

# $K_{3,3,3}$ と $K_7 - \{ \text{一辺} \}$ の射影内在的性質について

Kazuaki Kobayashi

Tokyo Womans Christian University

Miyuki Okamoto

Department of Mathematics

Nippon Institute of Technology

Akiko Yamazaki

Graduate School of Mathematics

Tokyo Womans Christian University

平成 22 年 1 月 16 日

グラフ  $G$  の内在的性質  $P$  (Intrinsic Property) とは、 $G$  の任意の空間グラフ  $G$  が性質  $P$  をもつ時をいう。

性質  $P$  には平面的、p-link、knot、irreducible split handcuff 等がある。

グラフ  $G$  の射影内在的性質  $Q$  (Projective intrinsic property) とは、 $G$  の任意の射影図  $\bar{G}$  が性質  $Q$  を持つときをいう。

射影内在的性質  $Q$  には、p-link の射影 (p-linkable projection), knot の射影 (knottable projection), irreducible split handcuff graph の射影 (twisted handcuff graph) 等がある。

本論文では  $K_{3,3,3}$  と  $K_7 - \{ \text{一辺} \}$  の持つ射影内在的性質について述べる。

$cr(G)$  でグラフ  $G$  の最小交点数を表すことにする。

グラフの射影図の交点を減らす操作を導入する。(  $[0]$  は多重度を減らす。)

- [0]
- [1]
- [2]
- [3]

図 1 .

[0],[1],[2],[3] を行う事により、射影図は変わるがグラフは変わらない。

次の条件を満たす射影図を単純射影図という。

- (1) 3重以上の多重点は無い。(交点は2重点のみ)
- (2) 同一辺または隣接2辺間に交点は無い。
- (3) 非隣接2辺間に交点はたかだか1つある。

グラフ  $G$  の任意の射影図  $\bar{G}$  から [0] ~ [3] の操作により単純射影図  $\bar{G}^{(0)}$  が作れる。(つまり [1] ~ [3] の操作が出来るという事は交点の数を減らせる事を意味する。) ただし単純射影図  $\bar{G}^{(0)}$  が  $cr(G)$  を表しているとは限らない。

例  $cr(K_4) = 0$

図 2 .

**Proposition 1** グラフ  $G$  の任意の射影図  $\bar{G}$  には、少なくとも  $k = cr(G)$  個の交点  $p_1, p_2, \dots, p_k$  があり、各  $p_s$  を通る2辺の射影  $\bar{e}_i, \bar{e}_j$  は非隣接2辺の射影である。

**Remark 1** 下図のように  $e_1$  と  $e_2$  は非隣接であり、 $e_2$  と  $e_3$  も非隣接であるが、 $e_2$  と  $e_3$  は隣接しており、 $e_1$  上に交点が2点有るという事はある。

図 3 .

**Corollary 1** グラフ  $G$  が非平面グラフのとき、 $G$  の任意の射影図  $\bar{G}$  の中には非隣接2辺で交わるものがある。

Proof of Proposition  $G$  の任意の射影図  $\overline{G}$  を取ったとき、命題のような交点が  $p_1, p_2, \dots, p_l (l < k)$  しかなかったとする。即ち  $p_i (1 \leq i \leq l)$  を通る 2 辺  $\bar{e}_s, \bar{e}_t$  は非隣接 2 辺。すると他の交点  $q_j$  を通る 2 辺  $f_u, f_v$  は同一辺か隣接 2 辺である。いずれの場合も変形 [1],[2],[3] で交点  $q_j$  は無くなり、 $\overline{G}$  から交点が  $p_1, p_2, \dots, p_l (l < k)$  のみからなる  $G$  の射影図  $\overline{G}^{(0)}$  を得るが、これは  $cr(G) = k$  に矛盾する。  $\square$

Proof of Corollary  $G$  は非平面グラフなので  $cr(G) \geq 1$  したがって  $G$  の任意の射影図  $\overline{G}$  は Proposition より 1 個以上の Proposition の性質をみたす交点がある。即ち交点  $p$  で  $p$  を通る 2 辺  $\bar{e}_i, \bar{e}_j$  は非隣接 2 辺である。  $\square$

従って以下非平面グラフの交点を考えるときは特に断らない限り非隣接 2 辺間の交点とする。

**Lemma 1** 射影  $\overline{K_{3,3,3}}$  が下図のような部分射影を含めば  $\overline{K_{3,3,3}}$  は 3-linkable projection を含む。

点線は  $K_{3,3,3}$  の中で joinable な辺を表す。  $\square$

図 4 .

