$Aut(K_n)$ の元を空間実現する空間グラフについて

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics,
College of Arts and Sciences,
Tokyo Woman's Christian University

2003年　2月

1　Introduction

この論文では、完全グラフ K_n の自己同形群 $Aut(K_n)$ の元のうち空間実現可能なものの全てを実現するためには空間グラフが最低何個必要かを調べた。(up to unlabelled embedding and homeomorphism of $\mathbf{R}^3$.)

定義 1 $\phi \in Aut(K_n)$ が空間実現可能 *(spatially realizable)* とは、

$f \circ \phi = \alpha \circ f$ を満足する 埋め込み $f : K_n \longrightarrow \mathbf{R}^3$と同相写像 $\alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が存在するときをいう。

$SR(K_n) = \{\phi \in Aut(K_n) | \phi$は空間実現可能 $\}$ とする。

定義 2 埋め込み $f : K_n \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を一つ固定したとき、$\tilde{K}_n^f := f(K_n)$ として

$TSG(\tilde{K}_n^f) = \{\phi \in Aut(K_n) | \exists homeo\ \alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 such\ that\ \alpha \circ f = f \circ \phi\}$ とする。この $TSG(\tilde{K}_n^f)$ を 空間グラフ $\tilde{K}_n^f$ の位相的対称群という。

注 1 位相対称群 $TSG(\tilde{K}_n^f)$ は $Aut(K_n)$ の部分群になるが、$SR(K_n)$ は $Aut(K_n)$ の部分群にならず、単なる部分集合である。

例 1 $n = 4$ のとき、$Aut(K_4) \cong \mathcal{S}_4$ の全ての元は図１のような K_4 の空間グラフを使って実現できる。

図　　１.

例 2 $n = 5$ のとき、$Aut(K_5) \cong \mathcal{S}_5$ の全ての元は図２のような K_5 の空間グラフ $\tilde{K}_5^*$ を使って実現できる。

実際、５次の対称群 $\mathcal{S}_5 =< (12), (13), (14), (15) | *** >$ と表示したとき、全ての生成元が $TSG(\tilde{K}_5^*)$ に含まれることを示せば良い。よって $TSG(\tilde{K}_5^*) \cong \mathcal{S}_5$ も示せた。([K 定理 5.3.6])

図　２.

命題 1 *(Flapan [F])* $n \geq 6$ のとき、置換 $(1234) \in Aut(K_n)$ 及び、その共役元は空間実現できない。

定理 1 $SR(K_6)$ は K_6 の標準空間表現 $\tilde{K}_6^*$ *(*ラベルは無視してよい。）１つだけでは実現出来ない。

証明。K_6 上には disjoint 3-cycles の対が１０組 $\gamma_i = (C_i^{(1)}, C_i^{(2)})$ $(i = 1, 2, ..., 10)$ あるが、その内 $\tilde{K}_6^*$ 上で *linking number* $= 1$ となるのが１組だけあり、残りは *linking number* $= 0$. そこで $lk(\tilde{\gamma}_1) = 1$, 残り、$lk(\tilde{\gamma}_i) = 0$ $(i = 2, 3, ..., 10)$ とする。$C_1^{(1)} = [j_1, j_2, j_3]$, $C_1^{(2)} = [j_4, j_5, j_6]$ とすると $\{j_1 \sim j_6\} = \{1, 2, ..., 6\}$ で $\phi(\gamma_1) = \gamma_1$ とする $\phi \in Aut(K_6)$ は $\phi_1(C_1^{(1)}) = C_1^{(1)}, \phi_1(C_1^{(2)}) = C_1^{(2)}$; または $\phi_2(C_1^{(1)}) = C_1^{(2)}, \phi_2(C_1^{(2)}) = C_1^{(1)}$ のどちらか。$\phi_1 \in \mathcal{S}_3$ であり、$\phi_2 \in Iso(\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5, 6\})$ 従って ϕ_1 は $\mathbf{3-3}$, $\mathbf{3-2}$, $\mathbf{2-2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{id}$. のいずれかのタイプ、又 ϕ_2 は $\mathbf{6}$, $\mathbf{4-2}$, $\mathbf{3-3}$ のいずれかのタイプ（固定頂点なし）。そこで ϕ として $\mathbf{5}$ タイプのものを取ると ϕ は $\mathbf{5}$ タイプだから $\phi \in SR(K_6)$ であって $\phi(\gamma_1) = \gamma_i$ $(i = 2, 3, ..., 10)$. これは矛盾。つまり、ϕ は（どのようにラベルをつけようとも）標準空間グラフ $\tilde{K}_6^*$ を使っては空間実現出来ない。 □

