

HAKONE SEMINAR 17 (2001) 7-33.

# Ribbon knot の分類に使える局所変形について

Kazuaki Kobayashi

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences,  
Tokyo Woman's Christian University

Tetsuo Sibuya

Department of Mathematics,  
Osaka Institute of Technology

平成 13 年 12 月 30 日

## 1 Introduction

[KS 1],[KS 2]において Milnor move ( $M_n$ -move) という局所変形を導入し、ribbon knot の分類に使ったが、この論文では、やはり ribbon knot の分類に使える  $M_X$ -move,  $N_n$ -move という局所変形を導入し、その諸性質をしらべる。[KS 1]において  $M_n^\pm$ -move と  $C_n$ -move の間に位置する  $\beta_n$ -move という局所変形を導入したが、同様に  $N_n^\pm$ -move と  $\beta_n$ -move の間に位置する  $\gamma_n$ -move という局所変形を導入し、その性質を調べる。また  $\beta_n$ -move と  $C_n$ -move,  $\beta_n$ -move と 結び目の cobordism との関係についても調べる。

**定義 1**  $M_X^\pm$ -move,  $N_n^\pm$ -move,  $\gamma_n$ -move を図 1 のように定義する。

図 1.

上で定義した局所変形について Conway 多項式の変化をみる。

(8)

補助定理 1  $\nabla_{\downarrow\uparrow}(z) = -z^2 \nabla_{\sim}(z)$

証明。

図 2.

従って、 $\nabla_{\downarrow\uparrow}(z) = \nabla_{K_1}(z) - z\nabla_{K_2}(z) + z\nabla_{K_2}(z) - z^2\nabla_{\sim}(z) = -z^2\nabla_{\sim}(z)$  □

定理 1  $K \xrightarrow{\gamma_1} K' \Rightarrow \Delta_K(z) = \Delta_{K'}(z)$

証明。

図 3.

$\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z) - z\nabla_{K_1}(z) + z\nabla_{K_2}(z) - z^2\nabla_{K_3}(z)$  Lemma を使うと  
 $= \nabla_{K'}(z) - z(-z^2)\nabla_{\sim}(z) + z(-z^2)\nabla_{\sim}(z) = \nabla_{K'}(z)$  □

定義 2 ( $[KS 1]$ ,  $[KS 2]$ )  $\beta_n$ -move を下図で定義する。

図 4.

次にいくつかの局所変形の間関係を述べる。

命題 1  $\gamma_n$ -move は  $\beta_n$ -move で実現できる。

証明。  $n = 2$  のときを図 5 に示してある。①~④の順番で  $\beta_2$ -move を 4 回行う。一般に  $\gamma_n$ -move 1 回を  $\beta_n$ -move  $2^n$  回で実現出来る。

図 5.

例 1  $\beta_n$ -equivalent to trivial ではあるが、 $\gamma_n^+$ -equivalent to trivial ではない例がある。(図 6)

まず、明らかに  $K_n \xrightarrow{\beta_n} \circ$  である。

一方、 $\Delta_{K_n}(t) = (t-1)^{2n} \pm t^n \neq \pm t^p$ . これは、定理 1 に矛盾。

(もし、 $K_n \xrightarrow{\gamma_n^+} \circ$  なら、 $\nabla_{K_n}(z) = 1 = \nabla_{K_n}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \Delta_{K_n}(t)$ )

□

図 6.

命題 2  $\gamma_{n+1}$ -move は  $\gamma_n$ -move で実現できる。(図 7.)

証明。図 7 の点線内に対し、 $\gamma_n$ -move を行えばよい。

図 7.

命題 3  $N_n^+$ -move は  $\gamma_n$ -move で実現出来る。(図 8.)

証明。図 8 の点線内に対し、 $\gamma_n$ -move を行えばよい。

図 8.

命題 4  $M_X^+$ -move は  $\gamma_1$ -move で実現出来る。(図 9.)

図 9.

系 4.1 以上より、局所変形の上に次のような関係が成り立つ。

表 1.

系 4.2  $K \xrightarrow[\text{move}]{\text{local}} K'$  (ここで *local move* は  $M_{X-}, N_{n-}, \gamma_n\text{-moves}$  ( $n \geq 1$ ) のいずれか)

$$\implies \nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$$

証明。系 4.1 より、 $M_{X-}, N_{n-}, \gamma_n\text{-moves}$  ( $n \geq 2$ ) は  $\gamma_1\text{-move}$  で実現でき、定理 1 より  $K \xrightarrow[\text{move}]{\text{local}} K'$  なら  $\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$  が成立するからである。  $\square$

定理 2  $L$  を *link* とする。

$L \xrightarrow{N_n^+} \text{trivial link}$  なら  $L$  は *ribbon link* である。

同様に、 $L \xrightarrow{M_n^+} \text{trivial link}$  なら  $L$  は *ribbon link* である。

証明。  $N_n^+$ -move を行う *tangle* の中で SHT (self-hyperbolic translation) を行うと  $L$  は自明な絡み目になる (ただし、成分数は増える) ので、 $\mathbf{R}_+^4$  の中で、この SHT に対応する *fission* を行うと、 $\mathbf{R}_+^4$  の中で  $L$  の各成分に離れ形の *locally flat disk* が張れる。従って、 $L$  は *ribbon link* である。ここで、SHT とは図 10 のような変形をいう。

図 10.

定義 3 ( $[H],[OT]$ )  $C_n$ -move を下図で定義する。

図 11.

注 1  $\beta_n$ -move は  $C_n$ -move で実現出来ることがわかっている。( $[KS 1],[KS 2]$ )

命題 5  $C_{n+1}$ -move は  $\beta_n$ -move で実現出来る。

証明。図 12 の点線内に対し  $\beta_n$ -move を行えばよい。

図 12.

系 5.1  $C_n$ -move と  $\beta_n$ -move とに関し、次の表 2 がえられる。

表 2.

