

On the knottedness of the cat's cradle graph of the complete graph with five vertices

Kazuaki Kobayashi

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

Miyuki Okamoto

Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology

平成 17 年 1 月 11 日

1 Introduction

この論文では 5 頂点完全グラフ K_5 の綾取りグラフ (cat's cradle graph) $Cat(K_5)$ が *intrinsically knotted graph* であるか否かを調べる。残念ながら現在までのところ、どちらとも言えない状況である。

グラフ G がハミルトングラフのとき、1つのハミルトンサイクル C 上に順番に頂点に番号をつける。 C の 2つのコピー C, C' を取り、頂点 i と i' ($i+1$)' を結ぶ。出来たグラフを G の綾取りグラフといい、 $Cat(G)$ と書く。

空間グラフの射影図 \bar{G} から復元される 2^n 個の空間グラフ (n は交点の個数) を、その射影図から得られる空間グラフという。その全ての空間グラフが非自明な結び目を含むとき、その射影図 \bar{G} を *knot inevitable projection* ということにする。また、 \bar{G} から得られる全ての空間グラフ \tilde{G} が非自明な絡み目を 2 組合むとき、 \bar{G} を *double link inevitable projection* という。

図 1 のような射影図を $Cat(K_5)$ の *standard projection* ということにする。

図 1

Proposition 1 5 頂点完全グラフ K_5 の綾取りグラフ $Cat(K_5)$ の *standard projection* は *knot inevitable projection* である。

Proposition 2 5 頂点完全グラフの綾取りグラフ $Cat(K_5)$ の任意の空間グラフ $\tilde{Cat}(5)$ は非自明な結び目を含むか図 2 の *linked graph* を含む

ここで、 $lk_2(\tilde{C}_1, \tilde{C}_3) = 1$ $lk_2(\tilde{C}_2, \tilde{C}_4) = 1$ とする。

図 2

2 Proofs of Propositions

Lemma 1 K_5 の 綾取りグラフ $Cat(K_5)$ は2つの異なる完全グラフ K_6 の細分を含むので $Cat(K_5)$ は *intrinsically double linked graph* である。

Remark 1 $Cat(K_5)$ に含まれる2つの異なる K_6 の細分を $K_6^{(1)}, K_6^{(2)}$ としたとき、 $K_6^{(1)} \cong u * K_5^{(1)}, K_6^{(2)} \cong v * K_5^{(2)}$ とかける。このとき、これらの $K_5^{(1)}, K_5^{(2)}$ は $K_5^{(1)} \cap K_5^{(2)} = \emptyset$ なので $Cat(K_5)$ に含まれる *double link* が実は (一致して) 1組の *link* であるということはない。

Example 1 完全2部グラフ $K_{4,4}$ は *intrinsically double linked graph* であるが、*intrinsically knotted graph* ではない。特に下の図の *projection* は *double link inevitable projection* であるが、*knot inevitable projection* ではない。

図 3

Proof of Proposition 1. 補題1より、 $Cat(K_5)$ は *intrinsically double linked graph* であるから *standard regular projection* は *double link inevitable projection* である。従って、 $Cat(K_5)$ の *standard projection* は *knot inevitable projection* である事を示せばよい。

図4のような K_5 の射影図から得られる *diagram* で右図のような *diagram* を *linked wedge* といい、図示している頂点を *linked wedge* の頂点という。

図 4

Lemma 2 図5の K_5 の射影図から導かれる任意の *diagram* は少なくとも1つの *linked wedge* の部分を持つ。

図 5

証明。 $E_1 = \{02, 03\}$ は一番上の辺として良い。次に $E_2 = \{13, 14\}$ は E_1 の下にあるとして良い。次に辺 24 を E_1, E_2 の下におくと、*linked wedge* $024 \cup 13$ が出来る。また、辺 24 を E_1, E_2 の上におくと *linked wedge* $031 \cup 24$ が出来る。以上より少なくとも1つの *linked wedge* を含む。 \square

図 6

Remark 2 K_5 の上図のような射影図から得られる *diagram* は1個、3個又は5個の *linked wedge* を含む。 *diagram* が1個のみ含むときは、その *diagram* は非自明な結び目を含まない。5個の *linked wedge* を含むときは 5_1 -*knot* を含む。3個の *linked wedge* を含むときは、その頂点が3連続頂点のときは、その *diagram* は三つ葉結び目を含み、そうでない時は非自明な結び目を含まない。(図7)

図 7.

Remark 2 より $Cat(K_5)$ の standard projection から導かれる *diagram* において $\bar{K}_5^{(1)}$, $\bar{K}_5^{(2)}$ の部分に5箇所の *linked wedges* 又は連続3頂点に *linked wedge* があると、そこで非自明な結び目を含む。そこで $\bar{K}_5^{(1)}$, $\bar{K}_5^{(2)}$ の部分に *linked wedge* が各1箇所づつか、非連続3頂点で *linked wedge* が含まれている場合を考えれば良い。

$Cat(K_5) = K_5^{(1)} \cup E \cup K_5^{(2)}$ とおく。ただし、 $V(K_5^{(1)}) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $V(K_5^{(2)}) = \{0', 1', 2', 3', 4'\}$, $E = \{ii', i(i+1)' \text{ mod } 5\}$ とする。

$K_5^{(1)}$ に含まれる1つの *linked wedge* は $024 \cup 13$ として一般性を失わない。

$K_5^{(2)}$ に含まれる1つの *linked wedge* は

$i'(i+2)'(i+4)' \cup (i+1)'(i+3)' \text{ mod } 5$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) 又は
 $i'(i+3)'(i+1)' \cup (i+2)'(i+4)' \text{ mod } 5$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) とかける。

linked wedge が図8のようなとき、0, 3を上頂点、1, 4を下頂点と呼ぶ事にする。

図 8

(I) $\bar{K}_5^{(2)}$ の *linked wedge* $i'(i+3)'(i+4)' \cup (i+1)'(i+3)'$ において

- (a) i' ($i+3'$)' が上頂点、 $(i+1)'$, $(i+4)'$ が下頂点
- (b) i' , $(i+3)'$ が下頂点、 $(i+1)'$, $(i+4)'$ が上頂点

の2つの場合がある。

以下で $i' = 0, 1, 2, 3, 4$ のとき、上の (a), (b) のいずれの場合でも $Cat(K_5)$ の standard projection から導かれる任意の空間グラフは knotted cycle を含むことを示す。

$i' = 0$ で (a) のとき、

図 9

[4]

$i' = 0$ で (b) のとき、

図 10

$i' = 1$ で (a) のとき、

図 11

$i' = 1$ で (b) のとき、

図 12

$i' = 2$ で (a) のとき、

図 13

$i' = 2$ で (b) のとき、

図 14

$i' = 3$ で (a) のとき、

図 15

$i' = 3$ で (b) のとき、

図 16

$i' = 4$ で (a) のとき、

図 17

[6]