注 2 *Flapan* の証明 *[F2 p.179]* では、$\phi = (14)$ と取れる保証は無い。$\phi = \mathbf{4}$ タイプという事もありうる。また、小林 *[K. Thm 5.3.8]* の証明でも $\phi \in SR(K_6)$ という事を示す事が出来ない。（*Thm 5.3.8* 自身は正しい）。

命題 2 $Aut(K_n) \cong \mathcal{S}_n \ni \phi$ を巡回置換として表したとき、

ϕ が空間実現可能 $\Longleftrightarrow$ ϕ と共役な元 ψ も空間実現可能

実際、ϕ が $\tilde{K}_n^f$ で空間実現可能 $\Longleftrightarrow$ ψ は $|\tilde{K}_n^f| = |\tilde{K}_n^g|$ となる $\tilde{K}_n^g$ で実現可能。ここで、$|\tilde{K}_n^f|$ は $\tilde{K}_n^f$ のラベルを無視したもの。

証明。ϕ が空間実現可能だから $\alpha \circ f = f \circ \phi$ 　を充たす埋め込み $f : K_n \longrightarrow \mathbf{R}^3$ と同相写像 $\alpha : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ がある。ψ は ϕ と共役なので $\tau \in \mathcal{S}_n$ に関し $\psi = \tau\phi\tau^{-1}$ と書ける。そこで埋め込み $g : K_n \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を $g = f \circ \tau^{-1}$ とおく（つまり $\tilde{K}_n^f$ と $\tilde{K}_n^g$ は $|\tilde{K}_n^f| = |\tilde{K}_n^g|$ であって頂点番号が変わっている)。すると $g \circ \psi = (f \circ \tau^{-1})(\tau \circ \phi\tau^{-1}) = f \circ \phi \circ \tau = \alpha \circ f \circ \tau^{-1} = \alpha \circ g$. 故に ψ は埋め込み g と同相写像 α で空間実現される。逆も同様である。 □

注 3 $\tilde{K}_n^f$ と $\tilde{K}_n^g$ はラベルを保存する $\mathbf{R}^3$ の向きを保つ同相写像または向きを逆にする同相写像で移りあうときもあれば移りあわない事もある。

$(\pm) - homeo$ で移りあうなら $\psi \in TSG(\tilde{K}_n^f)$

$(\pm) - homeo$ で移り合わないなら $\psi \notin TSG(\tilde{K}_n^f)$

$n \geq 7$ のとき、$SR(K_n)$ については次の定理がある。

命題 3 *(Flapan [F1])* $\phi \in Aut(K_n)$ $(n \geq 7)$ の位数を m とする、$ord\ \phi = m.$ ϕ が $\mathbf{R}^3$ の向きを保つ同相写像で空間実現される必要十分条件は次の (1) ∼ (4) のいずれかが成り立つことである。

(1) $m = even,\ m \geq 4$ で ϕ の全ての *orbit* が *order* m をもつ。　$n = pm.$

(2) $m = 2$ で ϕ の全ての *non-trivial orbits* が *order* m をもち、高々２つの固定頂点をもつ。$n - 2p = 0, 1 or\ 2.$

(3) $m = odd$ で ϕ の全ての *non-trivial orbits* は *order* m をもち、高々３つの固定頂点をもつ。$n - pm = 0, 1, 2 or\ 3.$

(4) $m = 3q$ $(q:\ odd), m > 3$ で ϕ の全ての *orbits* は１つ以外は *order* m をもち、その１つの例外は *order* 3 をもつ。　$n = 3pq + 3 = pm + 3$

また、$\phi \in Aut(K_n)$ が $\mathbf{R}^3$ の向きを逆転する同相写像で空間実現される必要十分条件は次の *(5)* が成り立つことである。