例 2 任意の偶数  $n$  に対し  $\beta_n$ -move では移り合うが  $C_{n+1}$ -move で移りあわない knots  $K, K'$  がある。

knot  $K_n$  を図 13 のような knot とすると  $K_n$  は  $\beta_n$ -move ( $= \bar{\beta}_n$ -move) で自明な結び目になる。 $(\bar{\beta}_n$ -move については [KS 1] を参照)

$$\begin{aligned} \text{一方、} \Delta_{K_n}(t) &= \{1 - (1-t)^n\} \{(-t)^n - (1-t)^n\} \\ &= (1-t)^{2n} - \{(1+(-t)^n)(1-t)^n + (-t)^n \quad n \text{ は偶数だから} \\ &= \{(1-t)^n - (1+t^n)\}(1-t)^n + t^n \end{aligned}$$

論文 [KS 1] の命題 1.2 が  $C_n$ -move でも成立するので (下記の注を参照)、この  $\Delta_{K_n}(t)$  の形は  $K_n$  が  $C_{n+1}$ -move で自明にならない事を示している。

図 13.

注 2 論文 [KS 1] の命題 1.2. 2つの結び目  $K_1, K_2$  が有限回の  $\beta_n$ -move で移りあうなら  $\Delta_{K_1}(t) = \pm t^p \Delta_{K_2}(t) \pmod{(1-t)^n}$

例 3  $C_2$ -move では移り合うが  $\beta_2$ -move で移りあわない knots  $K, K'$  がある。(図 14)

$\beta_2$ -move は ([S]) で定義された  $C$ -move で実現可能で、従って  $\beta_2$ -move は Arf 不変量を変えない。そこで  $K$  を trefoil knot とすると  $K$  は  $\beta_2$ -move によって trivial knot には移らない。一方、 $C_2$ -move は  $\Delta$ -move と同値であり、trefoil knot  $K$  は  $\Delta$ -move によって自明な結び目になる。

図 14.

次に、knots の cobordant という関係と  $\beta_n$ -move との関係について述べる。

**定義 4**  $\mathbf{R}^3 \times [0, 1]$  を考え、2つの knots  $K, K'$  が  $K \subset \mathbf{R}^3 \times \{0\}$ ,  $K' \subset \mathbf{R}^3 \times \{1\}$  であるとする。このとき  $K$  と  $K'$  の間に *locally flat* な *annulus*  $A$  が存在するとき、 $K$  と  $K'$  は *cobordant* であるといい、 $K \sim K'$  とかく。

すなわち、 $\exists$  *locally flat proper embedding*  $\varphi: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3 \times [0, 1]$  such that  $\varphi(S^1 \times \{0\}) = K$ ,  $\varphi(S^1 \times \{1\}) = K'$

**補助定理 2**  $K$  が *ribbon knot* なら、 $K$  は  $\beta_2$ -move で自明な結び目に移せる。

**証明。** 先ず、 $\beta_2$ -move は図 15. の変形と同値である。

図 15.

そこで、*ribbon knot*  $K$  を図 16 のように置く。 $\mathcal{D} = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$  は互いに交わらない disks で  $\partial \mathcal{D}$  が *trivial link* となるものとする。また  $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$  を互いに交わらない *band* の集合で  $B_i$  は disks  $D_0$  と  $D_i$  をむすんでいるものとする。また、disks と bands の交わりの集合  $\mathcal{S}(\mathcal{D} \cap \mathcal{B})$  は *ribbon type* のみとする。

まず、 $B_i \cap \mathcal{D}$  の隣り合う2つの arcs の  $B_i$  上の順番は図 17 のようにして  $\beta_2$ -move で入れ替えることが出来る。

図 16.

図 17.

この事から各  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) について  $\mathcal{S}(B_i \cap \mathcal{D})$  を次のようにそれぞれまとめることが出来る。(図 18.)

図 18.

そこで、 $B_i \cap D_j$  ( $j \neq i$ ) を  $\partial D_i$  に近い方から順に図 19 のようにして  $\beta_2$ -move で除去する。この結果  $S(B_i \cap \mathcal{D}) = S(B_i \cap D_i)$  としてよい。

図 19.

次に  $n = 3$  の場合を図示するが(図 20 (a))  $S(D_0 \cap \mathcal{B}) = \emptyset$  (何故なら  $\neq \emptyset$  ならば上の  $\beta_2$ -move で除去する) としてよい。 $\partial B_2 \cap D_0$  を  $\partial B_1$  に沿って ( $\partial B_3$  を通らないように)  $\partial D_1 - \partial B_1$  に移動(図 20 (b))。その結果  $D_1 \cap B'_2$  に新しく交わり  $\{1'\}$  を持つようになる。 $S(D_0 \cap \mathcal{B}) = \emptyset$  なので  $B_1 \cup B_3 \cup D_0$  を一つの band と考えて(図 20 (c)),  $\{1\}$  と  $\{3\}, \{1'\}$  と  $\{2\}$  の順番の交換を  $\beta_2$ -move で行くと図 20 (d) になる。そこで、 $\{1\}$  と  $\{1'\}$  を  $\beta_2$ -move で除去する(図 20 (e))。以下同じ変形を繰り返すことにより、 $K$  は有限回の  $\beta_2$ -moves で trivial knot になる。  $\square$

図 20.

**定理 3** 2つの knots  $K$  と  $K'$  が cobordant ( $K \sim K'$ ) であるなら、 $K$  と  $K'$  は  $\beta_2$ -equivalent である。

証明。 $K \sim K'$  より  $K$  と  $K'$  の間に  $\mathbf{R}^3 \times [0, 1]$  で locally flat annulus  $A$  が存在し、これを適当に変形して図 21 のように置くことが出来る (これを  $A_0$  とする)。即ち  $K_{\frac{1}{2}} = A_0 \cap \mathbf{R}^3[\frac{1}{2}]$  で  $K_{\frac{1}{2}}$  から  $K$  ( $K_{\frac{1}{2}} > K$  で表す)  $K_{\frac{1}{2}}$  から  $K' \sim$  離れ形の annulus が張れる。そこで定理を証明するには以下の補助定理を証明すれば良いことになる。

図 21.