$i' = 4$ で (b) のとき、

図 18

(II) $K_5^{(2)}$ の linked wedge $i'(i+3)'(i+1)' \cup (i+2)'(i+4)'$ において

(c) i' , $(i+2)'$ が上頂点、 $(i+1)'$, $(i+4)'$ が下頂点

(d) i' , $(i+2)'$ が下頂点、 $(i+1)'$, $(i+4)'$ が上頂点とする。

$i' = 0$ で (c) のとき、

図 19

$i' = 0$ で (d) のとき、

図 20

$i' = 1$ で (c) のとき、

図 21

$i' = 1$ で (d) のとき、

図 22

$i' = 2$ で (c) のとき、

図 23

$i' = 2$ で (d) のとき、

図 24

[8]

$i' = 3$ で (c) のとき、

図 25

$i' = 3$ で (d) のとき、

図 26

$i' = 4$ で (c) のとき、

図 27

$i' = 4$ で (d) のとき、

図 28

以上より $Cat(K_5)$ の standard projection から導かれる任意の空間グラフは knotted cycle を含む事が示せた。

Lemma 3 (Taniyama-Yasuhara [], Foisy []) 下図のグラフ D_4 の空間グラフ \tilde{D}_4 において

$$lk_2(\tilde{C}_1, \tilde{C}_3) \neq 0$$

$$lk_2(\tilde{C}_2, \tilde{C}_4) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\tilde{D}_4) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \alpha(\tilde{\gamma}) \pmod{2} \neq 0$$

ここで Γ は D_4 に含まれる 4-cycle の集合、 $\alpha(\tilde{\gamma})$ は結び目 $\tilde{\gamma}$ の Conway 多項式の z^2 の係数 $\pmod{2}$ ($=\tilde{\gamma}$ のアレフ不変量)

Proof of Proposition 2 図 29 のような $Cat(K_5)$ の部分グラフを各々 J_1, J_2 とおく。 J_1 は K_6 の細分、 J_2 は K_6 の頂点拡張になっている。 J_1 には (3, 4)-タイプの交わらないサイクルの対と (3, 5)-タイプの交わらないサイクルの対が含まれている。

図 29

(I) J_1 に含まれる交わらない (3, 4)-タイプのサイクルの対は $Aut(Cat(K_5))$ を考慮すると

$$C_1 = (0, 2, 4) \quad C_3 = (1, 3, 3', 1') \text{ として良い。}$$

(II) 同様に J_1 に含まれる交わらない (3, 5)-タイプのサイクルの対は

$$C_1 = (0, 1, 3) \quad C_3 = (2, 4, 4', 1', 2') \text{ として良い。}$$

J_2 に含まれる交わらないサイクルの対は次の 10 組である。

(前列を C_2 とし、後列を C_4 とする。)

- | | | | |
|----------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|
| (1) $(3', 4', 4, 3, 2)$ | $(0', 1', 2')$ | (2) $(2', 4', 4, 3, 2)$ | $(0', 1', 3')$ |
| (3) $(2', 3', 2)$ | $(0', 1', 4')$ | (4) $(1', 4', 4, 3, 2, 1)$ | $(0', 2', 3')$ |
| (5) $(1', 3', 2, 1)$ | $(0', 2', 4')$ | (6) $(1', 2', 2, 1)$ | $(0', 3', 4')$ |
| (7) $(0', 4', 4, 0)$ | $(1', 2', 3')$ | (8) $(0', 3', 2, 3, 4, 0)$ | $(1', 2', 4')$ |
| (9) $(0', 2', 2, 3, 4, 0)$ | $(1', 3', 4')$ | (10) $(0', 1', 1, 2, 3, 4, 0)$ | $(2', 3', 4')$ |

(I), (II) の各々の場合に J_1, J_2 に含まれる 2 組の交わらないサイクル達が、 $Cat(K_5)$ のある空間グラフ $\tilde{Cat}(K)_5$ において

$$lk_2(\tilde{C}_1, \tilde{C}_3) = 1, lk_2(\tilde{C}_2, \tilde{C}_4) = 1 \text{ を満たす時、}$$

補題 3 の linked \tilde{D}_4 に縮約できる事を示せば良い。

(I)

(1) $C_1 \cap C_2 = \{2, 4\}$ $C_2 \cap C_3 = \{3, 3'\}$ $C_3 \cap C_4 = \{1'\}$ C_1 と C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。

$$C_2 = \alpha \cup \beta \quad \alpha = (3, 3', 4', 4), \quad \beta = (2, 3, , 3') \text{ とする。}$$

$$C'_2 = \alpha \text{ のとき、 } C_1 \cap C'_2 = \{4\}, \quad C_2 \cap C_3 = 33'$$

$$C'_2 = \beta \text{ のとき、 } C_1 \cap C'_2 = \{2\}, \quad C_2 \cap C_3 = 33'$$

図 30

(2) $C_1 \cap C_2 = \{2, 4\}$ $C_2 \cap C_3 = \{3\}$ $C_3 \cap C_4 = 1'3'$ C_1 と C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。

$$C_2 = \alpha \cup \beta \quad \alpha = (2, 3, 4), \quad \beta = (2, 4, 4', 2') \text{ とする。}$$

$$C'_2 = \alpha \text{ のとき、 } C_1 \cap C'_2 = 24, \quad C'_2 \cap C_3 = \{3\}$$

$$C'_2 = \beta \text{ のとき、 } C_1 \cap C'_2 = 24, \quad C_2 \text{ と } C_3 \text{ は辺 } 34' \text{ で結ぶ}$$

図 31

(3) $C_1 \cap C_2 = \{2\}$ $C_2 \cap C_3 = \{3'\}$ $C_3 \cap C_4 = \{1'\}$ C_1 と C_4 は辺 $44'$ で結ぶ。

図 32

(4) $C_1 \cap C_2 = \{2, 4\}$ $C_2 \cap C_3 = \{3\} \cup 11'$ $C_3 \cap C_4 = \{3'\}$ C_1 と C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (1, 2, 4, 4', 1')$ とする。

$C_2' = \alpha$ のとき、 $C_1 \cap C_2' = 24$, $C_2' \cap C_3 = \{3\}$

$C_2' = \beta$ のとき、 $C_1 \cap C_2' = 24$, $C_2 \cap C_3 = 11'$

図 33

(5) $C_1 \cap C_2 = \{2\}$ $C_2 \cap C_3 = 11'3'$ C_3 と C_4 は $34'$ で結ぶ。 C_1 と C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。

図 34

(6) $C_1 \cap C_2 = \{2\}$ $C_2 \cap C_3 = 11'$ $C_3 \cap C_4 = \{3'\}$ C_1 と C_4 は辺 $44'$ で結ぶ。

図 35

(7) $C_1 \cap C_2 = 14$ C_2 と C_3 は $34'$ で結ぶ。 $C_3 \cap C_4 = 1'3'$ C_1 と C_4 は辺 $22'$ で結ぶ。

図 36

(8) $C_1 \cap C_2 = \{2\} \cup 04$ $C_2 \cap C_3 = \{3, 3'\}$ $C_3 \cap C_4 = \{1'\}$ C_1 と C_4 は結べない。

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 3')$, $\beta = (3, 4, 0, 0', 3')$ とする。

$C'_2 = \alpha$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{2\}$, $C'_2 \cap C_3 = 33'$ C_4 と C_1 は辺 $44'$ で結ぶ。

