(non-planar) グラフの minimal embedding について

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

平成 19 年 12 月 30 日

1 Introduction

結び目、絡み目の場合の自明な結び目、自明な絡み目と同様 planar graph には plane graph という ”標準形 ”がある。そこで non-planar graph の ”標準形 ”をどのように定義したら良いかを考えた。まず現在までの non-planar グラフに対する ”標準形 ”の定義の試みを以下に記します。

Book presentation with minimal sheet number(Standard book presentation(小林）)[2], Canonical bud presentation（大槻）[1]

Trivial embedding(小沢）[4] 、Primitive embedding （小沢ー堤）[5]

Maximum flat embedding （新庄）[8]

しかし、これらは適用される (non-planar) graph が特別なグラフか条件が弱くて”標準形 ”と呼ぶにはふさわしくない等不完全であった。以下で述べる (non-planar) graph の minimal embedding という概念は非平面グラフの ”標準形 ”に適したものであると今のところ考えられる。

なお、本論文は２００７年８月の北見セミナ、１２月の上智セミナで話しをした事も合わせて記す事にします。

2 定義と定理

Definition 1 G をグラフとし、$\gamma(G)$ を G の種数とする。F_k $(k = \gamma(G))$ を S^3 内の向き付け可能な種数 k の閉曲面で S^3 の種数 k の *Heegaard* 曲面となっているものとする。$\{l_i, m_i\}_{1\leq i\leq k}$ を F_k の $H_1(F_k, \mathbf{Z})$ の基としての *longitude, meridian curves* で F_k が *bound* している一方のハンドル体で *longitude* は円

板を張り,$meridian$ も他方のハンドル体で円板を張っているものとする。（シンプレックティック基になっている必要はない。）$f : G \longrightarrow F_k$ を埋め込みとし、$\omega(G) = min_{f,\{l_i,m_i\}}\{\sum_{i=1}^{k}|f(G)\cap l_i| + \sum_{i=1}^{k}|f(G)\cap m_i|\}$ とする。ただし、l_i, m_i は $f(G)$ の頂点を通るものとするが $l_i \cap m_i$ は $f(G)$ の頂点とは交わらないものとする。　もし $l_i \cap m_i$ が $f(G)$ の頂点とまじわるときは、そこは交点数は２と数える。

Definition 2 埋め込み $f : G \longrightarrow F_k$ が $(\gamma(G), \omega(G))$ を実現しているとき、f を G の極小埋め込み（*minimal embedding)* という。

（注）いくつかのグラフ G の種数 $\gamma(G)$ についてはグラフ理論の方でわかっている。

$\gamma(K_n) = \{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\}$, 　　$\{\ \}$ は切上げ関数

$\gamma(K_{m,n}) = \{\frac{(m-2)(n-2)}{4}\}$

$\gamma(Q_n) = 1 + (n-4)2^{n-3}$

ただし、$\gamma(Q_n)$ は幾何学的に証明しているが $\gamma(K_n)$, $\gamma(K_{m,n})$ は循環 (rotation) という概念を使い、最大循環（＝循環から導かれる回路の個数が最大のもの）ρ を見つけ、その回路数を $r(\rho)$ としたとき $|V| - |E| + r(\rho) = 2 - 2\gamma(G)$ と言う式から $\gamma(G)$ を決めているので $\omega(Q_n)$ を求めるときと違い $G \subset F_\gamma$ の埋め込みの状況がわからない。$\omega(G)$ について得られた結果は次のとおりである。

Theorem 1 *(1)* $\omega(Q_n) \leq 8\gamma(Q_n)$ *(*北見セミナ２００７）

(2) $k = 4, 6$ のとき、$\omega(K_{2s,k}) \leq 4\gamma(K_{2s,k})$ *(*箱根セミナ２００７）

証明。以下の図１、　図２から明らかである。

図　　1

図　　2

予想。 m, n が共に偶数のとき、 $\omega(K_{m,n}) \leq 4\gamma(K_{m,n})$

「m,n が共に偶数」と言う以外の場合について、m,n が小さいところを調べる事と $K_{p,q},\ K_{s,t}$ がわかっているとき、$K_{m,n}\ (m>p,s;n>q,t)$ の作り方を以下に述べる。