**補助定理 3**  $K > K'$  なら  $K$  と  $K'$  が  $\beta_2$ -move で移りあう。

証明。  $K > K'$  より  $K$  は  $K'$  と分離している trivial link  $\mathcal{O} (= O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n)$  の fusion  $\mathcal{B} = B_1 \cup \dots \cup B_n$  により得られる。  $\mathcal{O}$  に互いに交わらない disks  $\mathcal{D} = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$  で  $\mathcal{D} \cap K = \emptyset$ ,  $S(\mathcal{D} \cap \mathcal{B})$  が ribbon type になるように張る。  $\mathcal{B}$  の足を適当に動かして図 2 2 のように変形する。 先ず、補助定理 2 のように各  $i$  について  $S(B_i \cap \mathcal{D})$  の  $B_i$  上での  $b$ -line の順序を適当に交換して、  $B_i \cap (\mathcal{D} - D_i)$  を  $\partial B_i \cap \partial D_i$  の近くに全て集めて図 1 9 の  $\beta_2$ -move で  $B_i \cap (\mathcal{D} - D_i)$  を除去する。 その結果、改めて  $\mathcal{B} = B_1 \cup \dots \cup B_n$  で書くと  $S(B_i \cap \mathcal{D}) = S(B_i \cap D_i)$  となる。

図 2 2.

そこで、  $S(B_i \cap D_i)$  の  $\partial D_i$  に最も近い  $B_i$  上の arc を  $b_i$  として、  $B_i \cup D_i$  上で図 2 3 の simple loop  $c_i$  を取り、図 2 3 のように上下の入れ替えを  $\beta_2$ -move で適当に行うことにより、  $c_i$  が unknot に出来  $c_i$  に張る disk  $D_i$  で  $D_i$  が knot と交わらないように取れる。  $D_i$  に沿って knot を動かすことにより、  $b_i$  を除去できる。 この変形を各  $i$  について順次行うことにより、 knot  $K$  に変形できる。  $\square$

図 2 3.

**系 3.1**  $K$  が slice knot なら  $K$  は  $\beta_2$ -eq. to trivial である。

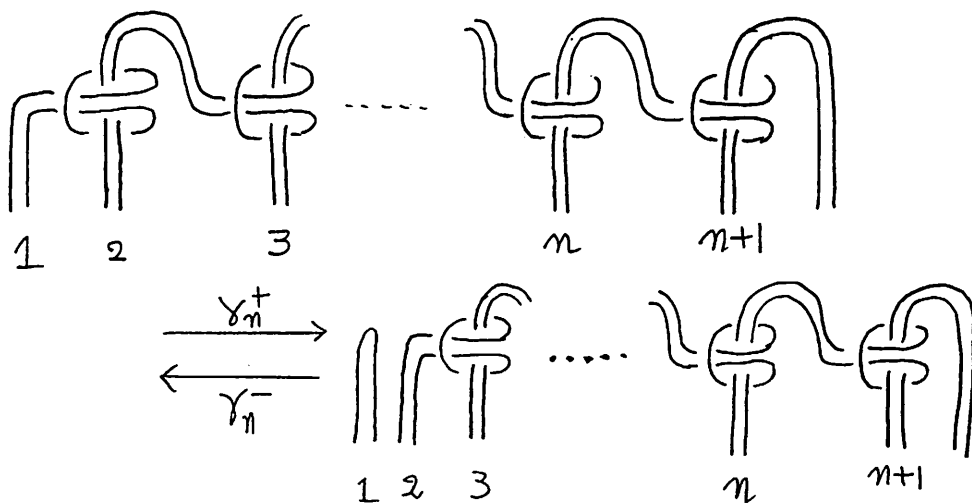
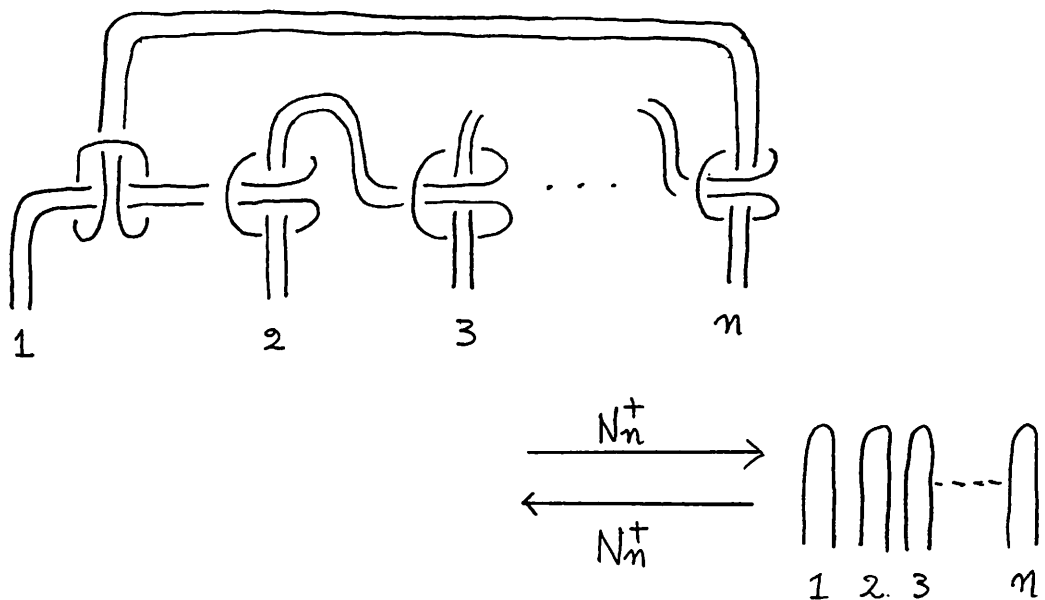
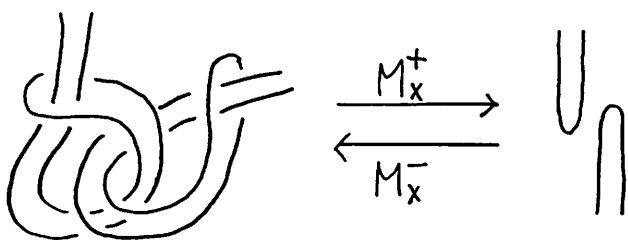
ただし、  $\beta_n$ -move という局所変形は微妙で次のような例がある。

**例 4** knots  $K$  と  $K'$  は  $\beta_n$ -eq. であるが同時に  $K$  と  $K'$  は ambient isotopic である。

図 2 4.

