完全グラフ K_9 の持つ内在的性質について

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University
Miyuki Okamoto
Department of Mathematics
Nippon Institute of Technology

1 Introduction

本稿では９頂点完全グラフ K_9 のもつ内在的性質のうち、Intrinsically containing irreducible split handcuff と Int. 3-linkable について、述べる。まず、irreducible split handcuff graph とは, handcuff graph が含む２つのサイクルが分離しており、その２つのサイクルを分離する３－球面内のどのような２次元球面 S^2 も、その spatial handcuff graph　と２点以上で交わるような spatial handcuff graph のことである。グラフ G が Intrinsically irreducible split handcuff graph とは、G の任意の埋め込み $\tilde{G}$ が irreducible split graph を含んでいる事である。しかし次の命題により、Intrinsically irreducible split handcuff graph は無い事がわかる。

命題 1 任意のグラフ G において、G の任意の *disjoint cycle* C_i, C_j に対し、$lk(f(C_i), f(C_j)) \neq 0$ となる埋め込み $f : G \longrightarrow S^3$ がある。

Theorem 1 (K-O) 完全グラフ K_9 は *Intrisically 3-linked or irreducible split handcuff graph* である。

あるグラフ G が Intrinsically containing irreducible split handcuff graph とは、G の球面 S^2 上への任意のはめ込み（immersion) $\overline{G}$ の空間への持ち上げの中に irreducible split handcuff graph を含む持ち上げが有るときをいう。またあるグラフ G が Intrinsically 3-likable とは、G の球面 S^2 上への任意のはめ込み $\overline{G}$ の空間への持ち上げの中に non-split 3-component link を含む持ち上げが有るときをいう。

Theorem 2 完全グラフ K_9 は *Intrinsically containing irreducible split handcuff graph* である。

証明）空間グラフが irreducible split handcuff graph を含むための十分条件は (Nikkuni[5]) ：

空間グラフ $\tilde{G}$ が次の条件をみたす空間グラフをマイナーに持てば $\tilde{G}$ は irreducible split handcuff graph を含む。

$lk_2(\tilde{C}_1, \tilde{C}_3) \neq 0 \qquad lk_2(\tilde{C}_2, \tilde{C}_4) \neq 0 \qquad lk(\tilde{C}_1, \tilde{C}_4) = 0$

そこでＮｉｋｋｕｎｉ　の判定条件より、グラフ K_9 の射影 $\overline{G}$ が４つの 3-cycle C_1, C_2, C_3, C_4 で次を満たすものを含むものがあればよい。C_1 と C_3 は linkable projection, C_2 と C_4 は linkable projection で $C_1 \cap C_2 =$ １点又は$\emptyset$ $C_3 \cap C_4 =$ １点又は$\emptyset$ を満たす。そこで K_9 の頂点を反時計まわりに $1 \sim 9$ とラベルをつけ $K_6^{(1)} = [123456]$ とする。これは Int. linked なので [C-G], 対称性を考慮すると linkable cycle の射影として

$[I]$ $C_1 =< 123 >,\ C_3 =< 456 >$ としても、一般性を失わない。

$[II]$ $K_6^{(2)} = [156789]$ とする。 $K_6^{(2)} -$ (一辺) も Foisy によって Int. linkable なので $G = K_6^{(2)} - \overline{56}$ とおくと G に含まれる linkable cycle は

(1) $< 157 >,\ < 689 >$　　(2) $< 158 >,\ < 679 >$

(3) $< 159 >,\ < 678 >$　　(4) $< 167 >,\ < 589 >$

(5) $< 168 >,\ < 579 >$　　(7) $< 169 >,\ < 578 >$

このように取ると Nikkuni の判定条件を満たす４つの 3-cycle の列が取れる。
□

Theorem 3 $K_9 - \{3$ 辺$\}$ は *Int. containing irreducible split handcuff grahu* である。

証明）除去すべき３辺のパターンは次の通りである。

図　1

$K_6 - \{$ 一辺 $\}$ は Intrinsically linkable である事を使う。

(1) のとき、$K_9 - \{$ ３辺 $\}$ を次のようにおく。　$K_9 = [123456789]$ として、$G = K_9 - \{$ ３辺 $\}$ 　$= K_9 - \{12,\ 28,\ 29\}$ として、$G_1 = [123456] - 12$ $G_2 = [156789] - 56$ とおく。

