Minor deformation of graphs preserving achiral embeddability

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

平成 16 年 7 月 2 日

1 Introduction

P を次の性質のうちの 1 つとする。
non-planar, intrinsically knotted, intrinsically linked, non-adaptable
G をグラフとし、H をその (graph) minor とする。
(*) 「もし、G が性質 P を持たなければ H も持たない」
そこで、性質 P の各々について、その性質 P を持つグラフの極小集合 (minor minimal set) を決定せよという問題設定が出来る。
1992 年に E.Flapan と N.Weaver は完全グラフ $K_{4r}, K_{4r+1}, K_{4r+2}$ は achirally embeddable であるが K_{4r+3} は intrinsically chiral である事を証明した [4]。この事は、上の P として intrinsically chiral という性質を取ると (*) が成立していない事を示している。
そこで次の問題を考える。
Problem 1. (*) が成立するようなグラフの "minor operation" を考える。
Problem 2. その"minor operation" を使って「極小集合を決定せよ。」という問題設定が出来るようにする。

2 Obstruction edge set and achiral minor minimal graph

Flapan と Weaver は 3 連結グラフ G の achiral embeddability を次の形で証明した。

Proposition 1 *(Flapan-Weaver の定理 [5])* G を 3 連結単純グラフとする。

G が *achirally embeddable* である必要十分条件は G が *type 1,2* 又は *3* の自己同形を持つことである。

type 1, 2 又は 3 の自己同形については、[5] を参照のこと。

我々は３連結でないグラフも扱うので上の命題を次の命題ように変形して使う。

Remark 1 *Flapan-Weaver* の定理 *[5]* の証明を読むと G が３－連結である事は、G が *achirally embeddable* ならばタイプ *1, 2* 又は *3* の自己同型をもつという所のみに使われている、もっと具体的には $\pm$*-homeomorphism* $h : (S^3, G_f) \longrightarrow (S^3, G_f)$ があると有限位数の $\pm$*-homeomorphism* $k : (S^3, G_g) \longrightarrow (S^3, G_g)$ が作れる（複合同順）という所のみに使われている。

Proposition 2 *(Modified Flapan-Weaver* の定理*)* G を単純グラフとする。G が *finitely,achirally embeddable* である必要十分条件は G が *type 1,2* 又は *3* の自己同形を持つことである。ここで、G が *finitely,achirally embeddable* とは、適当な埋め込み $f : G \longrightarrow S^3$ と有限位数の *orientation reversing homeomorphism* $h : S^3 \longrightarrow S^3$ があって、$h(G_f) = G_f$ となる事である。

さらに、G が非単純グラフの場合の Flapan-Weaver タイプの定理を以下で述べていく。グラフ G に対し、G を単純グラフ化したグラフを G^* で表すことにする。

Definition 1 $\Phi \in Aut(G)$ が *generalized type 1* の自己同形とは $ord(\Phi) = 2$ で、$V(G) = V_1 \cup W_2 \cup W_2'$ と分割され、次をみたす。
1. $\Phi|_{V_1} = id.$ $\qquad \Phi : W_2 \longleftrightarrow W_2'$
2. $G_1^*(= V_1$ で張られる G^* の部分グラフ）を平面にはめ込んだ *(immersed)* 時、交差点を通る G^* の２辺のうち少なくとも１辺に対応する G の多重辺が偶数本
3. $p \in W_2,\ q \in W_2'$ で p と q を両端とする辺があるなら $\Phi(p) = q$ で p と q を両端とする辺 e_i は $\Phi(e_i) = e_i$ である。

Lemma 1 位数２の *orientation reversing homemorphism* $h : (S^3, G_f) \longrightarrow (S^3, G_f)$ で、その固定点集合 $Fix(h) = P \cong S^2$ であるものが存在する必要十分条件は G が *generalized type 1* の自己同形を持つことである。

Definition 2 $\Phi \in Aut(G)$ が *generalized type 2* の自己同形とは、$ord(\Phi) = 2$ で、$V(G) = V_1 \cup W_2 \cup W_2'$ と分割され、次をみたす。

1. $\Phi|_{V_1} = id.$ $\qquad \Phi : W_2 \longleftrightarrow W_2'$

2. $|V_1| \leq 2$ であって、

(a) $|V_1| = 2$ のとき、 $V_1 = \{p_1, p_2\}$ として、もし $p_1,\ p_2$ を両端とする辺があるなら偶数本であり、このときは $v \in W_2,\ \Phi(v)$ を両端とする辺は偶数本。また $p_1,\ p_2$ を基点とするループは常に各々偶数本である。

(b) $|V_1| = 1$ のとき、$V_1 = \{p\}$ とおく。 p を基点とするループが奇数本なら $v \in W_2$ と $\Phi(v)$ を両端とする辺は偶数本である。 p を基点とするループが偶数本の時、$v \in W_2$ と $\Phi(v)$ を両端とする辺が奇数本という対 $(v,\ \Phi(v))$ は１対以下である。

(c) $V_1 = \emptyset$ のとき $v \in W_2,\ \Phi(v)$ を両端とする辺が奇数本という対 $(v, \Phi(v))$ は２対以下である。

3. $u \neq v,\ v = \Phi(u)$ のとき、

(a) $u,\ v$ を両端とする多重辺 e_i が偶数本 $2m$ ならば $\quad \Phi(e_i) = e_{m+i} \quad i = 1, 2, ..., m$

(b) $u,\ v$ を両端とする多重辺 e_i が奇数本 $2m+1$ ならば $\quad \Phi(e_i) = e_{m+i} \quad i = 1, 2, ..., m\ \Phi(e_{2m+1}) = e_{2m+1}$

Lemma 2 (S^3, G_f) から自分自身への位数２の *orientation reversing* で固定点が２点であるような同相写像 h が存在する必要十分条件は G が *generalized type 2* の自己同形を持つことである。