## 参考文献

- [H] K.Habiro : Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topology* 4 (2000), 1-83
- [KS 1] K.Kobayashi and T.Shibuya : On Milnor moves and a Classification of ribbon knots (In Japanese), preprint
- [KS 2] K.Kobayashi and T.Shibuya : On Milnor moves and a Classification of ribbon knots , preprint
- [OT] Y.Ohyama and T.Tukamoto : On Habiro's  $C_n$ -moves and Vassiliev invariants of order  $n$ , *J. Knot Thoery and its Ramif.* 8 (1999), 15-26
- [S] T.Shibuya : self  $\Delta$ -equivalence of ribbon links, *Kobe J. Math.* 31 (1996), 751-760



□ 1

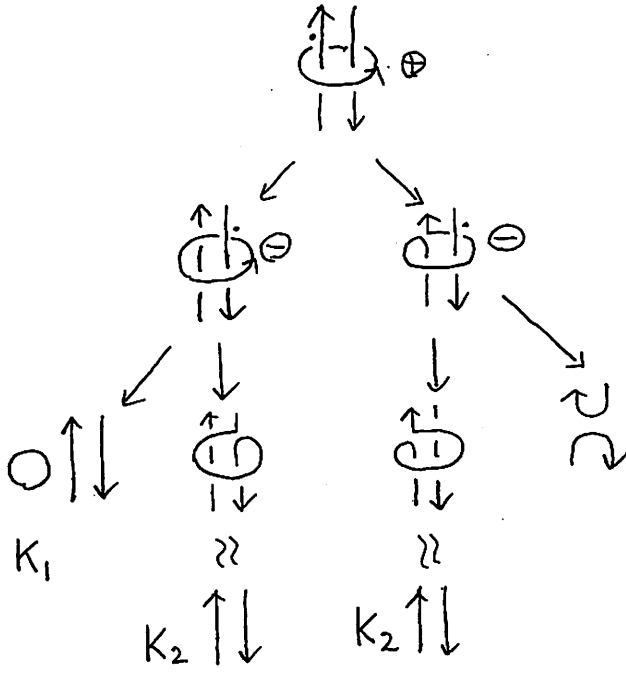
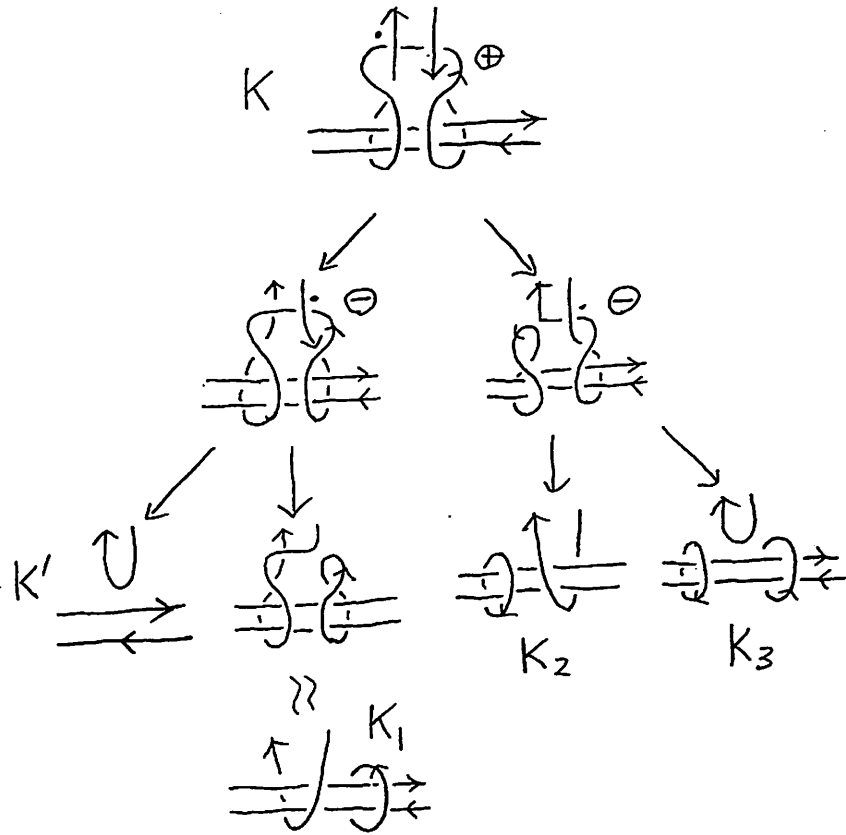