このような交点を 3-linkable crossing という。

**Theorem 1** 完全 3 部グラフ  $K_{3,3,3}$  は 3-link 射影内在的である。 (*Intrinsically 3-linkable*)

証明。  $K_{3,3,3} = K_{A,B,C}$   $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8, 9\}$  とおく。 $K_{3,3,3}$  の任意の射影  $K_{A,B,C}$  の部分射影  $\overline{K_{A,B}}, \overline{K_{B,C}}$  は交点  $p_1, p_2$  を各々含む。ここで  $\bar{e}_1, \bar{e}_2; \bar{e}_3, \bar{e}_4$  は各々非隣接として良い。 $e_1 \sim e_4$  の中に隣接 2 辺 (= 長さ 2 の path) があれば、その path  $V$  の端点  $v_1, v_2$  は  $K_{A,B}, K_{B,C}$  の取り方から  $K_{A,B,C}$  の中で結べる (即ち、 $v_1$  は  $v_2$  は異なる頂点集合に含まれる)。また  $K_{A,B}, K_{B,C}$  の取り方から  $e_1 \sim e_4$  の中に 1 組又は 2 組の隣接 2 辺が必ずある。(つまり、長さ 2 の path が 1 組又は 2 組ある。)

(I)  $e_1 \sim e_4$  の中に長さ 2 の path が 1 組のとき。  $\bigcup_{i=1}^4 \bar{e}_i$  の中に 3-linkable crossing がある。

図 5 .

(II)  $e_1 \sim e_4$  の中に長さ 2 の path が 2 組のとき。  $K_{A,B}, K_{B,C}, K_{C,A} \cong K_{3,3}$  を考える。交点  $p_1 \in \overline{K_{A,B}}, p_2 \in \overline{K_{B,C}}, p_3 \in \overline{K_{C,A}}$  とすると  $(p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_3)$  で 3-linkable crossing が出来ないのは対称性を考えると下図の場合のみ。

図 6 .

$K_{3,3}^{(4)} = K_{\{1,2,3\} \cup \{6,8,9\}}$   $p_4 \in \overline{K_{3,3}^{(4)}}$  とすると、  $p_4 \in \bar{e}_7 \cap \bar{e}_8$  そして  $(e_7, e_8)$  の対は次の 15 通り。

- (1) (16, 28) (2) (16, 29) (3) (16, 38) (4) (16, 39)  
 (5) (18, 26) (6) (18, 29) (7) (18, 36) (8) (18, 39)  
 (9) (19, 26) (10) (19, 28) (11) (19, 36) (12) (19, 38)  
 (13) (26, 38) (14) (26, 39) (15) (28, 36) (16) (28, 39)  
 (17) (29, 36) (18) (29, 38)

$(p_1, p_4), (p_2, p_4), (p_3, p_4)$  で 3-linkable crossing が出来ないのは、(2), (9) のみ。

それ以外に関しては (4) は交点对  $(p_3, p_4)$  で 3-linkable crossing が作れる。その他の場合は  $(p_1, p_3)$  または  $(p_2, p_3)$  で 3-linkable crossing が作れる。

$K_{3,3}^{(5)}$  として  $\{4, 5, 6\}$  を通る直線に関し  $K_{3,3}^{(4)}$  と対称なものとする。  $1 \longleftrightarrow 7, 2 \longleftrightarrow 8, 3 \longleftrightarrow 9, \{4, 5, 6\}$  は不変。  $p_5 \in \overline{K_{3,3}^{(5)}}$  .