Definition 3 $\Phi \in Aut(G)$ が *generalized type 3* の自己同形とは、$ord(\Phi) = 2^n$ で、$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_{2^n}$ と分割され、次をみたす。

1. $v \in V_p$ $(p = 1, 2$ *or* $2^n)$ のとき、$ord(v) = |\mathcal{O}_\Phi(v)| = p$ ここで $\mathcal{O}_\Phi(v)$ は v の Φ による *orbit*

2. $|V_1| \leq 2$ であって

(a) $|V_1| = 2$ のとき、$V_1 = \{p_1, p_2\}$ として、もし $p_1,\ p_2$ を両端にもつ辺があるなら、それらの本数は適当な $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し $m \cdot 2^n$ 又は $2(m \cdot 2^{n-1} + 1)$ である。そして $m \cdot 2^n$ のとき $v \in V_2,\ \Phi(v)$ を両端とする辺は $r \cdot 2^{n-1}$ 本 又、$p_1,\ p_2$ を基点とするループは各々$m_i \cdot 2^n$ 本

(b) $|V_1| = 1$ のとき $V_1 = \{p\}$ とおく。p を基点とするループが奇数本ならば、$v \in V_2$ と $\Phi(v)$ を両端とする辺はない。また p を基点とするループが偶数本なら $v \in V_2$ と $\Phi(v)$ を両端とする多重辺が奇数本となる対 $(v, \Phi(v))$ は１対以下である（実際 p を基点とするループの本数は、ある $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

に対し $m \cdot 2^n$ 又は $m \cdot 2^n + 1$ である。
(c) $V_1 = \emptyset$ のとき、 $v \in V_2$, $\Phi(v)$ を両端とする辺が奇数本という対 $(v, \Phi(v))$ は 1 対以下である。
3. $V_1 \cup V_2$ によって張られる G^* の部分グラフ $G^*_{1,2}$ は $G^*_{1,2} \subset S^1$ で、この *circle* S^1 の *reflection* が $\Phi^*|_{G^*_{1,2}}$ を実現している。ここで $\Phi^* \in Aut(G^*)$ は Φ から導かれる自己同形
4. (a) $v \in V_2$ と $\Phi(v)$ を両端とする辺があるとき、その本数はある $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し $m \cdot 2^n$ 又は $m \cdot 2^n + 1$ $(2^n = ord(\Phi))$ である。この多重辺を $e_{i,k}$ $(i = 1, 2, ..., 2^n; k = 1, 2, ..., m)$, $e_{m \cdot 2^n + 1}$ *(*これは無いときもある）とおくと

$\Phi(e_{i,k}) = e_{i+1,k}$ ただし $e_{2^n,k} = e_{1,k}$ とみなす。

$\Phi(e_{m \cdot 2^n + 1}) = e_{m \cdot 2^n + 1}$ （本数が $m \cdot 2^n$ のとき、これはない）

(b) $u \in V_1$ と $v \in V_2$ を両端とする辺があるとき、その本数はある $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対し $m \cdot 2^{n-1}$ 又は $m \cdot 2^{n-1} + 1$ $(2^n = ord(\Phi))$ である。この多重辺を $e_{i,k}$ $(i = 1, 2, ..., 2^{n-1}; k = 1, 2, ..., m)$, $e_{m \cdot 2^{n-1} + 1}$ *(*これは無いときもある）とおくと

$\Phi(e_{i,k}) = e'_{i+1,k}$ ただし $e'_{2^n+1,k} = e'_{1,k}$ とみなす。

$\Phi(e_{m \cdot 2^{n-1}+1}) = e'_{m \cdot 2^{n-1}+1}$ *(*本数が $m \cdot 2^{n-1}$ のとき、これはない）

ここで e'_j は u と $\Phi(v)$ を両端とする多重辺の内の 1 本
5. $v \in V_{2^n}$ と $\Phi^{2^{n-1}}(v)$ を両端とする辺が奇数本という頂点 v があり、任意の $u \in V_1$ と任意の $v \in V_2$ を両端とする辺が奇数本 *(*$= m \cdot 2^{n-1} + 1$*)* のとき、$n = 2$ で $G^*_{1,2} \subsetneqq S^1$ である。

Lemma 3 (S^3, G_f) から自分自身への位数 2^n $(n \geq 2)$ の *orientation reversing* で固定点が 2 点であるような同相写像 h が存在する必要十分条件は G が *generalized type 3* の自己同形を持つことである。

Theorem 1 *(Generalized Flapan-Weaver* の定理*)* G をグラフとする。*(*3 連結、単純という仮定はしない）
G が *finitely, achirally embeddable* である必要十分条件は G が *generalized automorphism of type k (k = 1,2,or 3)* をもつことである。

Remark 2 単純グラフ G がタイプ *1, 2,* 又は *3* の自己同型 Φ を持てば、Φ に *consistent* に多重辺化及びループをつけた非単純グラフ $\tilde{G}$ も Φ と同じタイプの自己同型 $\tilde{\Phi}$ を持つ

この論文では 特に断らない限り finitely, achirally embeddable を単に achirally embeddable といい、generalized automorphism of type k を単に automorphism of type k と言う事にする。
$S \subset E(G)$ を部分集合とし、$S = \{e_1, ..., e_k\}$ とする。
$G \longrightarrow G_1 = G/\{e_1\} \longrightarrow G_2 = G_1/\{e_2\} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_k = G_{k-1}/\{e_k\}$
としたとき $G/S = G_k$ とする。
G に自己同形 Φ が与えられ、$e \in E(G)$ に対し、$\mathcal{O}_\Phi(e)$ を e の Φ による orbit とする。このとき、$G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ も上と同様に考える。i.e. $S = \mathcal{O}_\Phi(e)$ と考える。

