

Minimal embeddingについて

Kazuaki Kobayashi

Tokyo Womans Christian University

Takako Kodate

Tokyo Womans Christian University

G をグラフとしたとき、 $\gamma(G)$ を G の最小種数とし、
 $\omega(G) = \min\{\Sigma|f(G) \cap l_i| + \Sigma|f(G) \cap m_i|; f : G \rightarrow F_\gamma \text{embedding}\}$ とする。
ここで (l_i, m_i) は向き付け可能な閉曲面 F_γ の longitude, meridian で次を満たす
ものとする。 T_γ を 2-cycle が 2 個、4-cycle $(\gamma - 2)$ 個を持つような図 1 のようなグラ
フで平面 R^2 に埋め込まれているものとする。 $U(T_\gamma) = U(T_\gamma, R^3)$ を T_γ の R^3
における近傍とする。

(1) T_γ の 2-cycle, 4-cycle に interior disjoint に張った γ 枚の disk を $D_1, D_2, \dots, D_\gamma$
とし、 $D_i \cap \partial U(T_\gamma) = l'_i$ とおく。 $F_\gamma = \partial U(T_\gamma)$ とし、 m'_j を $U(T_\gamma)$ 内で disk を
張り、 $|m'_j \cap l'_i| = \delta_{i,j}$ をみたすものとする。

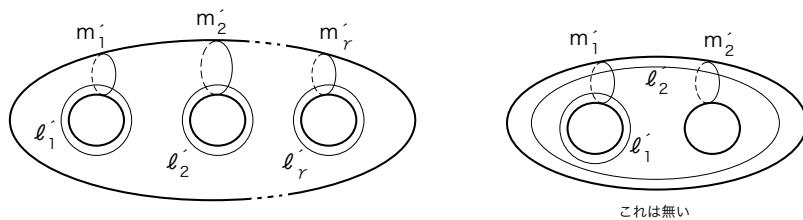


図 1:

(2) $\{l'_1, m'_1, \dots, l'_\gamma, m'_\gamma\}$ を 行列式 が 1 である行列 M_φ で変換したものを
 $\{l_1, m_1, \dots, l_\gamma, m_\gamma\}$ ($l_i = \varphi(l'_i), m_i = \varphi(m'_i)$) とする。更に m_i は $U(T_\gamma)$ で円板を
張り、 l_j は $S^3 - U(T_\gamma)$ で円板を張るものとする。ここで $\varphi : F_\gamma \rightarrow F_\gamma$ は同相写
像である。

定理 1 (小鎌一林[1][2])

(1) n -次元超立方体グラフ Q_n に対し、 $\omega(Q_n) = 8\gamma(Q_n)$ が成立する。ここで $\gamma(Q_n) = (n-4)2^{n-3} + 1$ ([5])

(2) m, n が偶数のとき、完全2部グラフ $K_{m,n}$ に対し、

$\omega(K_{m,n}) = 4\gamma(K_{m,n})$ が成立する。ここで $\gamma(K_{m,n}) = \frac{(m-2)(n-2)}{4}$ (最小種数に関しては m, n が偶数という条件は必要ない) ([3])。 m, n のいずれかが奇数だと self-attachment があり、その時は ω に関し不等号 < が成り立つ。

以下 2,3 の minimal embedding (γ, ω が最小) について述べる。

[I] 完全2部グラフ $K_{4,4}$ は $\gamma = 1, \omega = 4$, H -graph (Hamilton グラフ), Int.doubled linked graph であり、2-appex なので、Int.knotted ではない。また一般に $m \geq n$ のとき、最小シート数 $ms(K_{m,n}) = n$ ただし、 $m \geq n+2$ なら H -graph ではないが、本表現を拡大解釈する。