(5) $m = 4$ で「ϕ の全ての *non-trivial orbits* が *order* 4 をもち、高々１つの固定頂点をもつ」または「ϕ の全ての *orbits* が１つ以外は *order* 4 で、その１つの *orbit* は *order* 2 である」

$Aut(K_6)$ に関しては **4** タイプ（= (1234) 及びその共役元全体）以外は全て空間表現可能なので

$$SR(K_6) = Aut(K_6) - \{\text{長さ４の cycles の全体}\}$$

$SR(K_6)$ の元を置換の元のタイプで書くと以下の９つ

$$\mathbf{6},\ \mathbf{5},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4-2},\ \mathbf{3-3},\ \mathbf{3-2},\ \mathbf{2-2-2},\ \mathbf{2-2}$$

図３の左図を $\tilde{K}_6^f$ とおくと [K] より $\tilde{K}_6^f$ は K_6 の標準空間表現であり、

$(13),\ (15),\ (24),\ (26),\ (12)(34)(56) \in TSG(\tilde{K}_6^f)$ であり、
$(12),\ (14),\ (16) \notin TSG(\tilde{K}_6^f)$ である。
$(13)(15) = (135),\ (135)(246) \in TSG(\tilde{K}_6^f)$ なので命題２より
$\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2-2},\ \mathbf{2-2-2},\ \mathbf{3-2}$ タイプが　$|\tilde{K}_6^f|$ で空間実現可能
また、$(135)(24) \in TSG(\tilde{K}_6^f)$ より タイプ $\mathbf{3-2}$ も $|\tilde{K}_6^f|$ で空間実現可能

$(13)\cdot(12)(34)(56) = (1432)(56) \in TSG(\tilde{K}_6^f)$ よりタイプ $\mathbf{4-2}$ も $|\tilde{K}_6^f|$ で空間実現可能
$\sigma = (163254)$ とおくと $\sigma^2 = (135)(624) = (13)(15)(24)(26),\ \sigma^3 = (12)(65)(34)$
よって $\sigma^2,\ \sigma^3 \in \tilde{K}_6^f$. 故に、$\sigma \in \tilde{K}_6^f$.
故に、$\mathbf{6}$ タイプも $|\tilde{K}_6^f|$ で空間実現可能
$(12)(34)(56)(12345) = (1356)$ これは空間実現不可能、つまり (12345) は $\tilde{K}_6^f$ を使っては空間実現不可能

以下で「$SR(K_6)$ の元を空間実現するにはラベルのついていない空間グラフ $\tilde{K}_6$ が１つでは足りない（ up to homeomorphism of $\mathbf{R}^3$ and ambient isotopy)」という事を示す。

定理 2 （河野）G をタイプ $\mathbf{6},\ \mathbf{5},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2}$ のある元で生成される $\mathcal{S}_6$ の部分群とするなら、その指数は $[\mathcal{S}_6 : G] \le 2$ である。

証明。$\mathbf{6}$ タイプの元は $\sigma = (123456) \in G$ として一般性を失わない。ここで $\sigma^{-1}(ij)\sigma = (\sigma(i)\,\sigma(j)) = (i{+}1\ j{+}1)$ (*) ただし　$mod\,6$ で考える。$\mathbf{2}$ タイプは $\tau = (12),\ (13),\ (14)$ の場合を考える。

(1) $\tau = (12) \in G \xrightarrow{(*)} (23) \in G \xrightarrow{(*)} (34) \in G \xrightarrow{(*)} (45) \in G \xrightarrow{(*)} (56) \in G$. Hence $G \cong \mathcal{S}_6$.

(2) $\tau = (13) \in G \xrightarrow{(*)} (24) \in G \xrightarrow{(*)} (35) \in G \xrightarrow{(*)} (46) \in G$
$H_1 := gp\{(13),\ (35)\} \cong \mathcal{S}_3$
$H_2 := gp\{(24),\ (46)\} \cong \mathcal{S}_3$
$H_1 \times H_2 < G$ であり $\sigma^3 = (14)(25)(36)$ だから $(\sigma^3)^{-1}(H_1 \times H_2)\sigma^3 = H_1 \times H_2$
$H = H_1 \times H_2 \rhd < \sigma^3 >$ （半直積）とおく。$|H| = 2\cdot(3!)^2 = 72$ だから $|G| = k\cdot 72$.
$g.c.d(72, 5) = 1$ だから $\mathbf{5}$ タイプが G に含まれるなら k は５で割り切れる。故に $|G| = 5 \times 72 \times k'$. 故に、$k' = 1$ or 2.