$C'_2 = \beta$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 04$, $C_2 \cap C_3 = 33'$, C_4 と C_1 は辺 $22'$ で結ぶ。

図 37

(9) $C_1 \cap C_2 = \{2\} \cup 04$ $C_2 \cap C_3 = \{3\}$ $C_3 \cap C_4 = 1'3'$ C_1 と C_4 は結べない。

図 38

$$C'_2 = C_2 \cup \alpha \cup \beta = (0, 2, 2', 0') \quad \alpha = (0, 3, 4), \quad \beta = (0, 2, 3) \text{ とする。}$$

$$lk_2(\bar{C}_2, \bar{C}_4) = 1, \quad \text{もし、}$$

$$\begin{cases} lk_2(\alpha, C_4) = 0 \\ lk_2(\beta, C_4) = 0 \end{cases}$$

又は

$$\begin{cases} lk_2(\alpha, C_4) = 1 \\ lk_2(\beta, C_4) = 1 \end{cases}$$

なら C_2 の代わりに C'_2 を採用する。

図 39

$C_1 \cap C'_2 = 02$ C'_2 と C_3 は $12'$ で結ぶ。 $C_3 \cap C_4 = 1'3'$ C_1 と C_4 は $44'$ で結ぶ。

$$\begin{cases} lk_2(\alpha, C_4) = 1 \\ lk_2(\beta, C_4) = 0 \end{cases}$$

なら $C'_2 = \alpha$ とする。

$C_1 \cap C'_2 = 04$ $C'_2 \cap C_3 = \{3\}$ C_4 と C_1 は $22'4'$ で結ぶ。

図 40

$$\left. \begin{aligned} lk_2(\alpha, C_4) &= 0 \\ lk_2(\beta, C_4) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

なら $C'_2 = \beta$ とする。

$C_1 \cap C'_2 = 02$ $C'_2 \cap C_3 = \{3\}$ $C'_3 \cap C_4 = 1'3'$ C_4 と C_1 は $44'$ で結ぶ。

図 41

(10) $C_1 \cap C_2 = \{2\} \cup 04$ $C_2 \cap C_3 = 11' \cup \{3\}$ $C_3 \cap C_4 = \{3'\}$ C_1 と C_4 は結べない。

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (1, 4, 0, 0', 1')$, $\beta = (1, 2, 3, 4)$ とする。

$C'_2 = \alpha$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 04$, $C'_2 \cap C_3 = 11'$ C_4 と C_1 は辺 $22'$ で結ぶ。

$C'_2 = \beta$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{2, 4\}$, $C'_2 \cap C_3 = \{1, 3\}$, C_4 と C_1 を道 $00'4'$ で結ぶ。

さらに $C'_2 = \beta$ を $\beta = \gamma \cup \delta$ $\gamma = (1, 2, 4)$, $\delta = (2, 3, 4)$ とする。

$C''_2 = \gamma$ のとき、 $C_1 \cap C''_2 = 24$, $C''_2 \cap C_3 = \{1\}$

$C''_2 = \delta$ のとき、 $C_1 \cap C''_2 = 24$, $C''_2 \cap C_3 = \{3\}$

図 42

(II)

(1) $C_1 \cap C_2 = \{3\}$ $C_2 \cap C_3 = 44' \cup \{2\}$ $C_3 \cap C_4 = 1'2'$ C_1 と C_4 は
辺 $00'$ で結ぶ。

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (2, 3, 4, 4', 3')$ とする。

$1 = lk_2(\tilde{C}_2, \tilde{C}_4) = lk_2(\alpha, \tilde{C}_4) + lk_2(\beta, \tilde{C}_4)$

$lk_2(\alpha, \tilde{C}_4) = 1$ なら $C'_2 = \alpha$ として β を捨てる。 $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C_3 =$
24

$lk_2(\beta, \tilde{C}_4) = 1$ なら $C'_2 = \beta$ として α を捨てる。 C_1 と C'_2 を辺 $33'$ で結ぶ。

$C'_2 \cap C_3 = 244'$

図 43

(2) $C_1 \cap C_2 = \{3\}$ $C_2 \cap C_3 = 22' \cup 44'$ $C_3 \cap C_4 = \{1'\}$ C_1 と C_4
は辺 $00'$ で結ぶ。

図 44

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (3, 4, 4')$, $\beta = (2', 4', 3, 2)$ とする。
 $C'_2 = \alpha$ のとき $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C_3 = 44'$
 $C'_2 = \beta$ のとき $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$ $C'_2 \cap C_3 = \{4'\} \cup 22'$
 そこで、 $C_3 = \gamma \cup \delta$ $\gamma = (1', 2', 4')$, $\delta = (2', 4', 3, 2)$ とおく。
 $C'_3 = \gamma$ のとき、 $C'_2 \cap C'_3 = 2'4'$, $C'_3 \cap C_4 = \{1'\}$
 $C'_3 = \delta$ のとき、 $C'_2 \cap C'_3 = 22'4'$, C'_3 と C_4 は $40'$ で結ぶ。
 C_1 と C_4 は $01'$ で結びなおす。

図 45

(3) C_1 と C_2 は辺 $33'$ で結ぶ。 $C_2 \cap C_3 = 22'$ $C_3 \cap C_4 = 1'4'$ C_1
 と C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。

図 46

(4) $C_1 \cap C_2 = \{1, 3\}$ $C_2 \cap C_3 = 44'1' \cup \{2\}$ $C_3 \cap C_4 = \{2'\}$ C_1 と
 C_4 は辺 $00'$ で結ぶ。
 $C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (1', 4', 4, 2, 1)$ とする。
 $C'_2 = \alpha$ のとき $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C_3 = 24$
 $C'_2 = \beta$ のとき $C_1 \cap C'_2 = \{1\}$ $C'_2 \cap C_3 = 244'1'$

図 47

(5) $C_1 \cap C_2 = \{1\}$ $C_2 \cap C_3 = \{2, 1'\}$ $C_3 \cap C_4 = \{2'\}$ C_1 と C_4 は
辺 $00'$ で結ぶ。

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (1', 4', 4, 2)$, $\beta = (1', 3', 2, 4, 4')$ とする。

$C'_2 = \alpha$ のとき $C_1 \cap C'_2 = \{1\}$, $C'_2 \cap C_3 = 244'1'$

$C'_2 = \beta$ のとき C_1 と C'_2 を辺 $33'$ で結ぶ $C'_2 \cap C_3 = 244'1'$

図 48

(6) $C_1 \cap C_2 = \{1\}$ $C_2 \cap C_3 = 22'1'$ $C_3 \cap C_4 = \{4'\}$ C_1 と C_4 は辺
 $00'$ で結ぶ。

図 49

(7) $C_1 \cap C_2 = \{0\}$ $C_2 \cap C_3 = 44'$ $C_3 \cap C_4 = 1'2'$ C_1 と C_4 は辺
 $33'$ で結ぶ。

図 50

(8) $C_1 \cap C_2 = \{0, 3\}$ $C_2 \cap C_3 = \{2, 4\}$ $C_3 \cap C_4 = 1'2'4'$ C_1 と C_4
 が結べない。