$G_1,\ G_2$ 共に $K_6 - \{$ １辺 $\}$ なので Foisy et al. により Int.linkable である。そこで G_1, G_2 ともに linkable cycles を含む。

$[I]$ G_1 では、２つの linkable cycle は $2 \in C_1,\ 1 \in C_3$ となっている。対称性を考えると $C_1 =< 234 >,\ C_3 =< 156 >$ として良い。

$[II]$ G_2 に含まれる disjoint cycles の対は、

(1) $< 157 >,\ < 689 >$ (2) $< 158 >,\ < 679 >$

(3) $< 159 >,\ < 678 >$ (4) $< 167 >,\ < 589 >$

(5) $< 168 >,\ < 579 >$ (7) $< 169 >,\ < 578 >$

（(2),(3),(4) は省略）

(5) のとき、$G = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9] - \{19,\ 28,\ 37\}$ とおく。

$[I]$ $G_1 = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6] - \{12\}$ とおくと、G_1 は $K_6 - \{$ １辺 $\}$ は Int. linkable. 対象性を考慮すると $C_1 =< 134 >,\ C_3 =< 256 >$ として良い。 （C_1, C_3 を決めた後で G_2 を決める。

$[II]$ $G_2 = [4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9] - 56$ とおくと G_2 は $K_6 - \{$ 一辺 $\}$ は Int. linkable である。G_2 に含まれる disjoint cycles の対は

(1) $< 457 >,\ < 689 >$ (2) $< 458 >,\ < 679 >$

(3) $< 459 >,\ < 678 >$ (4) $< 467 >,\ < 589 >$

(5) $< 468 >,\ < 579 >$ (7) $< 469 >,\ < 578 >$ □

次に、完全グラフ K_9 は Intrinsically 3-linkable である事を示す。あるグラフ G が Intrinsically 3-linkable graph とは、G の球面 S^2 上への任意のはめ込み（immersion）$\overline{G}$ の空間への持ち上げの中に non-split three component link を含むものが少なくとも１つ有るときをいう。

射影図の基本変形、次の射影図の変形を基本変形という。

図 2

射影図でもうこれ以上基本変形のできない図を単純図という。

Remark 1 グラフの最小交点数を表している図は単純図であるが、単純図が最小交点数を表しているとは限らない。

命題 2 グラフ G の任意の射影図を $\bar{G}$ とし、$\bar{G}$ がら得られる単純図を $\bar{G}^{(0)}$ とする。$\bar{G}^{(0)}$ が *3-linkabke projection* なら $\bar{G}$ も *3-linkabke projection* である。

Remark 2 命題の逆は成立しない

Lemma 1 完全グラフ K_6 の最小交点数を表現している射影図 $\bar{K}_6$ においては、一辺上に２交点が有る事は無い。

証明。もし2交点が一辺上にあるとすると $cr(K_6) > sk(K_6)$ (skewness) となる。ところがもし $sk(K_6) = 2$ なら2辺 e_1, e_2 で $G = \bar{K}_6 - \{\bar{e}_1, \bar{e}_2$ が平面グラフとなるものがある。$|V(G)| = 6, |E(G)| = 13, |R| \leq \frac{2}{3}|E|$ である。これはオイラーの公式に矛盾する。　　$\square$

Theorem 4 完全グラフ K_9 は *Intrinsically 3-linkable* である。

Remark 3 (F-N-P) K_9 は *Intrinsically 3-linked* ではない。K_{10} は *Intrinsically 3-linked* グラフである。

証明。命題より、特に断らない限り射影図は単純図であると仮定してよい。[F-N-P] より空間グラフ $\tilde{K}_9$ における3ーサイクル $\tilde{C}$ の状況は次の4ー通りである。

$[I]$ $\tilde{C}$ は $\tilde{K}_9$ 内の $\tilde{C}$ と disjoint なすべての3ーサイクルと mod 2 linking number が1である。

