Planar graph の正則射影図に関する諸性質の non-planar graph への拡張について

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University
Ryo Nikkuni
Department of Mathematics, Faculty of Education
Kanazawa University

平成 18 年 12 月 20 日

1 Introduction

結び目、絡み目の場合の自明な結び目、自明な絡み目と同様 planar graph には plane graph という ”標準形 ”があって、それを基準として planar graph の正則射影に対し、Knotted projection, Trivializable graph, Identifiable projection, Completely distinguishable projection (CDP), Minimally knotted graph (Minimally knotted projection) 等等を谷山、新國、堤等が中心になって研究してきた。[2],[4], [5], [6],[7],[15],[14],[16]
一方 non-planar graph の ”標準形 ”を見つけようとする研究も別ルートで続けられて来た。
Book presentation with minimal sheet number(Standard book presentation(小林）)[3], Canonical bud presentation（大槻）[1],[8]
Trivial embedding 、Primitive embedding （小沢ー堤）[9]
Maximum flat embedding （新庄）[13]
しかし、これらは適用される (non-planar) graph が特別なグラフか条件が弱くて”標準形 ”と呼ぶにはふさわしくない等不完全であった。しかし以下で述べる (non-planar) graph の minimal embedding という概念は非平面グラフの ”標準形 ”に適したものであると考えられる。
そこで plane graph を基準とした planar graph の正則射影の特徴的な性質を minimal embedding を基準とした non-planar graph へ拡張してみようとい

うのが今回の話です。

2　定義と定理

　先ず planar graph の場合にいくつかの定義をします。グラフ G の正則射影図 $\hat{G}$ の交点に上下の情報を与えて得られる空間グラフを $\hat{G}$ を持ち上げて得られた空間グラフということにする。これは $2^{\hat{G}\text{の交点数}}$ 個ある。

Definition 1 G を *planar graph* とし、G の平面への正則射影図 $\hat{G}$ とする。$\hat{G}$ を持ち上げて得られるどの空間グラフも *plane graph* に *ambient isotopic* でないとき、その正則射影図 $\hat{G}$ を *knotted projection* と呼ぶ事にする。

Definition 2 *knotted projection* を持たないグラフを *trivializable graph* という。

Proposition 1 （谷山）*trivializable* という性質はマイナーによって閉じている（即ちグラフ G が *trivializable* で H が G のマイナーなら H も *trivializable)*

　Trivializable という性質に関する禁止グラフの集合を $\Omega(\mathcal{T})$ とする。現在 17 個の $\Omega(\mathcal{T})$ の元 $G_1 \sim G_{17}$ が知られている (図１)。

図　1

上の概念を非平面グラフに拡張する事を考える。

Definition 3 G をグラフとし,$\gamma(G)$ を G の種数とする。F_k $(k = \gamma(G))$ を向き付け可能な種数 k の閉曲面とする。$\{l_i, m_i\}_{1 \leq i \leq k}$ を F_k の $H_1(F_k, \mathbf{Z})$ の基としての標準的な *longitude, meridian curves* とする。$\hat{f} : G \longrightarrow F_k$ を埋め込みとし、$min(G) = min_{\hat{f}}\{\sum_{i=1}^{k} |\hat{f}(G) \cap l_i| + \sum_{i=1}^{k} |\hat{f}(G) \cap m_i|\}$ とする。ただし、$l_i,\ m_i$ は $\hat{f}(G)$ の頂点を通っても良いが、$l_i \cap m_i$ は $\hat{f}(G)$ とは交わらないとする。もし、$l_i \cap m_i$ と $\hat{f}(G)$ とが交わるときは、そこは交点数は 2 と数える。

Remark 1 $min(G)$ を定義するのに l_i, m_i が $\hat{f}$ の頂点を通っても良いとする理由。もし l_i, m_i が $\hat{f}$ のみと交わるとすると、次の例（図２）のようにグラフ G より、そのマイナーグラフ H の方が min が大きくなるものがあるから（$min(G) \leq min(H)$）である。図２－１は共に完全グラフ K_5 から導かれた物で $\gamma(K_5) = 1,\ min(K_5) = 2$ である。図２－２は単純グラフで $min(G) \leq min(H)$ となる例である。

図　２.