Theorem 2 *(Problem 1 に対する回答)G は単純グラフとする。 G は type k (k = 1, 2 又は 3) の自己同形 Φ をもつとする。*
$e \in E(G)$ とし、$\mathcal{O}_\Phi(e)$ を e の Φ による orbit とする。
$\Longrightarrow G - \mathcal{O}_\Phi(e),\ G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ は type k の自己同形 $\tilde{\Phi},\ \hat{\Phi}$ をもつ。

証明. $\Phi(G - \mathcal{O}_\Phi(e)) = G - \mathcal{O}_\Phi(e)$ なので $G - \mathcal{O}_\Phi(e)$ 上の自己同形 $\tilde{\Phi}$ を $\tilde{\Phi} = \Phi|_{G-\mathcal{O}_\Phi(e)}$ と定義すれば良い。すると Φ が タイプ k （k = 1,2 又は 3) なら $\hat{\Phi}$ もタイプ k である。そこで以下では Φ を使って $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ 上の自己同形 $\hat{\Phi}$ を作る。
$\mathcal{O}_\Phi(e) = \{e_1,\ e_2,\ .....,e_{2^p}\}$ $(p \geq 0)$ とする。
1. Φ がタイプ１のとき、 $ord\ \Phi = 2$ だから $p = 0$ 又は 1 である。 P を Φ から導かれる orientation reversing homeomorphism h の折り返し面とする。
(A) $p = 0$ すなわち $\Phi(e) = e$ のとき。 e を G の辺とし、e の両端点を $u,\ v$ とする、$\partial e = \{u,\ v\}$.
(a) $e \in G_1$ のとき。$e \subset P$ であり、$G/\mathcal{O}_\Phi(e) = G/\{e\} \subset P/\{e\} \cong P$ である。$G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ において、u の同値類を $[u]$ とおくと、$[u] = e = uv \in G_1$, また $[u] \in P$. そこで u または v を端点に持たない辺 $f \in E(G)$ に対しては $\hat{\Phi}(f) = \Phi(f)$ とする。また $\hat{\Phi}([u]) = [u]$ とおく。f が u または v を端点とする辺の時、f のもう一方の端点を w としたとき、$\hat{\Phi}(w) = \Phi(w)$ として既に定義されている。そこで $\hat{\Phi}(f) = \Phi(w)[u]$ と定義すると $\hat{\Phi}$ は $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ 上で定義されタイプ１である。 $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ は一般に多重辺を持つ。
(b) $ord\ u = ord\ v = 2$ のとき、$e \not\subset P$ で $\Phi : u \longleftrightarrow v$ である。$\mathcal{O}_\Phi(e)$ での u の同値類を $[u]$ とおくと $[u] \in P$. (a) と同様に Φ を使って $\hat{\Phi}$ を定義する。
($\hat{\Phi}([u]) = [u]$). すると $\hat{\Phi}$ はタイプ１の自己同型である。(図 1-1)
(B) $p = 1$ すなわち $|\mathcal{O}_\Phi(e_1)| = 2$ のとき、 $\mathcal{O}_\Phi(e_1) = \{e_1,\ e_2\}$ とする。

(a) $u,\ v$ の一方例えば $u \in V_1$ のとき、$\partial(\Phi(e_1)) = \{u,\ \Phi(v)\}$. このとき、$G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ においての $[u]$ は G において $\{u,\ v,\ \Phi(v)\}$. このとき $\hat{\Phi}([u]) = [u] \in V_1$, 辺 $f \in E(G)$ の端点が $\{v,\ \Phi(v)\}$ 以外のとき、$\hat{\Phi}(f) = \Phi(f)$ とする。f の端点が $v,\ \Phi(v)$ のいずれかの時、f のもう一方の端点を w とすると $\hat{\Phi}(w) = \Phi(w)$ で既に定義されている。そこで $\hat{\Phi}(f) = \Phi(w)\Phi([u]) = \Phi(w)[u]$ と定義すると $\hat{\Phi}$ は、$G/\mathcal{O}_\Phi(e_1)$ 上で定義されタイプ１である。

(b) $\{u,\ v\} \cap V_1 = \emptyset$ のとき、$e_1 \cap \Phi(e_1) = \emptyset$ であり、$\mathcal{O}_\Phi(e_1) = \{e_1,\ e_2\} = \{e_1,\ \Phi(e_1)\}$ である。　$G/\mathcal{O}_\Phi(e_1)$ では $[e_1] = [u],\ [\Phi(e_1)] = [\Phi(u)]$. そこで $\hat{\Phi}([u]) = [\Phi(u)]$ とおく。f を u 又は v に端点を持つ辺とし、f のもう１つの端点を w とする。$\Phi(w)$ は既に定義されているので $\hat{\Phi}([f]) = \hat{\Phi}([u])\Phi(w)$ とすると $\hat{\Phi}$ はタイプ１の自己同形である。(図 1-2)

2. Φ がタイプ２のとき、 $ord\ \Phi = 2$ だから $p = 0$ 又は 1 である。

(A) $p = 0$ のとき、すなわち $\Phi(e) = e$ のとき、$\partial e = \{u,\ v\}$ とおく。　タイプ２の条件２より $e \in G_1$ と言う事はない。従って $\Phi : u \longleftrightarrow v$ である。そこで $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ では $[e] = [u] = \{u,\ v\}$. そこで $\hat{\Phi}([u]) = [u]$ とおく。u または v を端点とする辺を f とする。 f の他の端点を w とすると $\Phi(w)$ は既に定義されている。$\hat{\Phi}(f) = [\Phi(f)] = \Phi(w)[u]$ と定義する。その他の辺（即ち $u,\ v$ のいずれも端点に持たない辺） g に対しては $\hat{\Phi}(g) = g$ と定義すると $\hat{\Phi}$ は（一般化された）タイプ２の自己同型になる。