$G=K_{3,3}$ のとき、$\gamma(K_{3,3})=1,\ \omega(K_{3,3})=2,\ gvsk(K_{3,3})=1$
($gvsk(G)$ については次の定義を参照)

$G=K_{4,3}$ のとき、$\gamma(K_{4,3})=1,\ \omega(K_{4,3})=2,\ gvsk(K_{4,3})=1$

図　　3

$G=K_{5,3}$ のとき、$\gamma(K_{5,3})=1,\ 4\geq\omega(K_{5,3})\geq 2,\ gvsk(K_{5,3})=1$
(以下の命題 2 より $\omega(K_{5,3})=4$)

図　　4

$G=K_{4,4}$ のとき、$\gamma(K_{4,4})=1,\ gvsk(K_{4,4})=2,\ 4\geq\omega(K_{4,4})\geq 4$

図　　5

$G=K_{6,3}$ のとき、 $\gamma(K_{6,3})=1,\ gvsk(K_{6,3})=1,\ 4\geq\omega(K_{6,3})\geq 2$
(以下の命題 2 より $\omega(K_{6,3})=4$)

図　　6

$G=K_{6,4}$ のとき、$\gamma(K_{6,4})=2,\ gvsk(K_{6,4})=1,\ 8\geq\omega(K_{6,4})\geq 4$
(以下の命題 2 より $\omega(K_{6,4})=8$)

図　　7

完全 2 部グラフの構成

完全 2 部グラフ $K_{p,r}$ と $K_{q,r}$ を用意する。$V(K_{p,r})=V_1\cup V_2,\ V(K_{q,r})=$

$V_1' \cup V_2'$ とおく。ただし $|V_1| = p, |V_1'| = q, |V_2| = |V_2'| = r$ とする。　頂点 $u \in V_1, v \in V_1'$ を取る。したがって $deg\{u\} = deg\{v\} = r$.
近傍を $N(u) = \{u_1, u_2, u_r\},\ N(v) = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ とおく。
$G = (K_{p,r} - \{u\}) \cup (K_{q,r} - \{v\}) \cup \bigcup_{i=1}^{r} e_i$ とおく。ただし、$\partial e_i = u_i \cup v_i$ 、すると
$G/\{e_1, e_2, ..., e_r\} \cong K_{p+q-2,r}$ である。このとき、$K_{p,r} \diamondsuit K_{q,r} = K_{p+q-2,r}$ とかく。
$K_{p,r} \subset F_\alpha,\ K_{q,r} \subset F_\beta$ ならば $K_{p+q-2,r} \subset F_{\alpha+\beta}$ である。従って $\gamma(K_{p+q-2,r}) \leq \gamma(K_{p,r}) + \gamma(K_{q,r})$.

$K_{p,r} \diamondsuit K_{q,r} = K_{p+q-2,r}$

$\gamma(K_{m,3})$ $(m = 3, 4, 5, 6)$ と $\gamma(K_{4,4})$ がわかったとする。すると上式より、$K_{n-1,6} \diamondsuit K_{3,6} = K_{n,6}$ より $\gamma(K_{n,6})$ がわかる。(n に偶奇の制限なし)。
更に $K_{m-4,n} \diamondsuit K_{6,n} = K_{m,n}$ より $\gamma(K_{m,n})$ がわかる。