$[II]\tilde{C}$ は $\tilde{K}_9$ 内の3ー成分 link の1つの成分である。

$[III]\tilde{C}$ は $\tilde{K}_9$ 内の丁度6個の3ーサイクルと mod 2 linking number が1であり、この6個の3ーサイクルは次の形をしている。

頂点 $p,\ q,\ r,\ x_i(i = 1, 2, 3) \in V(K_9) - V(C)$ が存在して、$pqx_i,\ prx_i(i = 1, 2, 3)$ と書ける。

$[IV]\tilde{C}$ は $\tilde{K}_9$ 内の丁度4個の3ーサイクルと mod 2 linking number が1であり、この4個の3ーサイクルは次の形をしている。

頂点 $p,\ q,\ x_i(i = 1, 2, 3, 4) \in V(K_9) - V(C)$ が存在して、$pqx_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ と書ける。

上記 $[I]$, $[II]$ の場合は $\tilde{K}_9$ の射影 $\bar{K}_9$ は 3-linkable projection である。そこで以下 $[III]$, $[IV]$ の場合を考える。

$[III]\tilde{K}_9$ 内の3ーサイクル $\tilde{C}$ が $[III]$ の場合。

K_9 の対称性から $C =< 123 >, p = 5, q = 4, r = 6, x_i = 7, 8, or 9$ として良い。C と link する6つの3ーサイクルを $D_1, D_2, ..., D_6$ とおく。$[4, 5, 6, 7, 8, 9] \cong K_6$ なので、非隣接辺の3対 $e_1, e_2; e_5, e_4; e_5, e_6$ で $\bar{e}_1 \cap \bar{e}_2 \neq \emptyset, \bar{e}_3 \cap \bar{e}_4 \neq \emptyset,\ \bar{e}_5 \cap \bar{e}_6 \neq \emptyset$ となるものがある。lemma より、この3つの交点のどの2つも一辺の上に無いとして良い。

Case 1. $e_1 = pq$ または pr のとき。$e_1 \subset C_1,\ e_2 \subset C_2$ で C_1 と C_2 は disjoint なサイクルというものがある。$e_1 = pq$ のときは $C_1 =< pqx_1 >, C_2 =< rx_2x_3 >$ である。また $e_1 = pr$ のとき $C_1 =< prx_1 >, C_2 =< qx_2x_3 >$ とお

くと、$\bar{C}\cap\bar{C}_1\neq\emptyset$ また $\bar{e}_1\cap\bar{e}_2\neq\emptyset$ より、 $\bar{C}_1\cap\bar{C}_2\neq\emptyset$ よって、$\bar{C}\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-linkable projection である。

Case 2. $e_1\notin E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ かつ $e_2\notin E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ のとき。$|E(K_6)|=15,\ |E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)|=11$ であり、その差の 4 辺は $46,78,89,79$ である。$e_1=46, e_2=79$ として一般性を失わない。$e_1\subset C_1,\ e_2\subset C_2$ となる disjoint cycle として $C_1=<456>$, $C_2=<789>$ とすると $\bar{e}_1\cap\bar{e}_2\neq\emptyset$ なので $\bar{45}\cap\bar{79}\neq\emptyset$ 又は $\bar{56}\cap\bar{79}\neq\emptyset$ つまり Case 1 が起こっている。(45 又は 56 をあらためて e_1 と考える。)従って $barC\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-linkable projection である。

Case 3. $e_1\in E(\bigcup_{i=1}^6)$ かつ e_1 は pq でも pr でもないとき、(つまり、$e_1=px_i,\ qx_i$ または rx_i という形をしている。)

(1) e_2 の端点が p,q,r のうち 1 点のみを使っているとき。$e_1\subset C_1,\ e_2\subset C_2$ となる disjoint cycle $C_1,\ C_2$ は C と link する $D_1,...,D_6$ のいづれかと出来るので $\bar{C}\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-likable projection である。

(2)$e_1=px_i,\ e_2=qr$ のとき ($\longrightarrow e_1\in E(\bigcup_{i=1}^6,\ e_2\notin E(\bigcup_{i=1}^6 D_i))$ このときは $e_3,\ e_4$ を考える。$e_3\in E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ または $e_4\in E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ のとき、Case 1 または Case 3 (1) が起こるので、$\bar{C}\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-linkable projection である。($e_1,e_2;e_3,e_4$ が共に Case 3 (2) と言う事はない。$e_3\notin E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ かつ $e_4\notin E(\bigcup_{i=1}^6 D_i)$ のときは、Case 2 が起こる。