(B) $p = 1$ のとき、すなわち $\mathcal{O}_\Phi(e_1) = \{e_1,\ e_2\}$ のとき

(a) e_1 と e_2 が隣接しているとき、$\partial e_1 = \{u,\ v\},\ \partial e_2 = \{v,\ w\}$ とおくと $w = \Phi(u)$ であり、$G/\mathcal{O}_\Phi(e_1)$ では $[e_1 \cup e_2] = [e_1] = [e_2] = [u]$ である。　そこで $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ 上の自己同型 $\hat{\Phi}$ を先ず $\hat{\Phi}([u]) = [u]$ とする。$u,\ v,\ w$ のいずれかを１つの端点にもつ辺を f とし、f のもう１つの端点を z とする。$\Phi(z)$ は定義されているので $\hat{\Phi}(f) = \Phi(z)[u]$ と定義する。端点として $u,\ v,\ w$ のいづれをも持たない辺 g に対しては $\hat{\Phi}(g) = \Phi(g)$ と定義すると $\hat{\Phi}$ は $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ 上のタイプ２の自己同型である。

(b) e_1 と e_2 が隣接していないとき、$\partial e_1 = \{u_1,\ v_1\},\ \partial e_2 = \{u_2,\ v_2\}$ とすると、 $u_2 = \Phi(u_1),\ v_2 = \Phi(v_2)$ であり、$G/\mathcal{O}_\Phi(e_1)$ では $[e_1] = [u_1],\ [e_2] = [u_2],\ [e_1] \neq [e_2]$. $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ 上の自己同型 $\hat{\Phi}$ を $\hat{\Phi} : [u_1] \longleftrightarrow [u_2]$ とし、辺 f は u_1 又は v_1 を端点としてもつ辺とし f のもう１つの端点を w とおく。　（$w = u_2$ 又は $w = v_2$ という事もあり得る。） $\Phi(w)$ は定義されている（$w = u_2$ 又は $w = v_2$ の時は $\Phi(w) = \hat{\Phi}([u_2]) = [u_1]$ ）. $\hat{\Phi}(f) = \hat{\Phi}([u_1])\Phi(w) = [u_2]\Phi(w)$ と定義する。 f' が u_2 又は v_2 を端点として持つ辺のときは f' のもう１つの端点を w' とすると $\Phi(w')$ は定義されており

$\hat{\Phi}(f') = \hat{\Phi}([u_2])\Phi(w') = [u_1]\Phi(w')$ で定義する。$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2$ のいずれをも端点に持たない辺 g に対しては $\hat{\Phi}(g) = \Phi(g)$ で定義する。 $\hat{\Phi}$ は $G/\mathcal{O}_\Phi(e_1)$ 上のタイプ 2 の自己同型である。
3.Φ がタイプ 3 の自己同形の時も同様に $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ に対し $\hat{\Phi}$ がタイプ 3 として Φ から構成出来る。

図　　1

これだけでは G が intrinsically chiral な（i.e. G はタイプ 1, 2, 3 の自己同型を持たない）グラフには対応出来ない。そこで次に type 1,2,3 の自己同形を持たないグラフへの対処を述べます。

Definition 4 G をグラフとし、T を $E(G)$ の部分集合とする。T が *achirally embeddable* に関する *obstruction edge set* とは

1. $G - T$ 又は G/T が *achirally embeddable (*$T = \emptyset$ でも良い*)* である。

2.$|T| > 0$ のとき、$|S| < |T|$ となる $E(G)$ の任意の部分集合 S に対し、$G - S$ も G/S も *intrinsically chiral* である。

Definition 5 G が *intrinsically chiral* のとき、任意の *obstruction edge set* T に対し、$G - T$ 又は G/T は *type 1,2,* 又は *3* の自己同形 Φ をもつ。
$G - T$ が Φ を持つとき, 任意の辺 $e \in E(G - T)$ に対し $G - \mathcal{O}_\Phi(e)$ かつ $G/\mathcal{O}_\Phi(e)$ が *achirally embeddable.*　また、G/T が Φ をもつときは、任意の辺 $e \in E(G/T)$ に対し $G - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ かつ $G/c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ が *achirally embeddable* のとき G は *achiral minor minimal* という。ここで $c : G \longrightarrow G/T$ は *contraction map* である。

これで「intrinsically chiral に関し極小集合 (achiral minor minimal set) を決定せよ。」という問題設定が出来ることになった。(Problem 2 に対する回答)

Proposition 3 K_6 の *minor* には *intrinsically chiral* なグラフは無い。

証明.　先ず K_6 はタイプ 1　と タイプ 3 の自己同型を持つ。$e \in E(K_6)$ とすると、$K_6/\{e\}$ は K_5 の２重辺化したグラフである。K_5 の１辺でも２重辺化すると、ある平面 $P \subset R^3$ に関し上下対称に置け、従って、タイプ１の自己同型をもつ。次に $(K_6/\{e_1\})/\{e_2\}$ は K_4 の多重辺化 又は e_2 が $K_6/\{e_1\}$ で２重辺化した辺の１辺ならループも持つ。いずれにしろ $(K_6/\{e_1\})/\{e_2\}$ は平面グラフになるので achirally embeddable である。従って K_6 の minor としては辺の除去だけを考えればよい。　図２-1 の K_6 から achirally embeddable になるように辺を都合よく除いていく。除去する辺のパターンは図 2-2 にリストしてある。又 K_6 からあるパターンを除去すると平面的グラフになる場合、そのパターンを部分グラフに含むパターンを除いてもやはり平面的グラフになる。この方法により５辺除去パターンは全てそれを K_6 から除くと平面的グラフになる事がわかる。従って K_6 から６辺以上を除くと全て平面的グラフになり、従って achirally embeddable になる。