(3) $\tau = (14) \in G \xrightarrow{(*)} (25) \in G \xrightarrow{(*)} (36) \in G$.
G は $\mathbf{3}$ タイプを含むので、その置換 $(ijk) \in G$ とする。$\sigma^2 = (135)(246)$ であり、i, j, k が $\{1, 3, 5\},\ \{2, 4, 6\}$ といくつ一致するか場合分けすると、
一致が ３個, ０個　のとき (A) とする。
一致が ２個, １個　のとき (B) とする。

$$\left.\begin{array}{r}\text{一致が 1個, 2個}\\ \text{一致が 0個, 3個}\end{array}\right\}\ \text{対称性より不要}$$

(A) のとき　$\omega = (135) \in G$ として良い。$\omega^{-1}(14)\omega = (153)(14)(135) = (34) \in G$ 従って、(1) の場合になる。

(B) のとき　$\omega = (132)...(\star)$　　$(134)...(\star\star)$　　$(136)...(\star\star\star)$　の各場合。

$(\star)$ $\omega^{-1}(14)\omega = (34)$ これは (1) の場合。

$(\star\star)$ $\omega^{-1}(14)\omega = (31)$ これは (2) の場合

$(\star\star\star)$ $\omega^{-1}(14)\omega = (34)$ これは (1) の場合。 □

系 2.1 $SR(K_6)$ の元を空間実現するには、ラベルのついていない空間グラフ $\tilde{K}_6$ が一つでは足りない。２つで必要十分。

証明。$\tilde{K}_6^f$ 一つに対し $TSG(\tilde{K}_6^f) = SR(K_6)$ となったとすると、$\tilde{K}_6^f$ は **6**, **5**, **3**, **2** のタイプの元を含む。すると、定理２より $[\mathcal{S}_6 : TSG(\tilde{K}_6^f)] \leq 2$ つまり $TSG(\tilde{K}_6^f) \cong \mathcal{S}_6$又は $\mathcal{A}_6$. 従って、$TSG(\tilde{K}_6^f)$ は **4** タイプの元を含む。これは矛盾。

□

別証明。[T] により、K_6　の標準空間グラフ $\tilde{K}_6^*$ と任意の空間グラフ $\tilde{K}_6^f$ に対し

$|\tilde{K}_6^f| \leq |\tilde{K}_6^*| \cong \mathcal{S}_2[\mathcal{S}_3]$ が成立する。従って $|\tilde{K}_6^*| = 72$. $g.c.d(72, 5) = 1$ だから、$\tilde{K}_6^*$と **5** タイプの元を共に含む $\tilde{K}_6^f$ があったとすると $|\tilde{K}_6^f| = 72 \times 5 = 360$ 故に、$TSG(\tilde{K}_6^f) \cong \mathcal{A}_6$. そして $\mathcal{A}_6$ は **4** タイプの元を含んでしまう。　これは矛盾。

□

図３．の左図は Hopf link を一つのみ含む。右図は 5_1-knot, Hopf link を含む。

図　３．

予想。$n \geq 7$ のとき、$\tilde{K}_n^*$ を K_n の canonical presentation , $\tilde{K}_n^f$ を K_n の任意の空間グラフとすると、

$|\tilde{K}_n^f| \leq |\tilde{K}_n^*|$ が成り立つ。

命題 4 上の予想が成り立つと次が成立する。

(1) $SR(K_7)$ の元を実現するには次の３つの空間グラフを用意すれば必要十分（図　４）

(a) によって $\mathbf{2-2-2}$（固定頂点１つ）、**7** タイプ　が実現される

(b) によって $\mathbf{5}$ タイプ（固定頂点２つ）が実現される

(c) によって $\mathbf{3-3}$ タイプ（固定頂点１つ）が実現される

図　４.