図 51

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (, 2, 4, 0, 0', 3')$ とし、
 $C_3 = \gamma \cup \delta$ $\gamma = (2, 4, 4', 1', 3')$, $\delta = (, 2, 3', 1', 2')$ とする。
 (a) $\begin{cases} C'_2 = \alpha \\ C'_3 = \gamma \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C'_3 = 24$ $C'_3 \cap C_4 = 1'4'$
 C_1 と C_4 を $00'2''$ で結ぶ。

図 52

(b) $\begin{cases} C'_2 = \alpha \\ C'_3 = \delta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C'_3 = \{2\}$ $C'_3 \cap C_4 = 1'2'$
 C_1 と C_4 を $00'4'$ で結ぶ。

図 53

(c) $\begin{cases} C'_2 = \beta \\ C'_3 = \gamma \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{0\}$, $C'_2 \cap C'_3 = 423'$ $C'_3 \cap C_4 = 1'4'$
 C_1 と C_4 を 辺 $12'$ で結ぶ。

図 54

(d) $\begin{cases} C'_2 = \beta \\ C'_3 = \delta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{0\}$, $C'_2 \cap C'_3 = 23'$ $C'_3 \cap C_4 = 1'2'$
 C_1 と C_4 を $34'$ で結ぶ。

図 55

(9) $C_1 \cap C_2 = \{0, 3\}$ $C_2 \cap C_3 = \{4\} \cup 22'$ $C_3 \cap C_4 = 1'4'$ C_1 と C_4
 が結べない。

図 56

$C_2 = \alpha \cup \beta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (2, 4, 0, 0', 2')$ とし、
 $C'_2 = \alpha$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{3\}$, $C'_2 \cap C_3 = 24$ C_1 と C_4 を $00'3'$ で結ぶ。

図 57

$C'_2 = \beta$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = \{0\}$, $C'_2 \cap C_3 = 242'$ C_1 と C_4 を $33'$ で結ぶ。

図 58

(10) $C_1 \cap C_2 = \{0, 1, 3\}$ $C_2 \cap C_3 = \{2, 4, 1'\}$ $C_3 \cap C_4 = \{2', 4'\}$ C_1 と C_4 が結べない。

図 59

$C_2 = \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta$ $\alpha = (2, 3, 4)$, $\beta = (2, 4, 0, 0', 3')$ $\gamma = (0, 1, 2)$ $\delta = (0, 1, 1', 0')$ とし、

$C_3 = \epsilon \cup \zeta$ $\epsilon = (1', 2', 4')$, $\zeta = (2, 4, 4', 2')$ とする。

(a) $\begin{cases} C'_2 = \alpha \\ C'_3 = \epsilon \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 03$, C'_2 と C'_3 を $40'1'$ で結ぶ。
 $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$ C_1 と C_4 は $123'$ で結ぶ。

図 60

(b) $\begin{cases} C'_2 = \alpha \\ C'_3 = \zeta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 03$, $C'_2 \cup C'_3 = \{4\}$ $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$
 C_1 と C_4 は $11'3'$ で結ぶ。

図 61

(c) $\begin{cases} C'_2 = \beta \\ C'_3 = \epsilon \end{cases}$ のとき、“ C_1 と C_4 ” “ C'_2 と C'_3 ” が同時には結べない。
 extra edge $21'$ を加えれば結べる。 $C_1 \cap C'_2 = 03$ $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$
 または、 $C_1 \cup C'_2 \cup C'_3 \cup C_4$ に道 $140'3 \cup 240'1'$ を加えれば求める形の部分グラフになっている。

図 62

(d) $\begin{cases} C'_2 = \beta \\ C'_3 = \zeta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 03$, $C'_2 \cup C'_3 = \{2\}$ $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$
 C_1 と C_4 は $22'$ で結ぶ。

図 63

(e) $\begin{cases} C'_2 = \gamma \\ C'_3 = \epsilon \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 01$, C'_2 と C'_3 は $240'1'$ で結ぶ。
 $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$ C_1 と C_4 は $33'$ で結ぶ。

図 64

(f) $\begin{cases} C'_2 = \gamma \\ C'_3 = \zeta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 01$, $C'_2 \cup C'_3 = \{2\}$ $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$
 C_1 と C_4 は $33'$ で結ぶ。

図 65

(g) $\begin{cases} C'_2 = \delta \\ C'_3 = \epsilon \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 01$, $C'_2 \cup C'_3 = \{1'\}$ $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$
 C_1 と C_4 は $33'$ で結ぶ。

図 66

(h) $\begin{cases} C'_2 = \delta \\ C'_3 = \zeta \end{cases}$ のとき、 $C_1 \cap C'_2 = 01$, C'_2 と C'_3 は $40'$ で結ぶ。 $C'_3 \cap C_4 = 2'4'$ C_1 と C_4 は $33'$ で結ぶ。

図 67

以上より $Cat(K_5)$ は linked subgraph を含むか、 $Cat(K_5) \cup \{e\}$ が intrinsically knotted である事がわかった。ここで e は $Cat(K_5)$ の E の部分に含まれる辺である。 \square

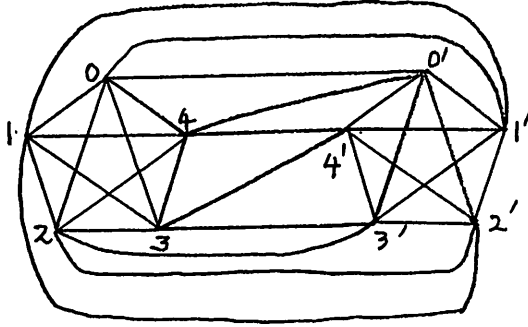


图 1

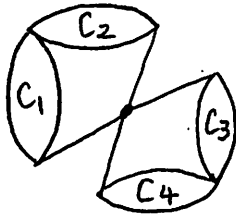


图 2.

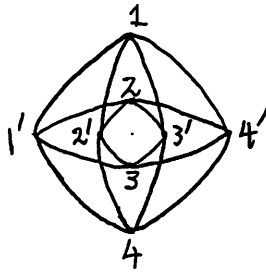


图 3.

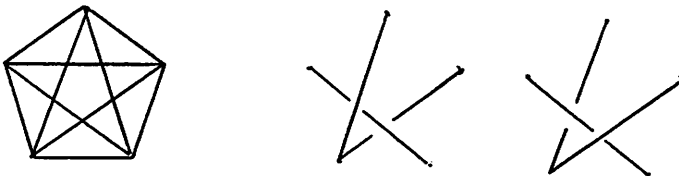


图 4.