例

$$K_{4,4}^{(1)} \quad \gamma = 1, \omega = 4$$

$$K_{4,4}^{(2)} \quad \gamma = 1, \omega = 4$$

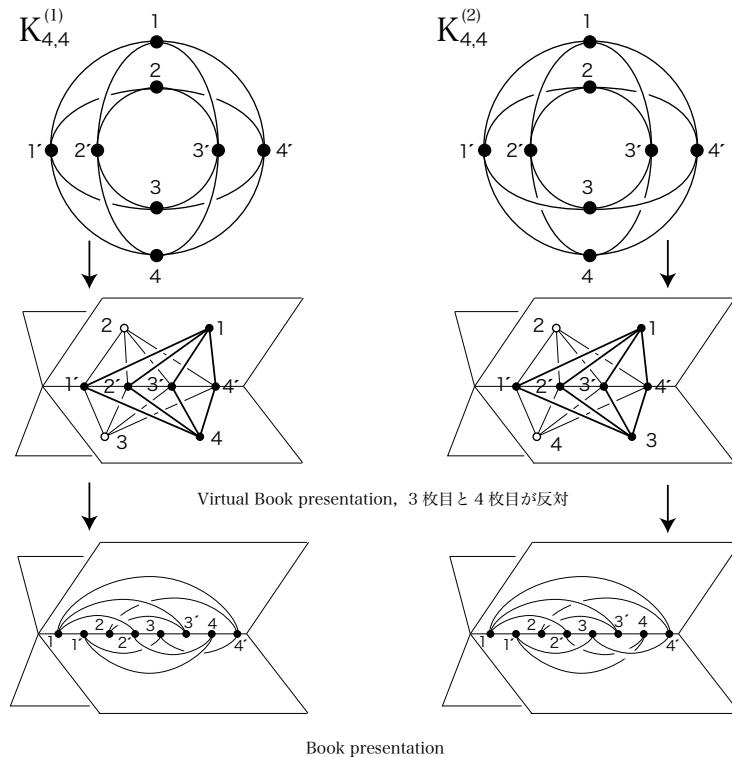


図 2:

$$K_{4,4}^{(3)} \quad \gamma = 1, \quad \omega = 2 + 4 = 6 \qquad \qquad K_{4,4}^{(4)} \quad \gamma = 1, \quad \omega = 2 + 3 = 5$$

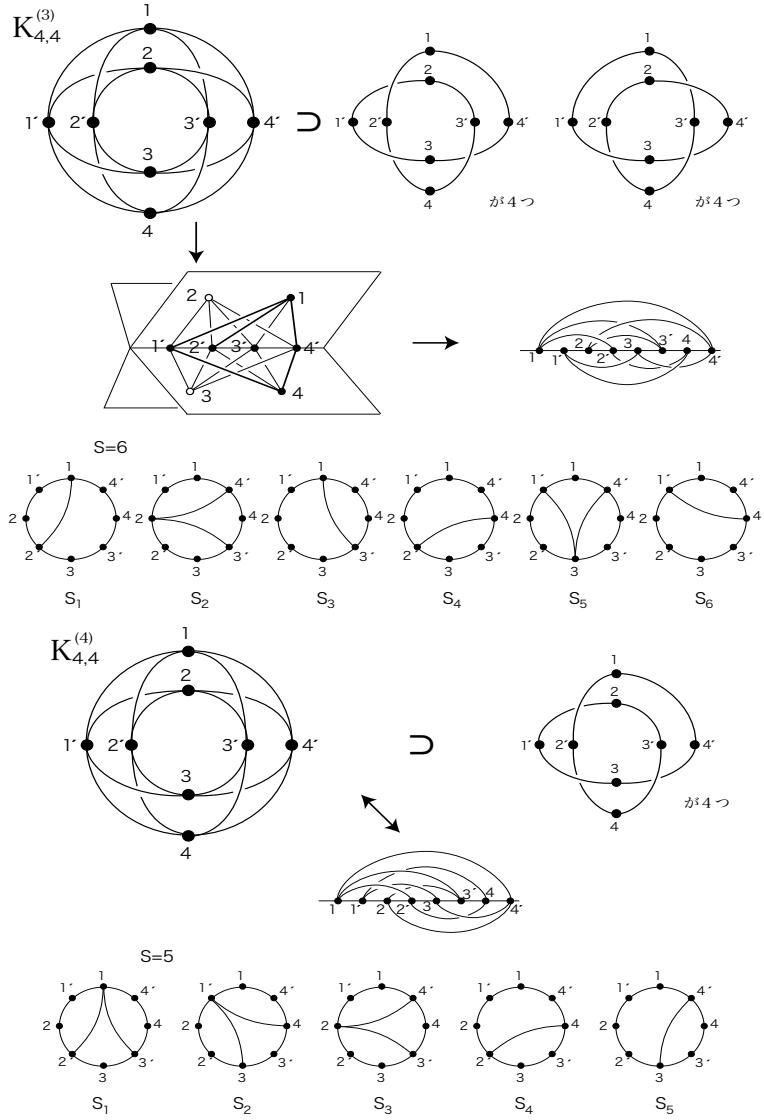


図 3:

$K_{5,4}, K_{6,4}$ の標準形

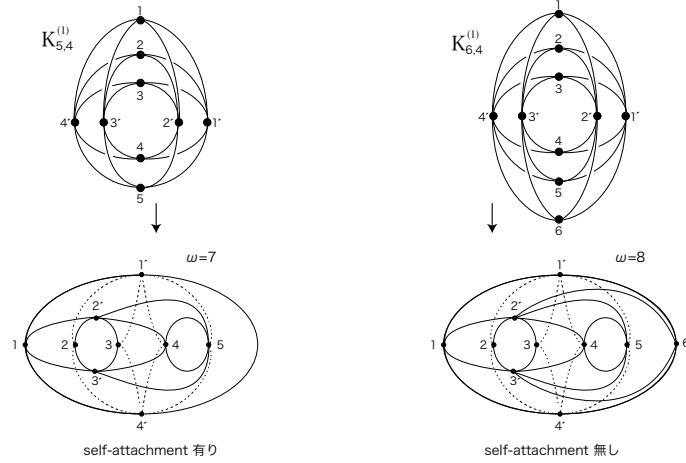


図 4:

[II] Q_4 は $\gamma = 1, \omega = 8, ms = 3, H-graph$ である。一般に $ms(Q_n) = n - 1$

例 $Q_4^{(1)}$ $Q_4^{(2)}$ $Q_4^{(3)}$

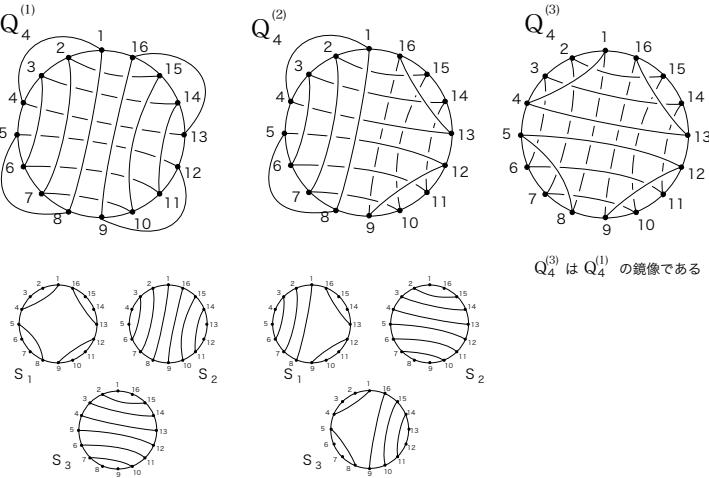


図 5:

結論 $K_{4,4}$, $K_{5,4}$, $K_{6,4}$, Q_4 などの埋め込みについて調べた結果、 $\{\gamma, \omega, ms\}$ だけでは ambient isotopy, mirror image, sheet translation のいずれでも移りあわない例が存在する事がわかった。

さらに細かい不变量を探す必要がある。

- ・蓄表現で円板の内部に含まれる辺の組みに（例 Q_4 で $(6, 6, 4), (6, 5, 5)$ 等）、辞書式順序を入れる。一番大きい順序を標準表現 (standard presentation) と定義する。
- ・蓄表現で円板に含まれる辺のパターン（例 K_n における canonical 表現（大槻））
- ・野田の K_7 の例の γ, ω を調べる。
- ・sheet translation でどれほどの違いが出るのか。
- ・ Q_m と Intrinsic twisted n-lantern の関係はどうか。
- ・ $K_{m,n}$ の Virtual Book 表現に対応するものを Q_n でも探す。

◇ 蓄表現した時の各シート（各円板）の内部に含まれる辺数から作られる組みに対する順序について

G をグラフとする。（H-graph, pseudo graph で無くともよい）

$ms(G) = s$ を蓄表現の最小シート数とする。

自然数の組み (n_1, n_2, \dots, n_s) において

- ・ n_i を i 番目のシートの内部に含まれる辺数とする。
- ・ただし $i < j$ なら $n_i \geq n_j$ となるようにならべておく。
- ・ $\{(n_1, n_2, \dots, n_s)\}_G$ に辞書式順序を入れる。すなわち $N = (n_1, n_2, \dots, n_s)$, $N' = (n'_1, n'_2, \dots, n'_s)$ としたとき、
 $n_1 > n'_1$ なら $N > N'$; $n_1 = n'_1, n_2 > n'_2$ なら $N > N'$ とする。以下同様。
- ・ $\{(n_1, n_2, \dots, n_s)\}_G$ の最大元は standard か？（すなわち最小シート数をもつか？）
- ・もし、standard が複数あれば standard であっても canonical でないものがある可能性が高い。
- ・従って canonical を定義するにはやはりパターンを用いる必要がある。

参考文献

- [1] Kobayashi,K and Kodate,T : *Minimal embedding of complete bipartite graphs on surface*, JCCGG 2009 (Kanazawa) 133-134
- [2] ibid : *Minimal embedding of hyper cubic graphs on surface*, Proc. CGGA 2010 (Tailien) 69-70
- [3] Ringel, G : *Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 28 (1965), 139-150

- [4] Ringel, G. and Youngs, J.W. : *Solution of the Heawood map-coloring problem*, Proc. Nat. Acad.Sci. USA, 60 (1968), 438-445
- [5] Ringel, G.: *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin, 1974