$[IV]$ K_9 内の 3-cycle C_1 が $[IV]$ のとき。$C_1=<123>, p=4, q=5, x=6,7,8$ 又は 9 としてよい。$G:=[456789]\cong K_6$ なので、非隣接辺の 3 対 $e_1,e_2;e_3,e_4;e_5,e_6$ で $\bar{e}_1\cap\bar{e}_2\neq\emptyset,\ \bar{e}_3\cap\bar{e}_4\neq\emptyset,\ \bar{e}_5\cap\bar{e}_6\neq\emptyset$ となるものがある。

Case 1. $e_1=pq$ 又は $e_1=px_i$ で e_2 の端点が q とは異なるとき。$e_1\subset C_1$ となる 3-cycle を $C_1=pqx_1$ とし、$e_2\subset C_2$ となる 3-cycle を $4\sim 9$ の C_1 とは異なる頂点を持つ 3-cycle とすると、$\bar{C}\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-linkable projection である。

Case 2. $e_1=px_1,\ e_2=qx_2$ のとき。つまり、$e_1\subset C_1,\ e_2\subset C_2,\ \bar{C}_1\cap\bar{C}_2=\emptyset$ となる $C_1,\ C_2$ の辺の中に pq は無いということ。$[456789]\cong K_6$ の対称性を考えると $\{6,7,8,9\}$ から 2 頂点を取り出し、$p=4$ と $q=5$ で $C_1,\ C_2$ を構成していると考えればよい。

(1) $\bar{C}\cap\bar{pq}\neq\emptyset$ のとき、$\bar{e}_1\cap\bar{e}_2=v$ とおくと、$\bar{C}$ は 3 角形 $\overline{pqv}$ と交わる。従って $\bar{C}\cap\overline{px_1}\neq\emptyset$ 又は $\bar{C}\cap\overline{qx_2}\neq\emptyset$ よって 、$\bar{C}\cup\bar{C}_1\cup\bar{C}_2$ は 3-linkable projection である。

(2) $\bar{C}\cap\overline{pq}=\emptyset$ のとき。$\bar{C}$ は $\overline{pqx_i}$ $(x_i=6,7,8or9)$ と交わっているから、

$\bar{C}\cap\bar{46}\neq\emptyset,\ \bar{C}\cap\bar{56}\neq\emptyset \quad (a)$

$\bar{C} \cap \bar{47} \neq \emptyset,\ \bar{C} \cap \bar{57} \neq \emptyset \quad (b)$
$\bar{C} \cap \bar{48} \neq \emptyset,\ \bar{C} \cap \bar{58} \neq \emptyset \quad (c)$
$\bar{C} \cap \bar{49} \neq \emptyset,\ \bar{C} \cap \bar{59} \neq \emptyset \quad (d)$

そこで $C_1 =< px_1x_3 >,\ C_3 =< qx_2x_4 >$ とおくと、$\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \neq \emptyset$ かつ $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{6, 7, 8, 9\}$ と $(a) \sim (d)$ より、 $\bar{C} \cap \bar{C}_1 \neq \emptyset$ かつ $\bar{C} \cap \bar{C}_2 \neq \emptyset$ ゆえに $\bar{C} \cup \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 \neq \emptyset$ は 3-linkable projection になる。

参考文献

[1] J. Conway and C.Gordon : Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445-453

[2] A.DeCelles, J.Foisy and C.Versace : Intrinsiccally linkable and knottable graph, preprint June,2005

[3] E.Flapan, R.Naimi and J.Pommersheim : Intrinsically triple linked complete graphs, Topology and its appl. 115(2001) 239-246

[4] K.Kobayashi and M.Okamoto: The complete graph K_9 is intrinsically 3-linked or irreducible split handcuff graph, prepint.

[5] R..Nikkuni:An intrinsic non-triviality of graphs, arXiv : math.GT/0804.4229v1.