(2) $SR(K_8)$ の元を実現するには、次の４つの空間グラフを用意すれば必要十分 *(*図　５）

(a) $TSG(\tilde{K}_n^*) \cong D_8$ に含まれるタイプは、$\mathbf{8},\ \mathbf{4-4},\ \mathbf{2-2-2-2},\ \mathbf{2-2-2}$（固定頂点　２つ）

(b) $\mathbf{7}$ タイプ（固定頂点　１つ）　　*(c)* $\mathbf{5}$ タイプ（固定頂点　３つ）

(d) $\mathbf{3-3}$（固定頂点　２つ）

図　５.

命題４の証明。(1) K_7 の場合。Flapan の定理 (命題　３）より空間実現可能な K_7 の自己同形は (a),(b),(c) であげた４つのタイプだけなので図４の (a),(b),(c) があれば十分である。

必要性。野田 ([N]) より、$TSG(\tilde{K}_7^*) \cong D_7$. そこで、$D_7$ と $\mathbf{3-3}$ タイプの元をともに実現する空間グラフ $TSG(\tilde{K}_7^\alpha)$ あると、

$|TSG(\tilde{K}_7^\alpha)| = 14 \times 3 = 42$ これは、$|TSG(\tilde{K}_7^\alpha)| \leq |TSG(\tilde{K}_7^*)| = 14$ に矛盾。

同様に D_7 と $\mathbf{5}$ タイプの元を共に実現する K_7 の空間グラフが存在しない事も示せる。

更に、$\mathbf{5}$ タイプの元と $\mathbf{3-3}$ タイプの元を含む K_7 の空間グラフ $\tilde{K}_7^\beta$ があっても $|TSG(\tilde{K}_7^\beta)| \geq 15$ となり矛盾が出せる。

従って、$n=7$ の時ラベルの無い空間グラフ３つは必要となり、結局３つが必要十分

(2) K_8 の場合。Flapan の定理（命題　３）より、空間実現可能な K_8 の自己同形のタイプは $\mathbf{8},\ \mathbf{7},\ \mathbf{5},\ \mathbf{4-4},\ \mathbf{3-3},\ \mathbf{2-2-2-2},\ \mathbf{2-2-2}$ で全てである。これらは図５の (a)～(d) の４つで実現出来るので４つ用意すれば十分。

必要性。野田 ([N]) より、$TSG(\tilde{K}_8^*) \cong D_8$. 従って、 D_8 に含まれる (a) のタイプと

7 タイプ、**5** タイプ、**3 − 3** タイプのどの１つとも共に空間実現する K_8 の空間グラフが存在しないのは K_7 の場合と同じ。タイプ **7** とタイプ **5** を共に空間実現する空間グラフが存在しない、タイプ **7** とタイプ **3 − 3** を共に空間実現する空間グラフが存在しないことも K_7 の場合と同じ理由。**5** タイプ と **3 − 3** タイプの両方を実現する空間グラフ $\tilde{K}_8^{\alpha}$ があったとすると $TSG(\tilde{K}_8^{\alpha}) =< a,\ b|a^5 = b^3 = 1,\ (ab)^2 = 1 >$ (正２０面体群)。しかし正２０面体の頂点数は１２、正１２面体の頂点数は２０なので、頂点数８の K_8 の自己同形では表現出来ない。従って上記 $\tilde{K}_8^{\alpha}$ は存在しない。故に $SR(K_8)$ の元を全て実現するには (a)∼ (d) の４つの空間グラフが必要。 □

参考文献

[F1] Flapan, E. : Rigidity of graph symmetries in the 3-sphere, J. Knot Theory Rami. 4 (1995) 373-388

[F2] Flapan, E. : When Topology meets Chemistry, Cambridge Univ. Press (2000)

[K] Kobayashi, K. : 空間グラフの理論、培風館　(1995)

[N] Noda,C. : Topological symmetry group of a canonically embedded complete graph in S^3, Tokyo J. Math. 20(1) (1997) 45-50

[T] Toba, T : Topological Symmetry Group of Spatial Graph and its Related Topics, Master Theses, Tokyo Woman's Christian Univ. (1993).