図　　２－１

図　　２－２

Proposition 4 K_7 は *intrinsically chiral ([4])* で *achiral minor minimal* である。

証明。Flapan-Weaver([4]) によって K_7 は intrinsically chiral である事がしめされている。$e_0 \in E(K_7)$ とすると、$K_7 - \{e_0\}$ はタイプ１とタイプ３の

自己同型を持ち、タイプ２の自己同型は持たない。$K_7/\{e_0\}$ は K_6 の２重辺化グラフ （２重辺は $K_7/\{e_0\}$ の頂点 [1] から出ている全ての辺が２重辺になっている）。左下図の [1] から出ている全ての辺を２重辺化する事により $K_7/\{e_0\}$ はタイプ１の自己同型を持つ。タイプ２とタイプ３の自己同型は持たない。

図　　3

$G = K_7 - \{e_0\}$ がタイプ１の自己同型を持つとき $\Phi = (5\ 7)$ として一般性を失わない（他のタイプ１の自己同型は Φ と共役になる）。
$e_1 = 56$ のとき、 $H_1 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_1)$ は $\Psi = (1\ 2)$ というタイプ１の自己同型をもつ。 $e_1 = 34,\ e_1 = 13$ としても同様である。
$e_2 = 25$ のとき、 $H_2 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_2)$ は $\Psi = (1\ 3)$ というタイプ１の自己同型をもつ。
$e_3 = 57$ のとき、 $H_3 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_3) = K_7 - \{e_3\}$ は $\Psi = (4\ 6)$ というタイプ１の自己同型をもつ。
$e_4 = 35$ のとき、 $H_4 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_4)$ は $\Psi = (4\ 6)$ というタイプ１の自己同型をもつ。
以上より equivariant なものと対称なものを除いて任意の辺 $e \in E(G)$ に対し $H = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e)$ は achirally embeddable である。
$K_7/\mathcal{O}_\Phi(e)$ は証明の初めのコメントと命題３から achirally embeddable である。
次に $G = K_7 - \{e_0\}$ 上にタイプ３の自己同型があるときを考える。 $\Phi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)$ として一般性を失わない。
$e_5 = 45$ とすると $|\mathcal{O}_\Phi(e_5)| = 4.$ $H_5 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_5)$ は $\Psi = (4\ 6)(5\ 7)$ 又は $\Psi = (4\ 5)(6\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_6 = 14$ とすると $|\mathcal{O}_\Phi(e_6)| = 4.$ $H_6 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_6)$ は $\Psi = (5\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_7 = 13$ とすると $|\mathcal{O}_\Phi(e_7)| = 2.$ $H_7 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_7)$ は $\Psi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)$ というタイプ３の自己同型を持つ。

$e_8 = 34$ とすると $|\mathcal{O}_\Phi(e_8)| = 4$. $H_8 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_8)$ は $\Psi = (6\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_9 = 46$ とすると $|\mathcal{O}_\Phi(e_6)| = 2$. $H_9 = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e_9)$ は $\Psi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)$ というタイプ３の自己同型を持つ。
以上で equivariant なものを除いて、任意の辺 $e \in E(K_7 - \{e_0\})$ に関しタイプ３の自己同型 Φ に対し、$H = K_7 - \mathcal{O}_\Phi(e)$ は achirally embeddable である。
以上と次の Lemma から K_7 が achiral minor minimal である事が示された。

Lemma 4 $G = K_7/\{e_0\}$ がタイプ１の自己同型 Φ を持つとき、任意の辺 $e \in E(G)$ に対し、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ 及び $K_7/c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ は *achirally embeddable* である。

証明。 Φ はタイプ１なので $|\mathcal{O}_\Phi(e)| = 1$ 又は 2 ($K_7/\{e_0\}$ は多重辺をもつグラフである)。　従って $|c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e)| = 1$ または 2.
先ず、$K_7/c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ は高々６個の頂点を持つので命題４の証明の初めのコメントと命題３から achirally embeddable である。
次に $K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ が achirally embeddable である事を示す。$K_7/\{e_0\}$ 上のタイプ１の自己同型を $\Phi = (4\ 6)$ として一般性を失わない。
$e_1 = [1]3$ のとき　（２重辺の１本） $\Phi(e_1) = e_1'$ （ここで e_1' は２重辺のもう１本）であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_1)) = \{13, 23\}$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_1))$ は $\Psi = (1\ 2)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_2 = [1]5$ のとき　（２重辺の１本） $\Phi(e_2) = e_2'$ （e_2' は２重辺のもう１本）であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_2)) = \{15, 25\}$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_2))$ は $\Psi = (4\ 6)$ というタイプ１の自己同型を持つ。$e_2 = [1]7$ も同様
$e_3 = [1]4$ のとき　（２重辺の１本） $\Phi(e_3) = [1]6$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_3)) = \{14, 16\}$ 又は $\{14, 26\}$ となり、どちらの場合も $K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_3))$ は $\Psi = (5\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_4 = 37$ のとき　$\Phi(e_4) = e_4$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_4)) = 37$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_4))$ は $\Psi = (4\ 6)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_5 = 57$ のとき　$\Phi(e_5) = e_5$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_5)) = 57$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_5))$ は $\Psi = (4\ 6)$ 又は $(5\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_6 = 46$ のとき　$\Phi(e_6) = 65$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_6)) = \{45, 65\}$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_6))$ は $\Psi = (1\ 2)$ というタイプ１の自己同型を持つ。　$e_6 = 47$