图 2



□ 3

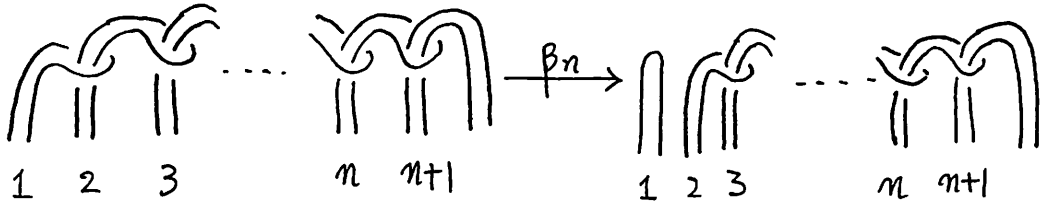


図 4

$n=2$  のとき

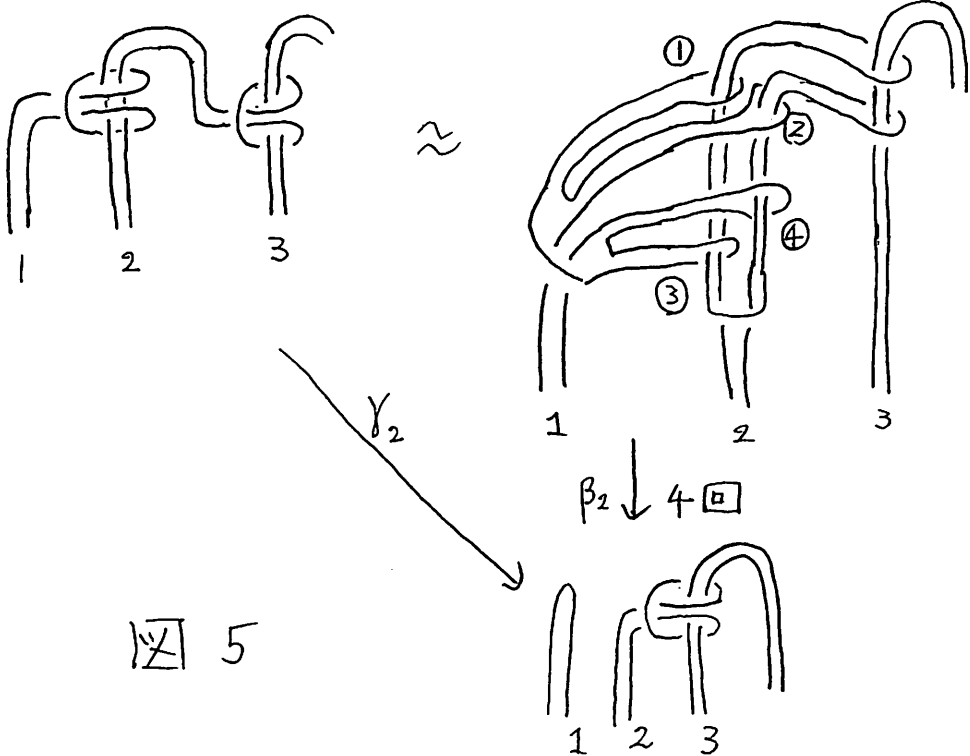


図 5

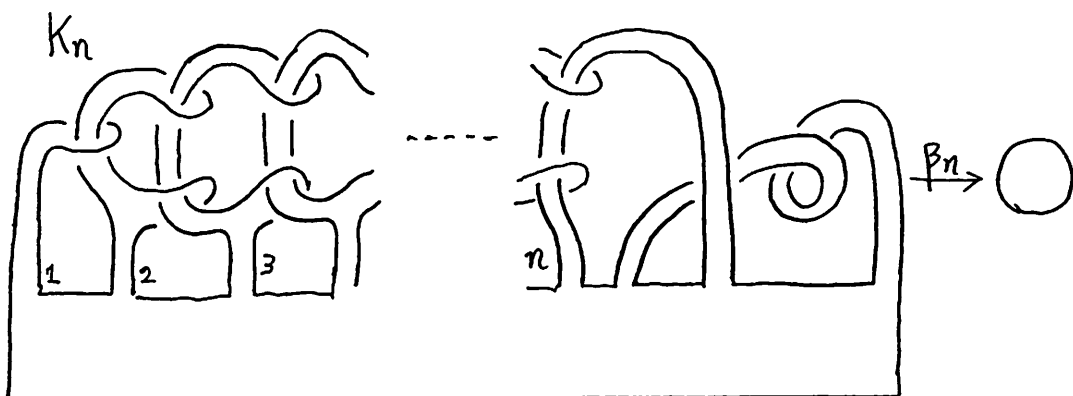


图 6.

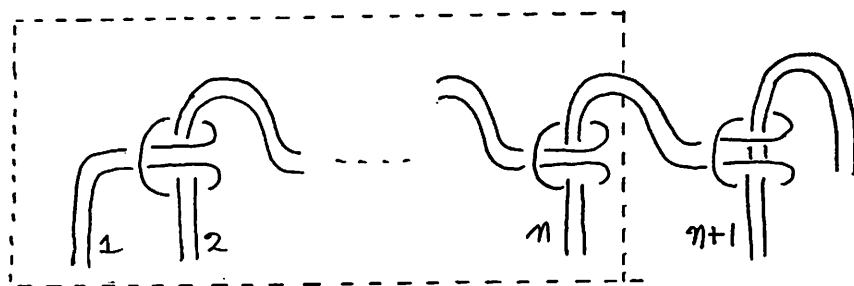


图 7.

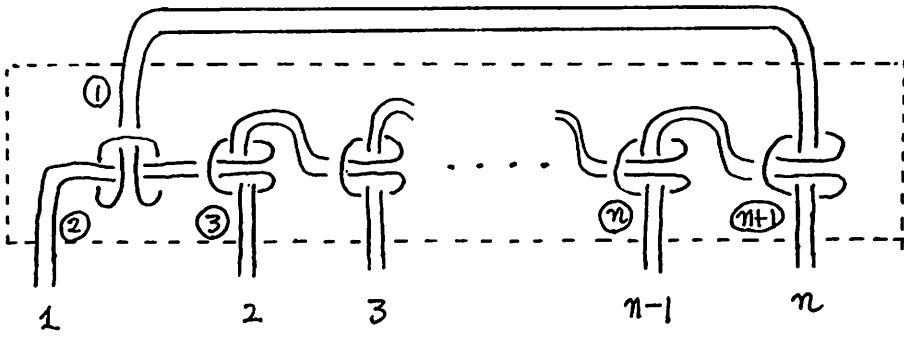


图 8

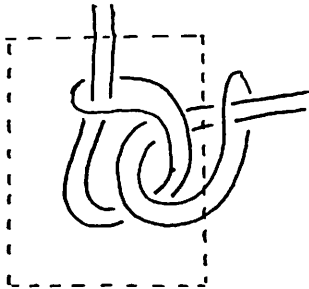


图 9.