$K_{3,3}^{(5)}$  は  $K_{3,3}^{(4)}$  と対称なので  $(p_1, p_5), (p_2, p_5), (p_3, p_5)$  で 3-linkable crossing が作れないものは  $(2)' = (76, 83), (9)' = (73, 86)$  のみである。そこで  $(p_4, p_5)$  を考え、  $\{(2), (9)\} \times \{(2)', (9)'\}$  を調べると 4 通り全てで 3-linkable crossing が作れる。以上より、  $K_{3,3,3}$  は 3 - link 射影内在的である。  $\square$

**Definition 1** グラフ  $G$  の任意の射影図  $\bar{G}$  が *twisted handcuff*  $\bar{H}$  を含むとき、  $G$  は *Intrinsically twisted handcuff* という。ここで  $\bar{H}$  が *twisted handcuff* であるとは、  $\bar{H}$  の lift の中に *irreducible split handcuff* があるときをいう。

7 頂点グラフの射影図において 2 交点 (= 4 辺) から twisted handcuff が構成されるパターン

- 〈1〉      〈2〉      〈3〉  
  
 〈4〉      〈5〉

図 7 .

特長は 〈1〉 は長さ 2 の path を含む。 〈2〉 は長さ 3 の path を含む。  
 〈3〉 は長さ 4 の path を含む。 〈4〉 は長さ 5 の path を含む。 〈5〉 は 1  
 辺上に 2 交点がある、ということである。

〈1〉 ~ 〈5〉 のうち、結び方が一意に決まってしまうのは 〈1〉 のみ、〈5〉 は実  
 線と頂点を結ぶ点線は一意に決まるように見えるが、余分な頂点が 1 つ  
 あるので 2 つの 3 - サイクルの内どちらか適当な方を 4 - サイクルに出  
 来るので一意に決まらず自由度がある。

Twisted handcuff が作れないパターン

図 8 .

**Theorem 2**  $K_7 - (e)$  は *Intrinsically twisted handcuff graph* である。

Proof.  $K_7$  の対称性により、 $e = 17$  としてよい。 $K_7 - (e) > K_{3,3}^{(1)} =$   
 $K_{\{1,2,7\} \cup \{3,4,5\}}$  を取る。任意の射影  $\overline{K_7 - (e)} > \overline{K_{3,3}^{(1)}}$  に含まれる非隣接 2  
 辺  $e_1, e_2$  で交わるものがあり、その交点を  $p_1$  とする。 $K_{3,3}^{(1)}$  の対称性を考  
 えると  $e_1, e_2$  の取り方は次の [A], [B] の 2 つの場合に分けられる。

[A]  $e_1, e_2$  の両端が頂点  $\{1, 7\}$  を含む時。  $e_1 = 14, e_2 = 37$  として良い。  
 $p_1 \in \bar{e}_1 \cap \bar{e}_2$   $K_7 - (e)$  の部分グラフで  $e_1 = \bar{14}$  を含まない非平面グラフ  
 $K_5^{(2)} = [2, 3, 5, 6, 7]$  を考える。 $K_5^{(2)}$  の非隣接 2 辺  $e_3, e_4$  で射影  $\bar{e}_3, \bar{e}_4$  が交  
 わるものがある。その交点を  $p_2$  とする。 $(e_3, e_4)$  となるのは次の 15 通り  
 である。

- (1) (23, 56) (2) (23, 57) (3) (23, 67)

- (4) (25, 36) (5) (25, 37) (6) (25, 67)  
 (7) (26, 35) (8) (26, 37) (9) (26, 57)  
 (10) (27, 35) (11) (27, 36) (12) (27, 56)  
 (13) (35, 67) (14) (36, 57) (15) (37, 56)

2 交点  $(p_1, p_2)$  で twisted handcuff が構成出来るパターン  $\langle 1 \rangle \sim \langle 5 \rangle$  のいずれかのパターンが作れるか否かを調べる。

- (1)  $\langle 1 \rangle$  のパターン (2)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (3)  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (4)  $\langle 1 \rangle$  のパターン (5)  $\langle 5 \rangle$  のパターン (6)  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (7)  $\langle 1 \rangle$  のパターン (8)  $\langle 5 \rangle$  のパターン (9)  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (10)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (11)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (12)  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (13)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (14)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (15)  $\langle 5 \rangle$  のパターン ただし、4 - サイクルを使う。