Definition 4 G の空間グラフ $f : G \longrightarrow \mathbf{S}^3$ （または $\tilde{G} = f(G)$ ）が *minimal embedding* とは、次を満たす埋め込み $f : G \longrightarrow F_k \subset \mathbf{S}^3 (k = \gamma(G))$ があるときを言う。

(1) $f(G) \approx \tilde{G}$ *(ambient isotopic)*

(2) $\hat{f}(G)$ は $min(G)$ を実現している。

Definition 5 *グラフ G を平面グラフにするために除去すべき辺の最小本数 .....skewness ; sk(G)*　　（これが元来の *skewness* です）

グラフ G を平面グラフにするために除去すべき頂点の最小個数 *.....vertex skewness ; vsk(G)*

グラフ G の種数を１つ下げるのに除去すべき辺の最小本数 *.....generalized skewness ; gsk(G)*

グラフ G の種数を１つ下げるのに除去すべき頂点の最小個数 *.....generalized vertex skewness ; gvsk(G)*

Example 1 $vsk(K_5) = gvsk(K_5) = 1,\ vsk(K_6) = gvsk(K_6) = 2$ である。一方 $sk(K_5) = gsk(K_5) = 1,\ sk(K_6) = gsk(K_6) = 3$ である。

Theorem 1 G をグラフとする。$\hat{f} : G \longrightarrow F_k \subset \mathbf{S}^3 (k = \gamma(G))$ が *minimal embedding* ならば　任意の i に対し $|\hat{f}(G) \cap l_i| \geq gvsk(G)$ かつ $|\hat{f}(G) \cap m_i| \geq gvsk(G)$ である。従って $min(G) \geq 2k \cdot gvsk(G)$

証明。もし、$|G \cap l_i| < gvsk(G)$ または、$|G \cap m_i| < gvsk(G)$ という i があったとすると、たとえば $|G \cap l_i| < gvsk(G)$ とし、$t = |G \cap l_i|$ とする。

$\hat{f}(G)$ と l_i の交わりは $\hat{f}(G)$ の頂点としてよい。$\hat{f}(G)$ の頂点 $v_1, v_2, \ldots v_t$ で $G \cap l_i \subset \bigcup_{i=1}^{t} v_i$ となるものがある。l_i に円板を張って surgery することにより F_k より種数が１小さい F_{k-1} に $H := G - \bigcup_{i=1}^{t} v_i$ は埋め込める。$t < gvsk(G)$ だから、これは矛盾である。

予想　G をグラフとする。$\hat{f} : G \longrightarrow F_k \subset \mathbf{S}^3 (k = \gamma(G))$ が minimal embedding ならば　任意の i に対し $|\hat{f}(G) \cap l_i| = gvsk(G)$ かつ $|\hat{f}(G) \cap m_i| = gvsk(G)$ である。従って $min(G) = 2k \cdot gvsk(G)$

Corollary 1 上の定理において $G = K_n$ （完全グラフ）のとき、$n \leq 7 (\longleftrightarrow \gamma(K_n) \leq 1)$ に対しては $min|K_n \cap l| = gvsk(K_n), min|K_n \cap m| = gvsk(K_n)$ が成立している。

Remark 2 $gsk(K_n)$ に関しては、*H.Pahling* の次の結果がある。*[10]*
$\mu_k(G) :=$ *minimum number of edges whose removal makes* G *embeddable in* F_k としたとき、

$$\mu_k(K_n) :\geq \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} - 6k$$

等号は F_k が n 個の頂点の三角形分割を持つとき成立。

Definition 6 $n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し、G が $(n,k) - minimalizable$ とは、次の *(1), (2), (3)* のいずれかを満足することである。（箱根セミナー *2006* で次の命題に関し、石井さんに注意されましたので、この *minimalizable* の定義を大きく変えました。）

1. $\gamma(G) < n$
2. $\gamma(G) = n$ でかつ $min(G) < k$ 又は
3. $\gamma(G) = n$ でかつ $min(G) = k$ かつ G の任意の正則射影図 $\hat{f}$ は *minimal embedding* に持ち上げ可能である。

Remark 3 *minimalizable* の定義に２つのパラメータ (n,k) を導入した理由は以下のような例があるからである。

Example 2 完全グラフ K_6 の正則射影図 $\hat{K}_6$ とそれから得られた空間グラフ $\tilde{K}_6$ *(*図３）。この $\tilde{K}_6$ は $F_1 (= torus)$ に $|\tilde{K}_6 \cap l| = 2,\ |\tilde{K}_6 \cap m| = 2$ となるように埋め込み可能で、これは $min(K_6)$ を実現している。しかし、この正則射影図 $\hat{K}_6$ は *Octahedron graph* の *knotted projection* $\hat{G}_1$ を含んでいる。　ここで、$\gamma(Oct.graph) = 0$ である。

図　3.