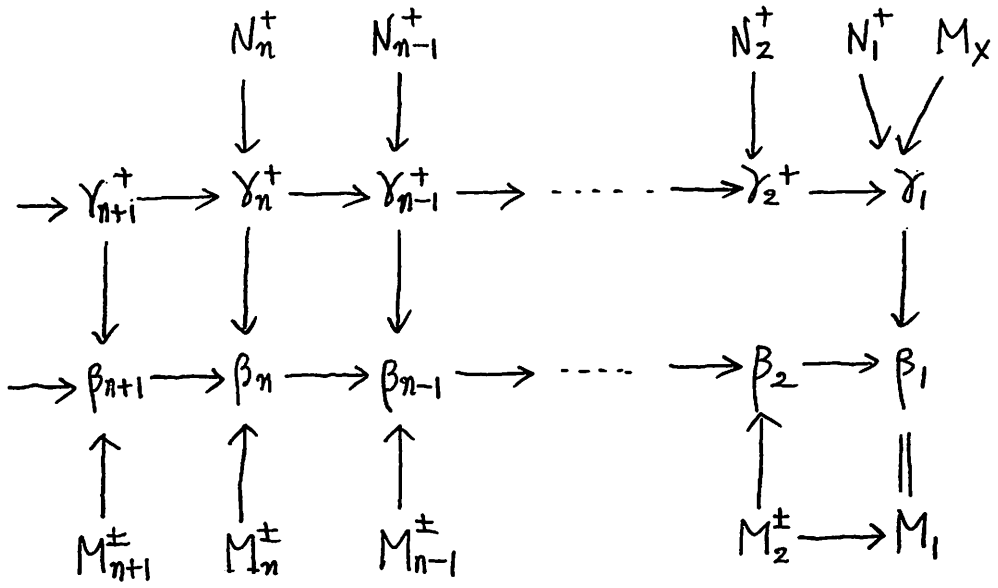


表 1.

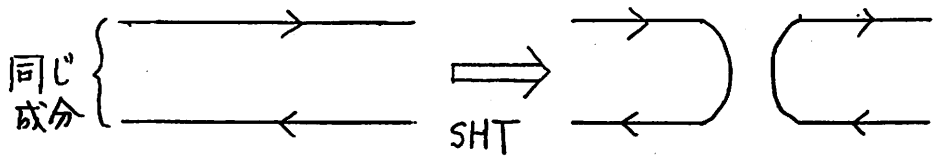


図 10.

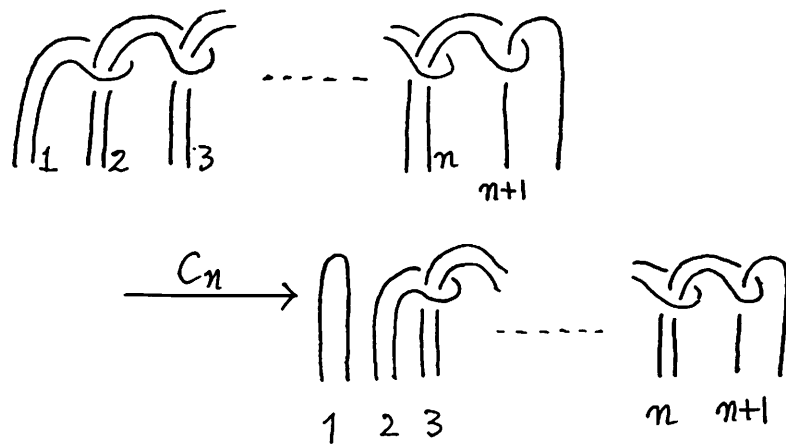


图 11

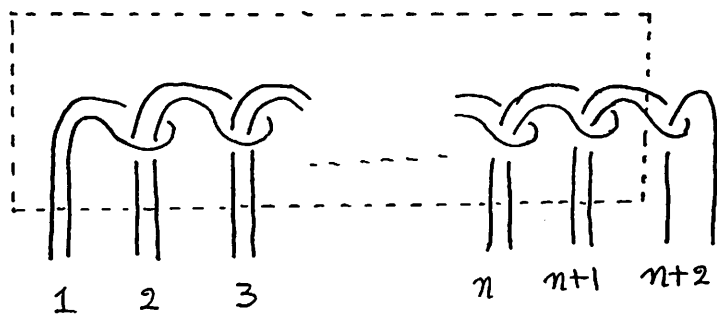


图 12

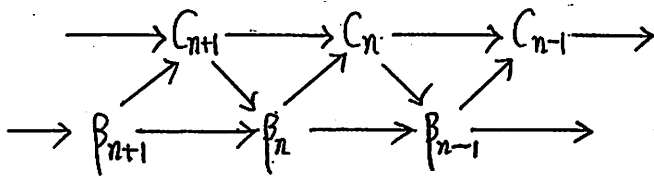


表 2.