以上で [A] の場合は twisted handcuff を含むことが示された。

[B]  $e_1$  または  $e_2$  のどちらかの端点のみが 1 または 7 のどちらかのみを使うとき。

$e_1 = 14, e_2 = 25$  として良い。  $p_1 \in \bar{e}_1 \cap \bar{e}_2$   
 $K_7 - \{e\} > K_5^{(2)} = [2, 3, 5, 6, 7] > e_3, e_4$  ( $K_5^{(2)}$  は 14 を含まない 5 頂点完全グラフ)  $p_2 \in \bar{e}_3 \cap \bar{e}_4$  辺対  $(e_3, e_4)$  は [A] の場合と同じ 15 通り。 [A] と同様に twisted handcuff を構成する  $\langle 1 \rangle \sim \langle 5 \rangle$  のいずれかのパターンを作る。

- (1)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (2)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (3)  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (4)  $\langle 5 \rangle$  のパターン (5)  $\langle 5 \rangle$  のパターン (6)  $\langle 5 \rangle$  のパターン  
 (7)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (8)  $\langle 1 \rangle$  のパターン (9)  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (10)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (11)  $e = 17$  を使わないとパターンが作れない  
 (12)  $\langle 2 \rangle$  のパターン (13)  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (14) パターンが作れない。 (15)  $\langle 1 \rangle$  のパターン

つまり (11) と (14) の場合は twisted handcuff を構成するパターンが作れない。

[B - 1] (11), (14) は 3 番目の交点  $p_3$  を必要とするので第 3 の非平面グラフを考える。

$K_7 - (e) > K_5^{(3)} = [1, 3, 4, 5, 6] > e_5, e_6$   $p_3 \in \bar{e}_5 \cap \bar{e}_6$   
 $(e_5, e_6)$  の対は次の 15 通り。

- (1)' (13, 45) (2)' (13, 46) (3)' (13, 56)  
 (4)' (14, 35)' (5)' (14, 36) (6)' (14, 56)

(7)' (15, 34)' (8)' (15, 36) (9)' (15, 46)  
 (10)' (16, 34) (11)' (16, 35) (12)' (16, 45)  
 (13)' (34, 56) (14)' (35, 46) (15)' (36, 45)

(11)-(1)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (11)-(2)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(3)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(4)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (11)-(5)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 5 \rangle$  のパターン  
 (11)-(6)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 1 \rangle$  のパターン  
 (11)-(7)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (11)-(8)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(9)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (11)-(10)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(11)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(12)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (11)-(13)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(14)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (11)-(15)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(1)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(2)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(3)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(4)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(5)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 5 \rangle$  のパターン  
 (14)-(6)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(7)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(8)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(9)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(10)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン  
 (14)-(11)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(12)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(13)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(14)'  $(p_2, p_3)$  で  $\langle 3 \rangle$  のパターン  
 (14)-(15)'  $(p_1, p_3)$  で  $\langle 2 \rangle$  のパターン

以上により、 $K_7 - (e)$  は Intrinsically handcuff である。

## 参考文献

- [1] J. Conway and C.Gordon : Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445-453
- [2] A.DeCelles, J.Foisy, C.Versace and A.Wilson : Intrinsicly linkable and knottable graph, preprint June,2005
- [3] E.Flapan, B.Mellor and R.Naimi : Intrinsic linking and knotting are arbitrarily complex, arXiv : math.GT/6 Jun 2008
- [4] E.Flapan, R.Naimi and J.Pommersheim : Intrinsically triple linked complete graphs, Topology and its appl. 115(2001) 239-246
- [5] K.Kobayashi and M.Okamoto: 完全グラフ  $K_9$  の持つ内在的性質について、Hakone Seminar 2008 vol.24 1-8 (In Japanese)
- [6] R.Nikkuni : An intrinsic non-triviality of graphs, arXiv : math.GT/0804.4229v1.