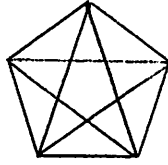


图 5

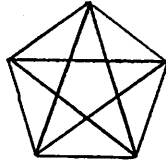


图 6

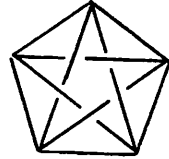
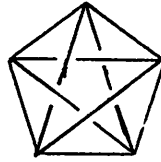
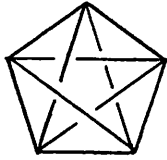
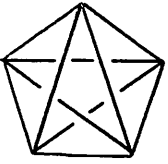


图 7

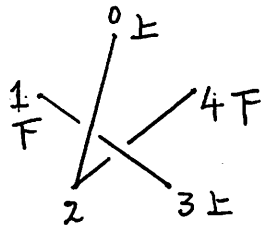


图 8

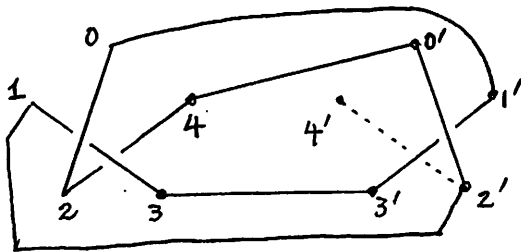


图 9

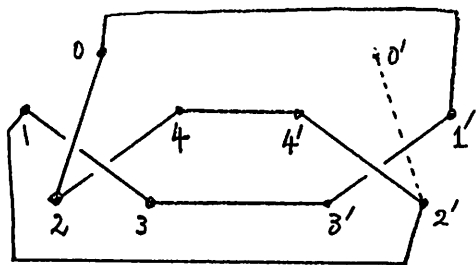


图-10

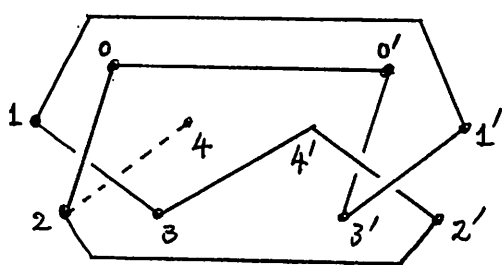


图-11

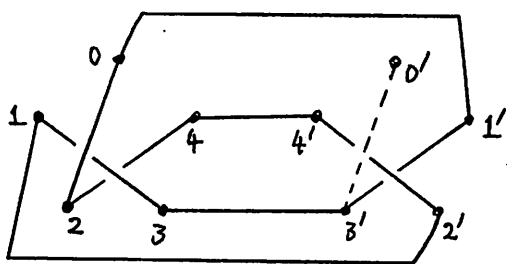


图-12

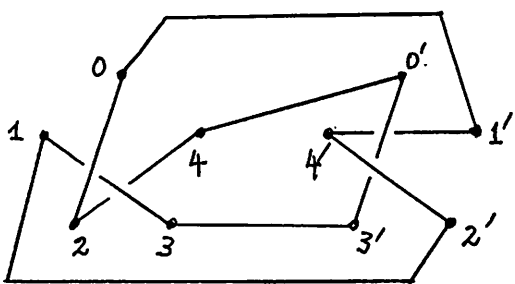


图-13

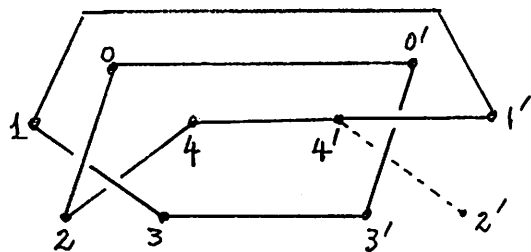


图-14

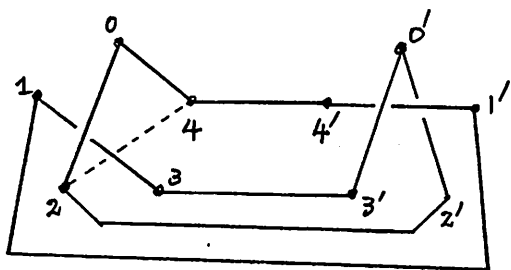


图-15

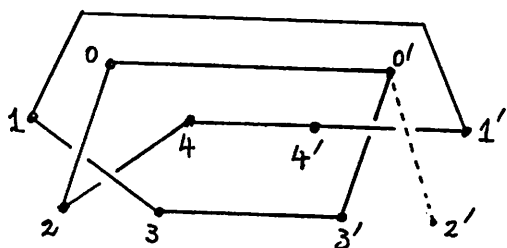


图-16

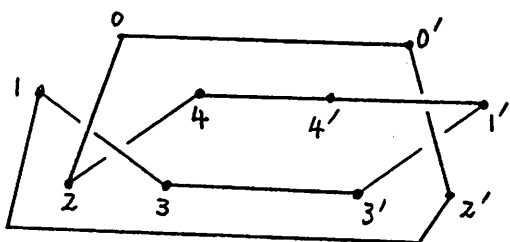


图-17

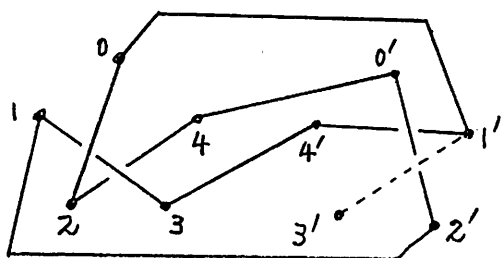


图-18

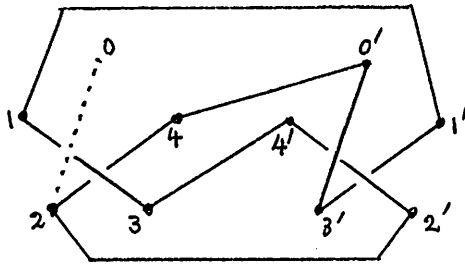


图-19

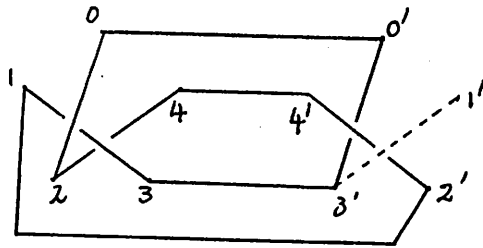


图-20

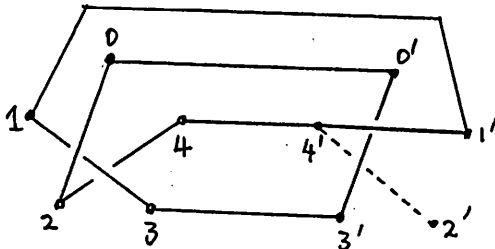


图-21

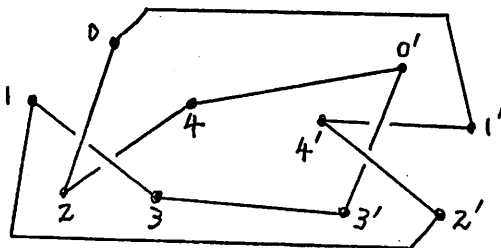


图-22

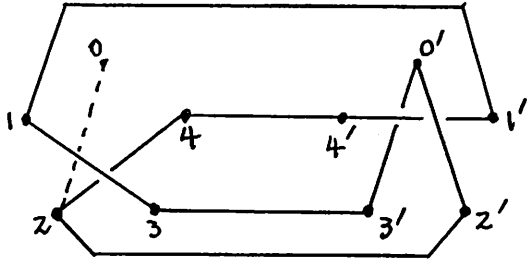


图-23

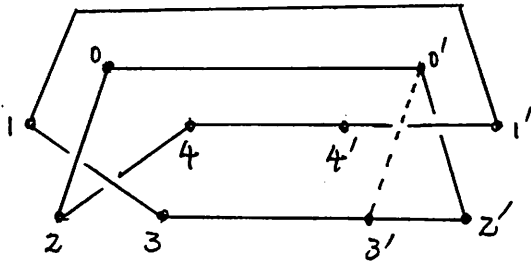


图-24

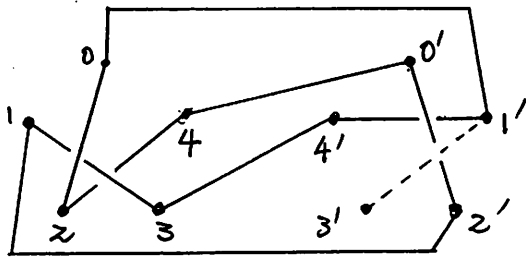


图-25

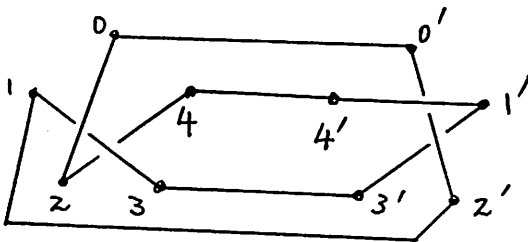


图-26

[30]

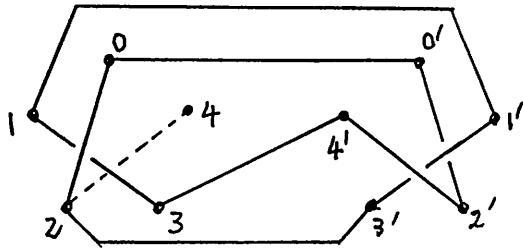


图-27.