も同様
$e_7 = 34$ のとき　$\Phi(e_7) = 36$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_7)) = \{34, 36\}$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_7))$ は $\Psi = (5\ 7)$ 又は $(4\ 6)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
$e_8 = 46$ のとき　$\Phi(e_8) = e_8$ であり、$c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_8)) = 46$ となり、$K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e_8))$ は $\Psi = (5\ 7)$ というタイプ１の自己同型を持つ。
以上で equivariant なものを除いて、任意の辺 $e \in E(K_7/\{e_0\})$ に関しタイプ１の自己同型 Φ に対し、$H = K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ 及び 、$H = K_7/c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ は achirally embeddable である。
Lemma の結論は次のことを示している。 $K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ は K_7 に含まれている３つの K_5 i.e. $< 1, 2, 3, 5, 7 >, < 1, 2, 3, 4, 6 >, < 3, 4, 5, 6, 7 >$ から少なくとも１本の辺を除去している。すると、その $K_5 - \{e\}$ は平面グラフとなり、そこに残りの２点から懸垂を作る事により $K_7 - c^{-1}(\mathcal{O}_\Phi(e))$ 上にタイプ１の自己同型が出来る。

Proposition 5 *([6])* $K_{3,3,2}$ は *intrinsically chiral* で *achiral minor minimal* である。

図　　4

Proposition 6 K_{11} は *intrinsically chiral ([4])* であるが *achiral minor minimal* ではない。

証明。$e_0 = 12$ とし、 $G = K_{11} - \{e_0\}$ とおく。先ず G はタイプ３の自己同型 $\Phi = (1\ 2)(4\ 6\ 8\ 10)(5\ 7\ 9\ 11)$ を持つがタイプ１及びタイプ２の自己同型を持たないことがわかる。
次に $e_1 = 13$ とおくと、$\Phi(e_1) = 23$ なので $H = K_{11} - \mathcal{O}_\Phi(e_1)$ とおく。H が intrinsically chiral であることを示す。
$deg_H 1 = deg_H 2 = 9,\ deg_H 3 = 8,\ deg_H k = 10\ (k = 4 \sim 11)$ だから H がタイプ１、２又は３の自己同型 Ψ を持つとすると $3 \in V_1$ また $|V_1| = odd$ だか

ら
「$\{1,2\} \subset V_1$」　又は「$\{1,2\} \cap V_1 = \emptyset$ で $\Psi : 1 \longleftrightarrow 2$」 である。
先ず $\{1,2\} \subset V_1$ とすると、 $|V_1| \geq 3$. 従ってタイプ２とタイプ３の条件３を満たさないので Ψ はタイプ２とタイプ３ではない。Ψ がタイプ１とすると条件２より $|V_1| \leq 5$. よって $|W_2| = |W_2'| \geq 3$. しかも任意の $k \in W_2 \cup W_2'$ に対し $deg\ k = 10$. よって条件３を満たさない。故に Ψ はタイプ１でもあり得ない。
次に $\{1,2\} \cap V_1 = \emptyset$, $\Psi : 1 \longleftrightarrow 2$ の場合。　Ψ がタイプ１とすると $|V_1| \leq 4$ で奇数。従って $|W_2| = |W_2'| \geq 4$. よって条件３を満たさない。Ψ がタイプ２又はタイプ３とすると $V_1 = \{3\}$. このとき条件３を満たさない。以上より $H = K_{11} - \mathcal{O}_\Phi(e_1)$ は intrinsically chiral であり、故に K_{11} は achiral minor minimal でない。

Remark 3 グラフ G が *intrinsically chiral* なら *non-planar* である。一方 K_5, $K_{3,3}$ は *achirally emdeddable* である。

Proposition 7 K_5, $K_{3,3}$ の細分から得られる次の６つの例 $J_1 \sim J_6$ は *intrinsically chiral* で、J_2 以外は *achiral minor minimal* である。J_2 は *achiral minor minimal* でなく、これに関しては *[10]* で述べる。

図　　5

3　ΔY-move について

この節では intrinsically chiral, achirally embeddable という性質は ΔY, YΔ-move で遺伝するか否かを考える。
この節のグラフは特に断らない限り単純グラフとする。

Proposition 8 グラフ G は *intrinsically chiral* とし、G からグラフ H へ１回の ΔY*-move* で移ったとする。H の新しい頂点 u に対し $\Phi(u) = u$ となる H のタイプ１，２又は３の自己同形 Φ は無い。

証明。ΔY-move を行う３－サイクルを $v_1v_2v_3$ とし、ΔY-move の結果出来た新しい頂点を u とする。Φ を H 上のタイプ１、２　又は　３　の自己同型で $\Phi(u)=u$ となるものとする。$ord\,\Phi = even$ だから $\{v_1,v_2,v_3\}\cap V_1=\emptyset$ と言う事はない。そこで例えば $v_3\in V_1$ とすると $uv_3\in E(H)$ だから Φ はタイプ２、３という事はない　（タイプ２，３の条件２を満たさない)。そこで Φ はタイプ１であるとすると $ord\,\Phi=2$ だから $\{v_1,v_2,v_3\}$ の内 V_1 に含まれるのは１点のみか３点全てである。いずれの場合も $\Phi(u)=u$ をみたす H 上のタイプ１の自己同型 Φ から G 上のタイプ１の自己同型 $\tilde{\Phi}$ が作られ、G が intrinsically chiral であるという仮定に矛盾する。

Corollary 1 グラフ G, H は上の *Proposition* と同じとする。G の任意の頂点 v に対し $val(v)\geq 4$ ならば、H は *intrinsically chiral* である。