次に $\omega(G)$ の下限について述べる。昨年の箱根セミナ２００６において以下のように下限を述べておいた ([3])。

Definition 3 グラフ G を平面グラフにするために除去すべき辺の最小本数を *skewness*（ねじれ）といい、*sk(G)* とかく。
グラフ G を平面グラフにするために除去すべき頂点の最小個数を *vertex skewness*（頂点ねじれ）といい、*vsk(G)* とかく。
グラフ G の種数を１つ下げるために除去すべき辺の最小本数を *generalized skewness*（一般化されたねじれ）といい、*gsk(G)* とかく。
グラフ G の種数を１つ下げるために除去すべき頂点の最小個数を *generalized vertex skewness*（一般化された頂点ねじれ）といい、*gvsk(G)* とかく。

命題 1 G をグラフとする。$f : G \longrightarrow F_\gamma \subset \mathbf{S}^3$ が *minimal embedding* ならば、任意の i に対し $|f(G) \cap l_i| \geq gvsk(G)$ かつ $|f(G) \cap m_i| \geq gvsk(G)$ である。従って $\omega(G) \geq 2\gamma \cdot gvsk(G)$

証明。もし、$|f(G) \cap l_i| < gvsk(G)$ または、$|f(G) \cap m_i| < gvsk(G)$ という i があったとすると、たとえば $|f(G) \cap l_i| < gvsk(G)$ とし、$t = |f(G) \cap l_i|$ とする。G の頂点 $v_1, v_2, \dots v_t$ で $\{G \cap l_i\} \subset \bigcup_{j=1}^{t} v_j$ となるものがある。l_i に円板を張って surgery することにより F_k より種数が１小さい F_{k-1} に $H := G - \bigcup_{j=1}^{t} v_j$ は埋め込める。$t < gvsk(G)$ だから、これは矛盾である。

C をグラフ G に含まれる回路とし、C が向き付け可能な閉曲面 G_γ に含まれているとする。C が F_γ で下図のような領域 R を bound しているとき、C（または R）は self-attachment を持つという。

図　　8

命題 2 $G \subset F_\gamma$ とする。*(*$\gamma = \gamma(G)$*),* G によって分割される F_γ の各閉領域が *self-attachment* を持たないなら $\omega(G) \geq 4\gamma(G)$ である。

証明。各閉領域は self-attachment を持たないので、その境界は F_γ で null homotopic な単純閉曲線であり、longitude, meridian も単純閉曲線なので少なくとも 2 点の交点をもつ。従って結果が得られる。

Remark 1 γ は G の種数なので埋め込み $f(G) \subset F_\gamma$ は *2-cell embedding* になっている。すなわち $F_\gamma - G$ の各連結成分は開円板に同相である。

Remark 2 種数が大きいときは命題 1 より命題 2 の方が下限として有効である。

Corollary 1 $k = 4, 6$ のとき、$\omega(K_{2s,k}) = 4\gamma(K_{2s,k})$ である。

証明。定理 (2) と上の命題 2 から明らか。

参考文献

[1] T.Endo and T.Otsuki : Notes on spatial representations of graphs, Hokkaido Math. J. **23** (3) (1994) 383-398

[2] K. Kobayashi : Standard spatial graphs, Hokkaido Math. J. **21** (1) (1992) 117-140

[3] K. Kobayashi and R.Nikkuni : Planar graph の正則射影図に関する諸性質の non-planar graph への拡張について　箱根セミナ 2006

[4] T. Otsuki : Knots and links in certain spatial complete graphs, Master Thesis, Waseda Univ. (1994)

[5] M.Ozawa and Y.Tsutsumi : Primitive spatial graphs and graph minors. to appear Rev. Math. Compl.

[6] Robertson,N.,Seimour,P. and Thomas,R.: Sacks' linkless embedding conjecture, J. Comb.Theory Ser.B 64(1995) 185-227

[7] Sacks, H. : On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs - an open problem, Lecture Note in Math. vol. 1018 Springer Verlag (1983) 230-241

[8] R.Shinjo : Bounding disks to a spatial graphs, J.Knot Theory Ramif, to appear