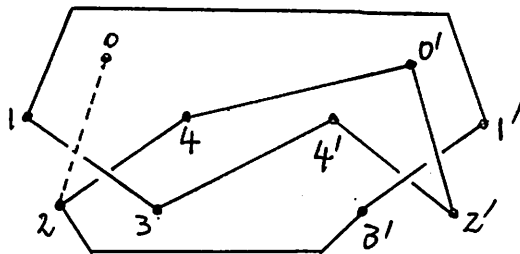


图-28

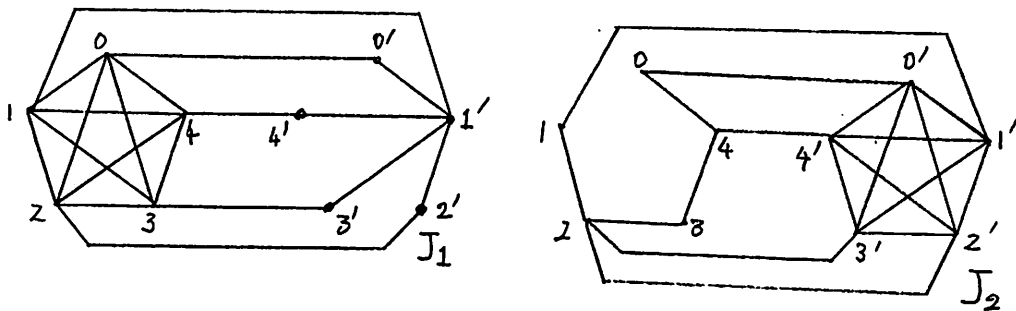


图-29

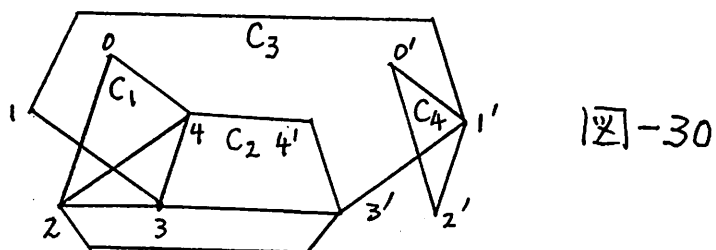


图-30

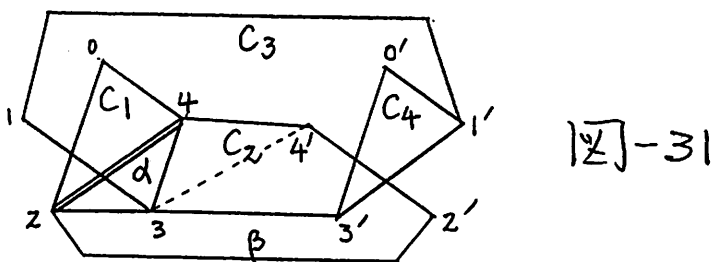


图-31

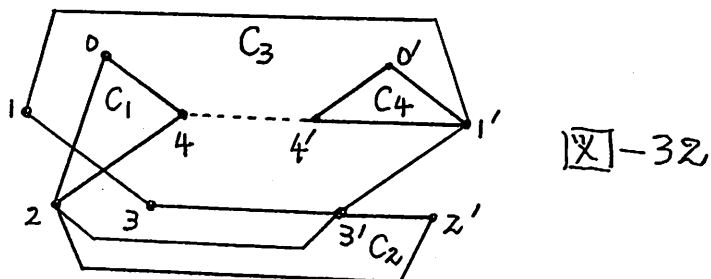


图-32

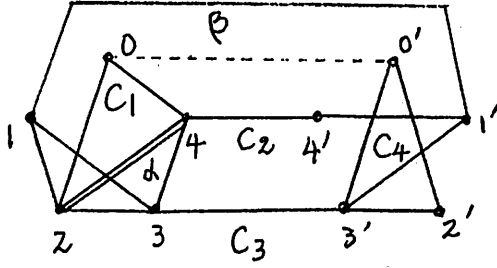


图-33

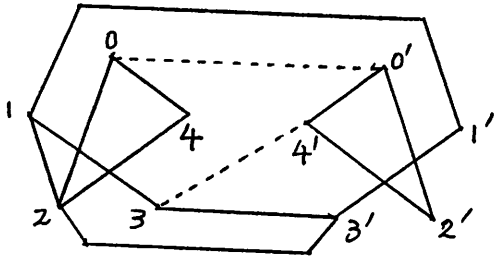


图-34

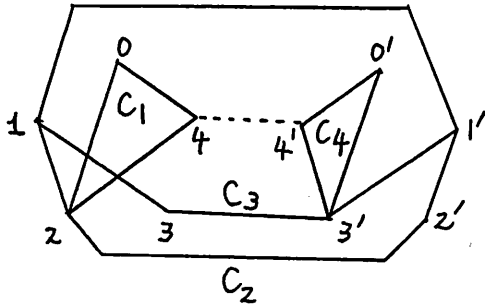


图-35

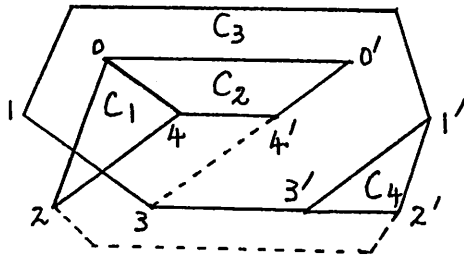


图-36

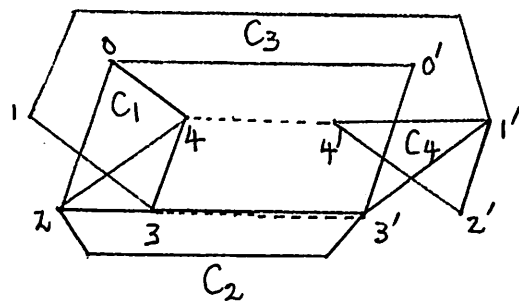


图-37

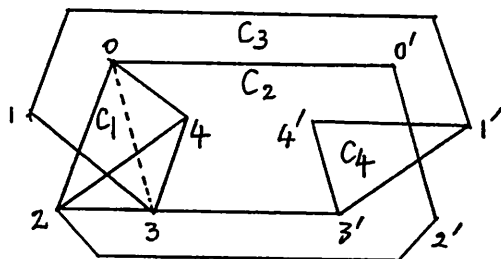


图-38

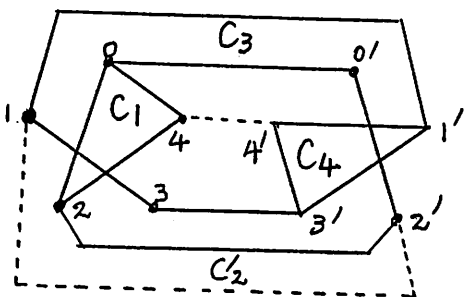


图-39

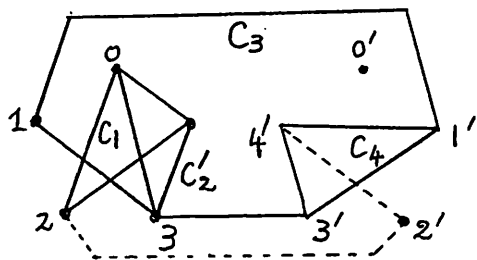


图-40

[34]