Example 3 ペテルセングラフから１辺を除去したグラフ $PG-\{15\}$ は N_1（図　5） の細分で $min(PG)=4,\ min(N_1)=2.$ そして $\tilde{PG}$ は $min(PG)$ を実現しているが、その空間部分グラフ $\tilde{N_1}$ は $min(N_1)$ を実現していない例がある（図４）。

図　4.

Remark 4 (n,k)-*minimalizable* より制限の弱い *minimalizable* の定義

1. G が *minimalizable* とは G の任意の正則射影図は *minimal embedding* に持ち上げ可能

2. G が n-*minimalizable* とは次のいずれかをみたすときを言う。

　　(a) $\gamma(G)<n$ 又は

　　(b) $\gamma(G)=n$ のとき、 G の任意の正則射影図は *minimal embedding* に持ち上げ可能

しかし *1, 2* のどちらを定義に採用しても

「G が $(*)$-*minimalizable* なら G の任意のマイナーグラフ H も $(*)$-*minimalizable* である。ただし、$(*)$ は (n,k) 以外」

と言うことに対し、反例が作れてしまう（*Remark 1* 図　２ *)*。

問題　「canonical $\tilde{K}_n$ [1] は minimal $\tilde{K}_n$ か?　その逆は正しいか？」

Proposition 2 グラフ H が G のマイナーで G が (n,k)-*minimalizable* なら H も (n,k)-*minimalizable* である。

Proposition 3 G が (n,k)-*minimalizable* なら、 $(n,k+1)$-*minimalizable* である。もっと一般に $m>n,\ l>k$ に対し、G は (m,l)-*minimalizable* である。

$M(n,k)$ を (n,k)-minimalizable グラフの集合とし、$\Omega(M(n,k))$ をその禁止グラフの集合とする。
$\Omega(M(0,0)) \supset \{G_1 \sim G_{17}\} \cup \{K_5, K_{3,3}\}$
$\Omega(M(1,1)) \supset \{K_5, K_{3,3}\}$
$N_1, ..., N_9$, その他新國の例は $M(1,2)$ に入らない。（図５）

図　　５.

Remark 5 $\gamma(G)=1$ かつ $min(G)=1$ というグラフは存在しない。

なぜなら、先ず $\gamma(G)=1$ より、 G は非平面グラフである。したがって G は K_5 または $K_{3,3}$ をマイナーに持つ。そして $K_5,\ K_{3,3}$ はともに $\gamma=1,\ min=2$ である。

Remark 6 $min(G) = min_{\hat{f}}\{\sum_{i=1}^{k}|\hat{f}(G)\cap l_i| + \sum_{i=1}^{k}|\hat{f}(G)\cap m_i|\}$ $(k=\gamma(G))$ であるが G が非平面グラフなら、任意の i について $|\hat{f}(G)\cap l_i| \geq 1,\ |\hat{f}(G)\cap m_i| \geq 1$ である。なぜなら、定理１より
$|\hat{f}(G)\cap l_i| \geq gvsk(G),\ |\hat{f}(G)\cap m_i| \geq gvsk(G)$ で　G は非平面的なので $gvsk(G) \geq 1$

Definition 7 グラフ G が $\gamma(G)=n,\ min(G)=k$ のとき、G を (n,k)-グラフということにする。　$n \leq k$ であり、$n \geq 1$ のとき、$n < k$ である。

$K_5,\ K_{3,3}$ は $(1,2)$-グラフである。

問題　$n \geq 1, k \geq 2$ とする。(n,k)-グラフで (n,k)-minimalizable なものをもとめよ。

予想。グラフ G が (n,k)-グラフのとき、$k = 2n \cdot gvsk(G)$ である。

Remark 7 G が (n,k)-グラフのとき、定義より、$m > n, l > k$ に対し、 G は (n,k)-*minimalizable* かつ (m,l)-*minimalizable* である。従って、K_5, $K_{3,3}$ は $(1,2)$-グラフなので、$(1,3)$-*minimalizable* である。