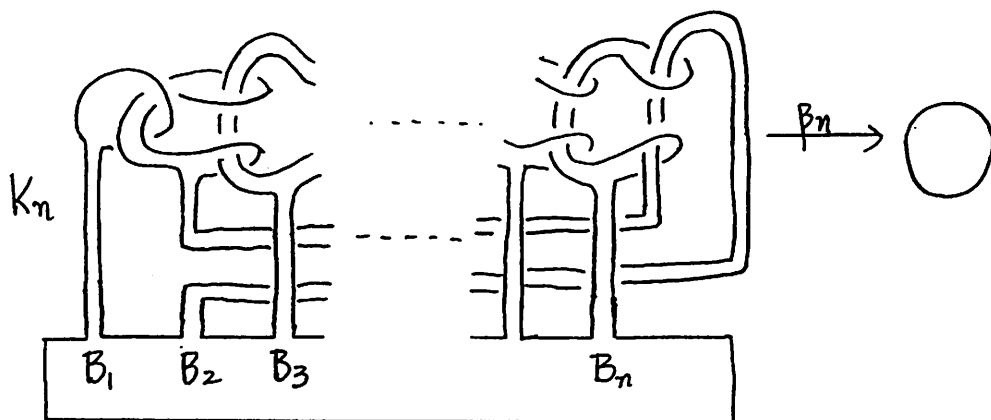


图 13

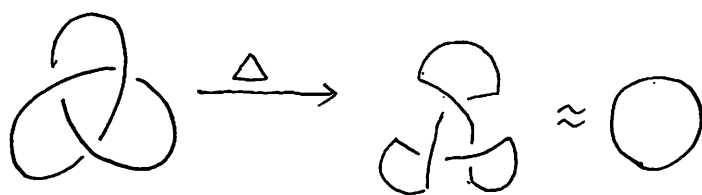


图 14.

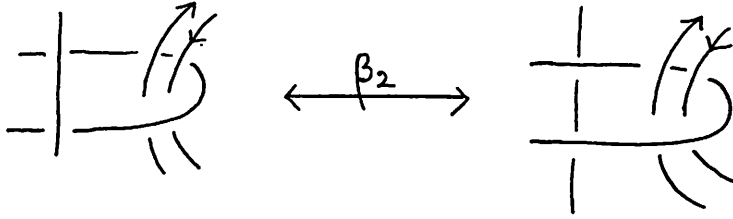


图 15

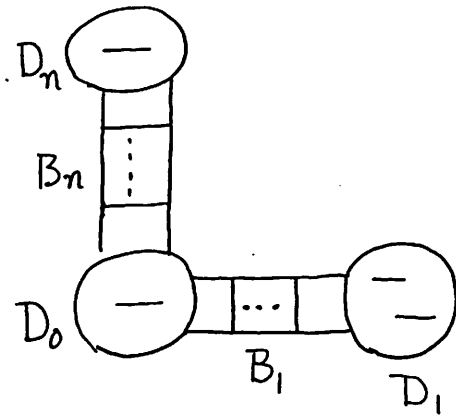


图 16

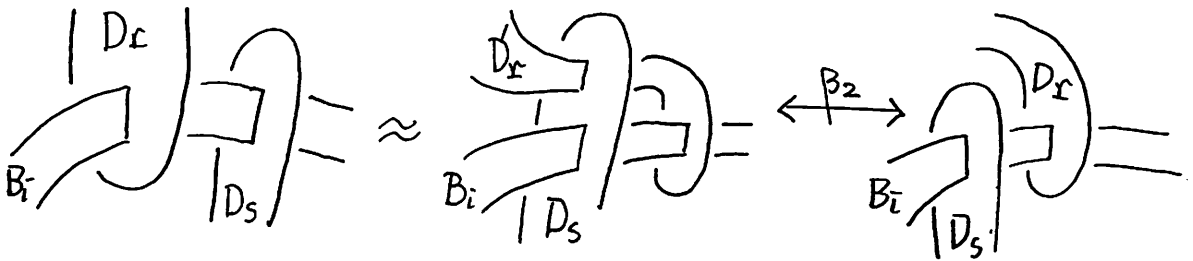


图 17.