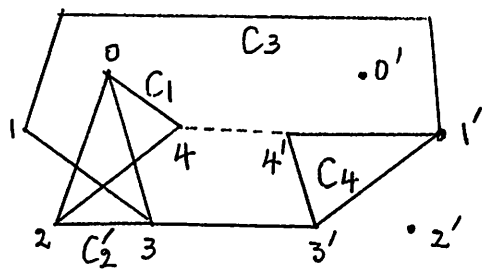


图-41

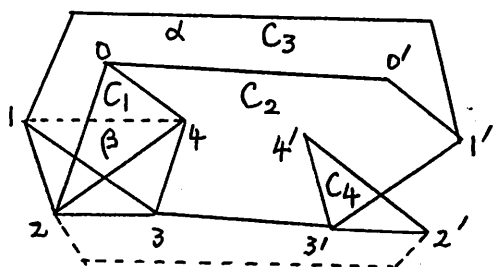


图-42

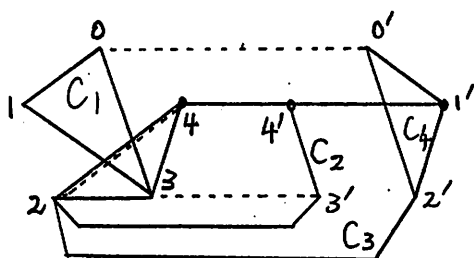


图-43

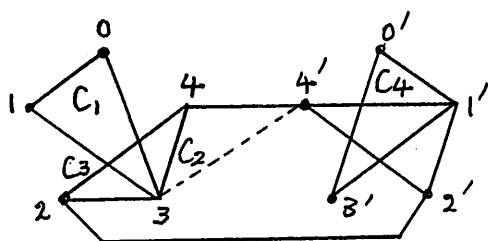


图-44

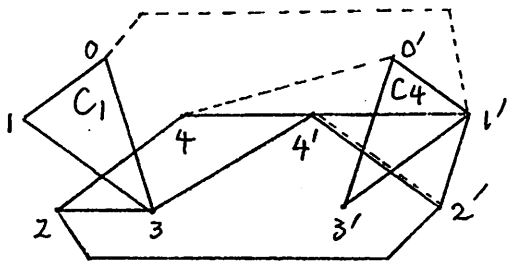


图-45

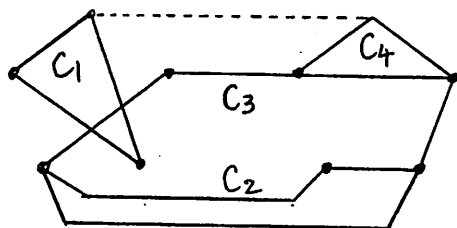


图-46

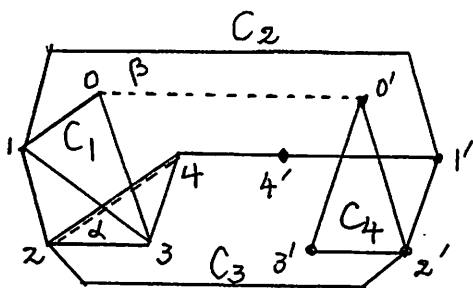


图-47

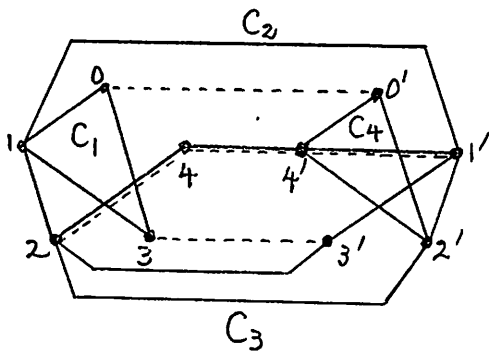


图-48

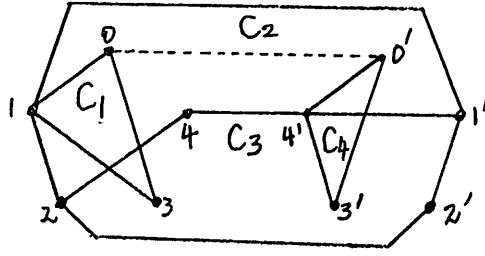


图-49

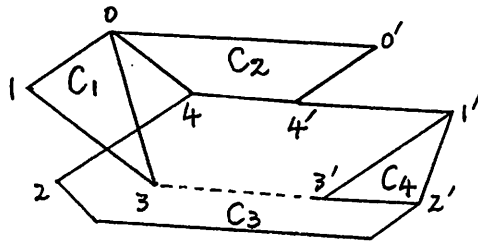


图-50

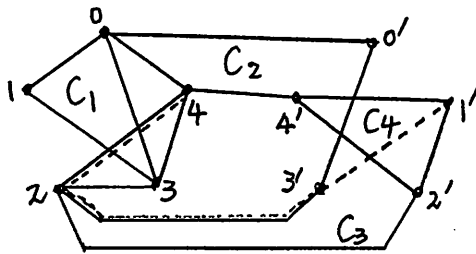


图-51

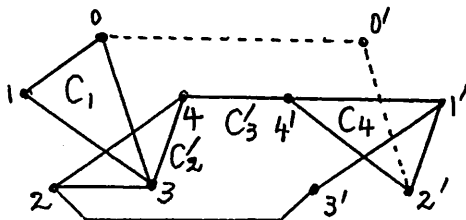


图-52

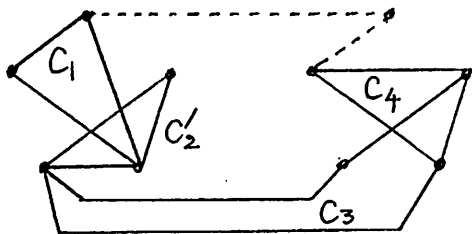


图-53

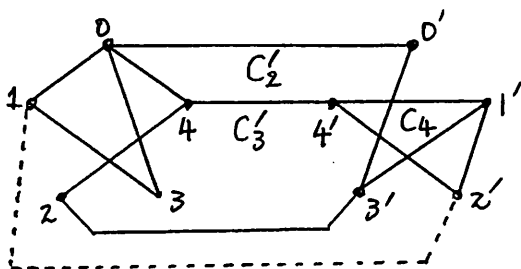