証明。H の次数が３の頂点は u 及び高々 $\{v_1,v_2,v_3\}$ のいずれかである。もし $\{v_1,v_2,v_3\}$ のうち２点以上の次数が３なら隣接３頂点の内２点以上の次数が３なのは u のみ（何故なら任意の頂点 $v\in V(G)$ で $degv\geq 4$)。従ってこの時タイプ１、２、又は３の自己同型 Φ があると $\Phi(u)=u$ となり、命題　８に矛盾。そこで $\{v_1,v_2,v_3\}$ の内１点のみ、例えば $deg_H v_1=3$ とすると $deg_H v_1 = deg_H u = 3$. もし H 上にタイプ１，２、又は３の自己同型があり、u が Φ の固定頂点となると命題８に矛盾するので $\Phi: u\longleftrightarrow v_1$. すると Φ により (1) 「$v_2\longleftrightarrow w_2,\ v_3\longleftrightarrow w_3$」 又は (2) 「$v_2\longleftrightarrow w_3,\ v_3\longrightarrow w_2$」, ここで $w_2,\ w_3$ は v_1 に隣接している u 以外の２頂点。いずれの場合も G のタイプ１，２、又は３の自己同型 $\tilde{\Phi}$ が作れて条件に反する。（ここで $\tilde{\Phi}(v_1)=v_1$ である。）　以上より H は intrinsically chiral である。

Corollary 2 グラフ G はタイプ１の自己同形を持たないとし、G からグラフ H へ１回の ΔY*-move* で移ったとする。G の任意の頂点 v に対し、$val(v)\geq 5$ なら、H は *intrinsically chiral* である。

証明。　H の次数３の頂点は新しい頂点 u のみである。従って H がタイプ１、２又は３の自己同型 Φ を持ったとすると $\Phi(u)=u$.　また命題８の証明と同様にして Φ がタイプ２、３と言う事はない。そこで Φ がタイプ１とすると G もタイプ１の自己同型 $\tilde{\Phi}$ を持つ事になり仮定に矛盾

Example 1 グラフ H は８頂点完全グラフ K_8 から１回の ΔY*-move* で得られたグラフとすると、上の *Cor. 2* より *intrinsically chiral* である。

従って、achirally embeddable という性質は一般に ΔY-move で遺伝しない。

次の例は intrinsically chiral という性質が ΔY-move で遺伝しない例である。 3-サイクル stz で ΔY-move を行う。
図　6は intrinsically chiral であるが３－サイクル stz で ΔY-move を行うと頂点 $\{p,\ u,\ v_3,\ z,\ v\}$ を含む平面での折り返し（タイプ　1）を持つ、ここで v は ΔY- move から出てくる新しい頂点。従って、achirally embeddable になる。

図　6

Definition 6 グラフ G はタイプ１，２または３の自己同形 Φ をもつ単純グラフとする。C を G の３サイクルとし、$V(C) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ とおく。辺 $e_1 = v_1v_2,\ e_2 = v_2v_3,\ e_3 = v_3v_1$ とおく。$\mathcal{O}_\Phi(C) = \{C,\ \Phi(C),\ ..., \Phi^{2^n-1}(C)\}$ を C の *orbit* とする。D_k を $\{\Phi^{k-1}(v_1),\ \Phi^{k-1}(v_2),\ \Phi^{k-1}(v_3), u_k\}$ を頂点とする Y 字形とする。ここで u_k は新しい頂点。

$$H = \left(G - \bigcup_{k=0}^{2^n-1} (\Phi^k(e_1) \cup \Phi^k(e_2) \cup \Phi^k(e_3))\right) \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} \left(\Phi^{k-1}(v_1)u_k \cup \Phi^{k-1}(v_2)u_k \cup \Phi^{k-1}(v_3)u_k\right)$$

とかき、H は G から $\mathcal{O}_\Phi(C)$ において *equivariant* ΔY*-move* により得られたという。
また、u_1 を $val(u_1) = 3$ の頂点とし、 u_1 に隣接している３頂点を $v_1,\ v_2,\ v_3$ とする。Y 字形 $D_1 =< v_1\ v_2\ v_3\ u_1 >$ とする。辺 $f_1 = v_1u_1,\ f_2 = v_2u_1,\ f_3 = v_3u_1$ とおく。
$\mathcal{O}_\Phi(D_1) = \{D_1,\ \Phi(D_1),\ ..., \Phi^{2^n-1}(D_1)\}$ である。

$$H = \left(G - \bigcup_{k=0}^{2^n-1} (\Phi^k(f_1) \cup \Phi^k(f_2) \cup \Phi^k(f_3))) \cup \Phi^k(u_1))\right) \bigcup_{k=1}^{2^n-1} \left(\Phi^k(v_1)\Phi^k(v_2) \cup \Phi^k(v_2)\Phi^k(v_3) \cup \Phi^k(v_3)\Phi^k(v_1)\right)$$

とおく。
H は G から $\mathcal{O}_\Phi(D_1)$ において *equivariant* $Y\Delta$*-move* により得られたという。

Proposition 9 グラフ G はタイプ *1, 2* 又は 3の自己同形 Φ をもつとする。C を G の3サイクルとする。$U = V(C) = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ とする。グラフ H は G から $\mathcal{O}_\Phi(C)$ で *equivariant* ΔY*-move* で得られるとする。更に Φ がタイプ2又は3で $|U \cap V_1| = 1$ のとき、$\Phi : v_k \longleftrightarrow v_l$ $(\{v_k,\ v_l\} = U - V_1)$ ではないとする。すると、H もタイプ1，2、又は3の自己同形 $\hat{\Phi}$ をもつ。

Proposition 10 グラフ G はタイプ *1, 2* 又は 3の自己同形 Φ をもつとする。D を G の Y 字形とする。グラフ H は G から $\mathcal{O}_\Phi(D)$ で *equivariant* $Y\Delta$*-move* で得られるとする。更に Φ がタイプ1のとき、$U = \{v_1, v_2, v_3\}$ として $|U \cap V_1| = 2$ かつ、$E(D) \cap G_1 \neq \emptyset$ ではないとする。ここで、G_1 は Φ の固定頂点で張られる G の部分グラフ。すると、H もタイプ1，2、又は3の自己同形 $\hat{\Phi}$ をもつ。