問題。 G を (n,k)-グラフとする。もし、G から種数 $(n+1)$ の向き付け可能な閉曲面 F_{n+1} への埋め込みを取ったとき、
$\sum_{i=1}^{k} |f(G) \cap l_i| + \sum_{i=1}^{k} |f(G) \cap m_i| < k$ となる G および、埋め込み
$f : G \longrightarrow F_{n+1}$ が存在するか？

Definition 8 *(1)* グラフ G の空間グラフ $\tilde{G}$ が (n,k)-*embeddable* とは、向き付け可能な閉曲面 F_s $(s \leq n)$ に $\sum_{i=1}^{k} |f(G) \cap l_i| + \sum_{i=1}^{k} |f(G) \cap m_i| \leq k$ となるように埋め込み可能なときを言う。
(2) G の正則射影 $\hat{G}$ が (n,k)-*embeddable* とは $\hat{G}$ から得られる任意の空間グラフ $\tilde{G}$ が (n,k)-*embeddable* のときをいう。
(3) グラフ G が (n,k)-*embeddable* とは、
$(n,k) = max_{\hat{G}} min_{s,t}\{\tilde{G}$は $(s,t) - embeddable | \tilde{G}$は$\hat{G}$から得られる空間グラフ$\}$ とする。

グラフ G の一つの正則射影図 $\hat{G}$ が与えられ、$\hat{G}$ が (n,k)-embeddable とする。

$(a,b) = min_{s,t}\{\tilde{G}$は $(s,t) - embeddable | \tilde{G}$は$\hat{G}$から得られた空間グラフ$\}$ としたとき、辞書式順序集合としての $(n-a, k-b)$ は正則射影図 $\hat{G}$ の複雑さを表す 1 つの量である。

参考文献

[1] T.Endo and T.Otsuki : Notes on spatial representations of graphs, Hokkaido Math. J. **23** (3) (1994) 383-398

[2] Y.Huh and K. Taniyama : Identifiable projections of spatial graphs, J. Knot Theory Ramif. **13** (2004) 991-998

[3] K. Kobayashi : Standard spatial graphs, Hokkaido Math. J. **21** (1) (1992) 117-140

[4] R.Nikkuni : A remark on the identifiable projections of planar graphs, Kobe J. Math. **22** (2005) 65-70

[5] R.Nikkuni, M.Ozawa, K.Taniyama and Y.Tsutsumi : Newly found fobidden graphs for triviality , J. Knot Theory Ramif. **14** (2005) 523-538

[6] R..Nikkuni : Completely distinguishable projections of spatial graphs, J. Knot Theory Ramif. **15** (2006) 11-19

[7] R .Nikkuni : Regular projections of spatial graphs, Proc. Int. Workshop on Knot Theory for Sci. Objects. Osaka City Adv. Math. Inst. Studies vol.1.

[8] T. Otsuki : Knots and links in certain spatial complete graphs, Master Thesis, Waseda Univ. (1994)

[9] M.Ozawa and Y.Tsutsumi : Primitive spatial graphs and graph minors. to appear Rev. Math. Compl.

[10] H.Pahlings : On the chromatic number of skew graphs, J. Comb.Theory Ser. B **25** (1978) 303-306

[11] Robertson, N., Seimour, P. and Thomas, R. : Sacks' linkless embedding conjecture, J. Comb. Theory Ser. B 64 (1995) 185-227

[12] Sacks, H. : On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs - an open problem, Lecture Note in Math. vol. 1018 Springer Verlag (1983) 230-241

[13] R.Shinjo : Bounding disks to a spatial graphs, J.Knot Theory Ramif, to appear

[14] I.Sugiura and S.Suzuki : On a class of trivializable graphs, Sci. Math.**3** (2000) 193-200

[15] N.Tamura : On an extension of trivializable graphs. J. Knot Theory Ramif. **13** (2004) 211-218

[16] K. Taniyama : Knotted projections of planar graphs , Proc. A. M . S. **123** (1995) 3575-3579