数に制限が無いときの本表現の最小頂点数 v について

この節では本表現における最小頂点数とその結び目が埋め込める向き付け可能な閉曲面の最小種数との関係を調べる。

定理 11 L がタイプ $(c, 2)$ のトーラス絡み目 $T(c, 2)$ 、2以上の *twist* を持つ *twist knot* $T_w(n)$, $(n \geq 2)(c = n + 2)$ のとき、

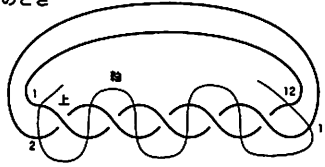
$$v \leq 2c + 2 - 2k$$

また *Pretzel link* $P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ ($r \geq 3, p_i \geq 2$) のとき、 $v \leq 2c + 2 - 2k$ である。

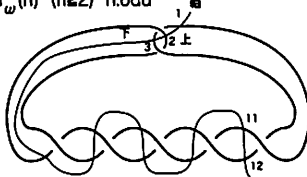
ここで v は L の本表現の最小頂点数、 c は L の最小交差点数、 k は $T(c, 2), T_w(n), P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ が埋め込める向き付け可能な閉曲面の最小種数。従って $T(c, 2), T_w(n), P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ に対し各々 $k = 1, 2, r - 1$ である。

定理の証明。図 25 のように軸 (バインダー) を取ればよい。

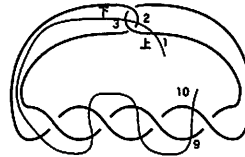
$T(c, 2)$ (c : odd) $c=5$ のとき



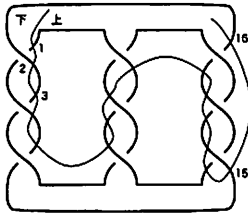
$T_w(n)$ ($n \geq 2$) n : odd



$T_w(n)$ n : even



$P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ r : odd



$P(p_1, p_2, \dots, p_r)$ r : even

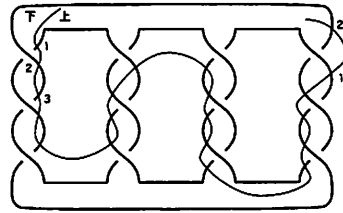


図 25:

予想 4 すべての $link$ に対し $v \leq 2c + 2 - 2k$ である。

[追記] 予想 1 に関しては、その後反例が見つかりました。

参考文献

- [1] Kobayashi, K : Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. 21 (1) (1992) 117-140
- [2] Kobayashi, K : Book presentation and local unknottedness of spatial graph, Kobe J. Math. 10 (1993) 161-171
- [3] Kobayashi, K and Kodate, T : Minimal embedding of complete bipartite graphs on surface, JCCGG 2009 (Kanazawa) 133-134
- [4] ibid: Minimal embedding of hyper cubic graphs on surface, Proc. CGGA 2010 (Tailien) 69-70
- [5] Ringel, G : Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 28 (1965), 139-150
- [6] Ringel, G. and Youngs, J.W. : Solution of the Heawood map-coloring problem, Proc. Nat. Acad.Sci. USA, 60 (1968), 438-445
- [7] Ringel, G.: Map Color Theorem, Springer-Verlag, Berlin, 1974