图-54

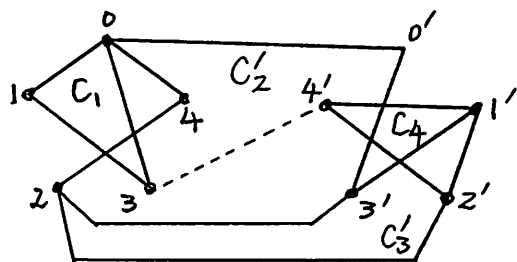


图-55

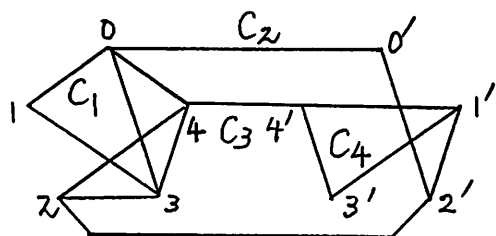


图-56

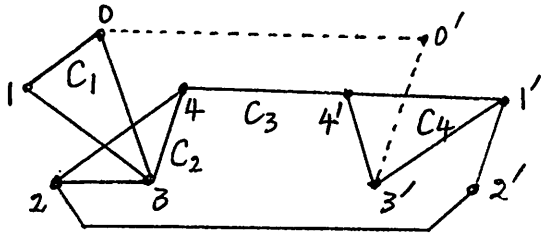


图-57

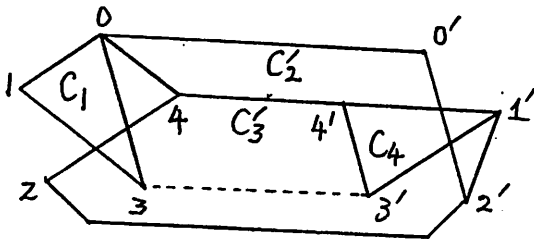


图-58

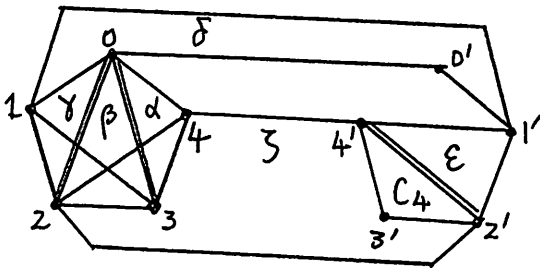


图-59

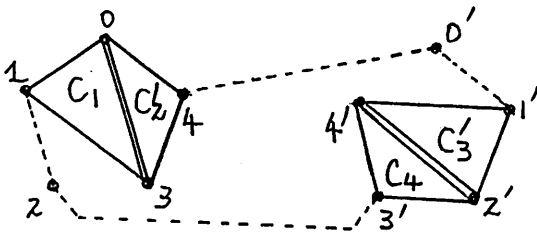


图-60

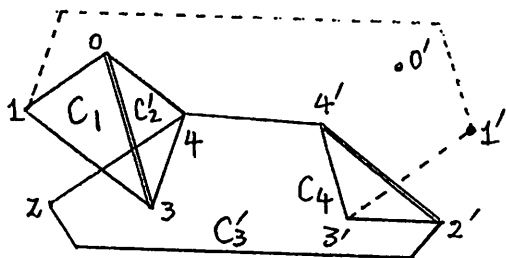


图-61

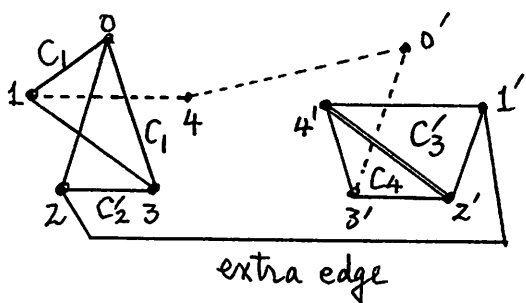


图-62

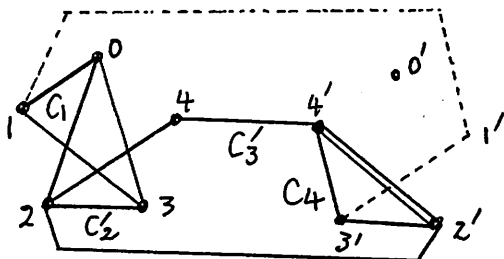


图-63

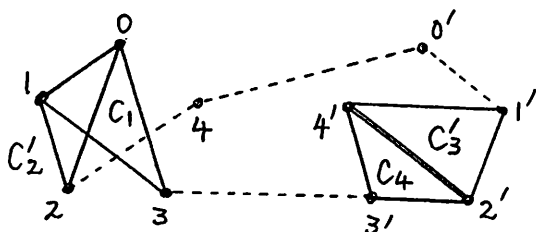
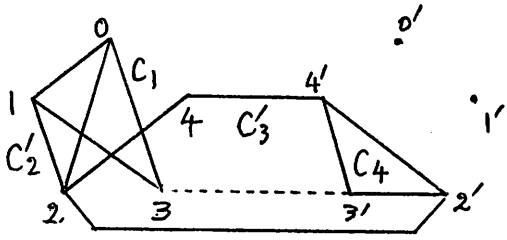
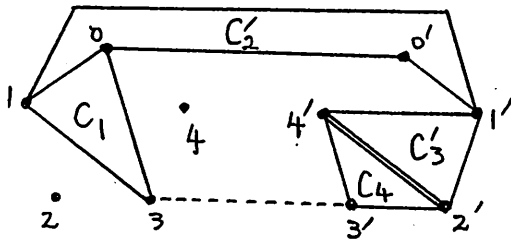


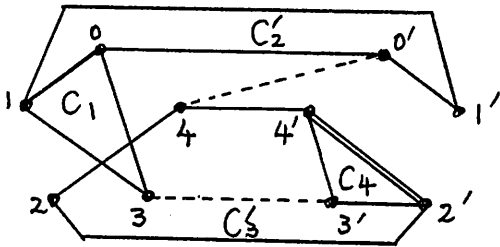
图-64



12-65



12-66



12-67