Definition 7 グラフ G は *intrinsically chiral* なグラフのとき、$T \subset E(G)$ を *achiral embeddability* に関する *obstruction edge set* とする。$K := G - T$ とおく。K にはタイプ1，2又は3の自己同形 Φ が存在する。グラフ H は K から *equivariant* ΔY *(*又は $Y\Delta$*)-move* で得られたとする。このとき、$G' = H \cup T$ とかき、G' は G から *equivariant* ΔY *(*又は $Y\Delta$*)-move* で得られたという。ただし、$Y\Delta$*-move* のとき、$e \in T$ で e の端点が $Y\Delta$*-move* を行う K の次数3の頂点 u になっている時は $\mathcal{O}_\Phi(D_1)$ における *equivariant* $Y\Delta$*-move* は行わないとする。

K_7 が intrinsically chiral で achiral minor minimal であることは命題4で示したが、 次のように K_7 から equivariant ΔY-move で得られるグラフで intrinsically chiral かつ achiral minor minimal なものがある。

Proposition 11 図3の K_7 から *equivariant* ΔY*-move* で得られる次の3つのグラフは *intrinsically chiral* であり、*(1)* と *(2)* のグラフは同形になる。そして（1）は *achiral minor minimal* でない。*(3)* は *achiral minor minimal* である。*(*K_7 から、*equivariant* ΔY*-move* 一回で得られるその他の グラフは *achirally embeddable* になる。）　以下、$T = \{e_0\},\ e_0 = 12$ を *obsruction edge set* とする。
(1) タイプ1の自己同型 $\Phi = (5\ 7)$ で3サイクル $C = [257]$ に *equivariant*

ΔY-変形を施して得られたグラフ.
(2) タイプ１の自己同型 $\Phi = (5\ 7)$ で３サイクル $C = [134]$ に *equivariant* ΔY-変形を施して得られたグラフ.
(3) タイプ *3* の自己同型 $\Phi = (1\ 2)(4\ 5\ 6\ 7)$ で３サイクル $C = [146]$ に *equivariant* ΔY-変形を施して得られたグラフ.

Proposition 12 *([6])* 図７の $K_{3,3,2}$ から *1* 回の *equivariant* ΔY*-move* で得られるグラフで *achiral minor minimal* なものが１つある。

図　　7

4　T-minimal graph について

2003 年９月に甲南大学でシンポジュウムがあり、その折谷山氏（早稲田大教育）から次のような質問がありました。
「intrinsically chiral なグラフ G が intrinsically chiral に関し minor minimal であるとは、G の任意の (proper) minor graph が achirally embeddable のときと定義したら、この定義は achiral minor minimal の定義と同じか否か」

$K_7 > J_2, K_{3,3,2} > J_4$ ですから、命題４，５から K_7, $K_{3,3,2}$ は achiral minor minimal ですが上の谷山氏の意味での minor minimal ではありません。したがって別の minor minimal の世界が広がりますが、興味ある提案でしたので以下これについて述べます。上記谷山氏の意味での minor minimal を T-minimal という事にします。

次の命題１３は定義から明らかである。

Proposition 13 グラフ G が *T-minimal* ならば *achiral minor minimal* である。*(K_7, $K_{3,3,2}$ の例のごとく逆は成立しない。)*

Proposition 14 完全グラフ K_5 の４辺を１回づつ細分したグラフには、*intrinsically chiral* なものはあっても *T-minimal* なものは無い。

証明。 K_5 の細分すべき４辺のパターンは次の (a)∼ (f) （図 ８）である。

図　　8

K_5 の辺は全て対称な位置にあるので パターン (a)∼ (f) をどこに配置しても同じである。　図 ９　のようにして、

(a) は intrinsically chiral であるが T-minimal でない。

(b) は achirally embeddable である。

(c) は achirally embeddable である。

(d) は achirally embeddable である。

(e) は achirally embeddable である。

(f) は achirally embeddable である。

図　　9

以上の achirally embeddable なグラフは全てタイプ１の自己同型を持つ。ゆえに K_5 の４辺を各１回細分したグラフは、 intrinsically chiral なグラフは

あっても T-minimal でない事が示された。

Proposition 15 *Proposition 7* の６つの例（図５）は *intrinsicallly chiral* であるが J_1, J_4, J_6 のみが *T-minimal* になっている。J_2, J_3, J_5 は *T-minimal* にはならないが、これに関しては、別の機会に述べる *[10]*。

参考文献

[1] Arai, M.: On the chirality of typical graphs and their chromatic polynomial, Master Thesis (In Japanese), Tokyo Woman's Christian Univ. (2003)

[2] Conway, J. and Gordon, C. : Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983) 445-453

[3] Flapan, E : When topology meets chemistry, Cambridge University Press (2000)

[4] Flapan, E. and Weaver, N. : Intrinsically chiral complete graph, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 233-236

[5] ibid : Intrinsic chirality of 3-connected graphs, J.Combin. Theory B 68 (1996), 223-232

[6] Kaneko, C. : Master Thesis, Tokyo Woman's Christian University. (2004)

[7] Motohashi, T. and Taniyama, K. : Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in $\mathbf{R}^3$, Proc. Knots 96 (1996) World Scientific, 185-200

[8] Robertson, N., Seimour, P. and Thomas, R. : Sacks' linkless embedding conjecture, J. Comb. Theory Ser. B 64 (1995) 185-227

[9] Sacks, H. : On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs - an open problem, Lecture Note in Math. vol. 1018 Springer Verlag (1983) 230-241

[10] Kobayashi, K and Okamoto, M: A list of T-minimal graphs, In preparation.