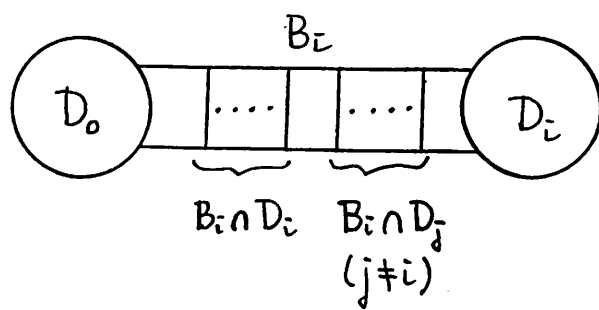


图 18

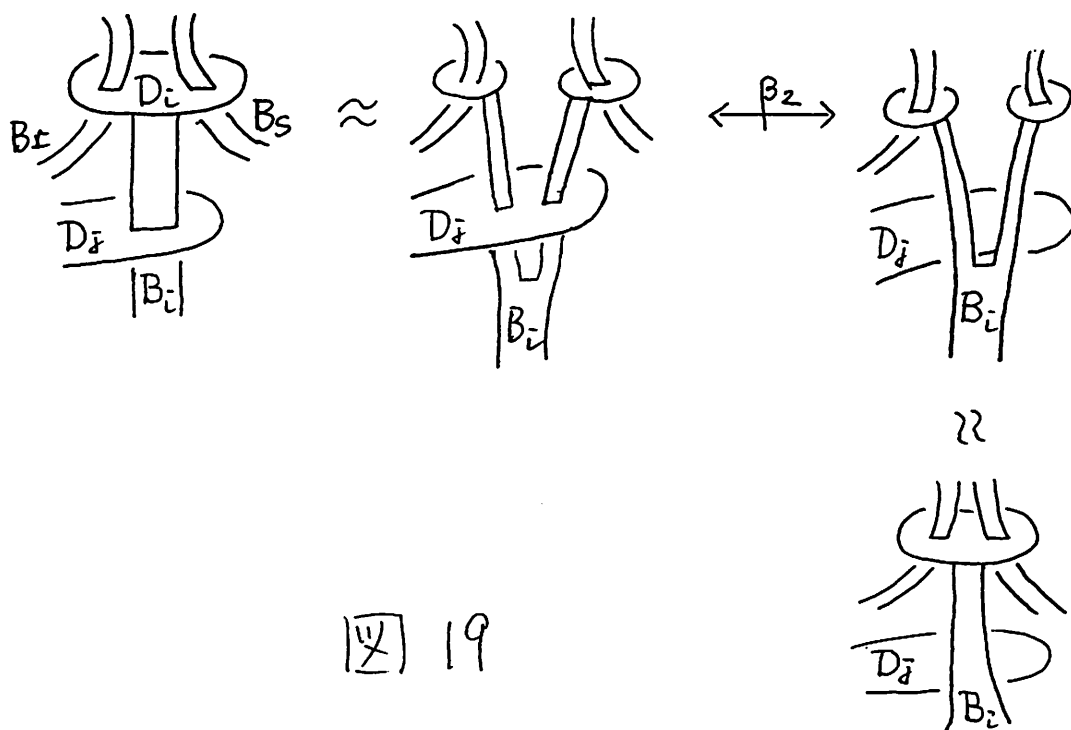
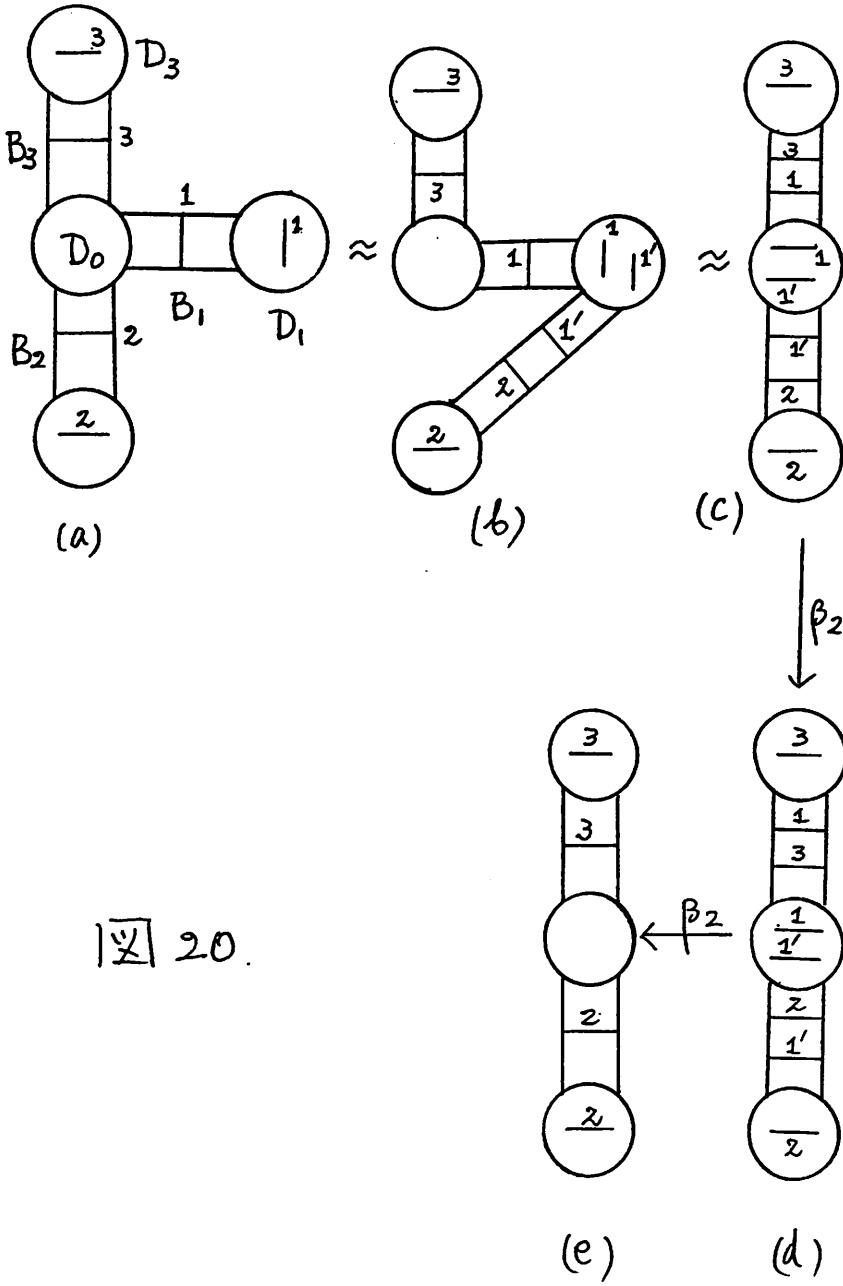


图 19



$\square$  20.



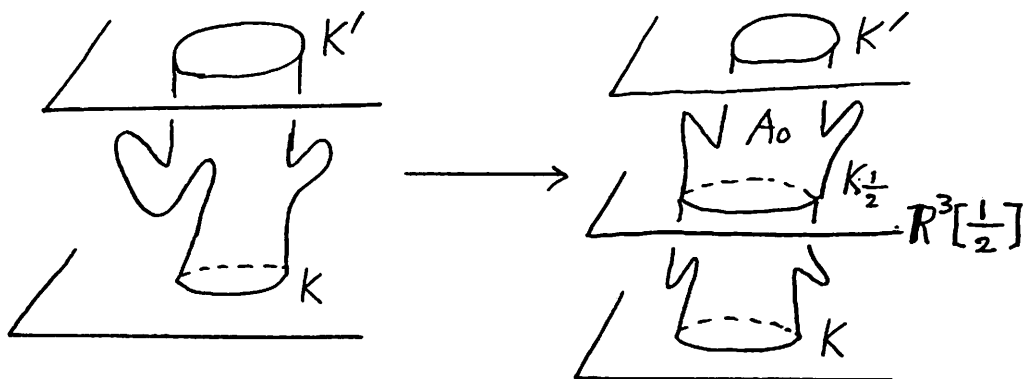


图 21

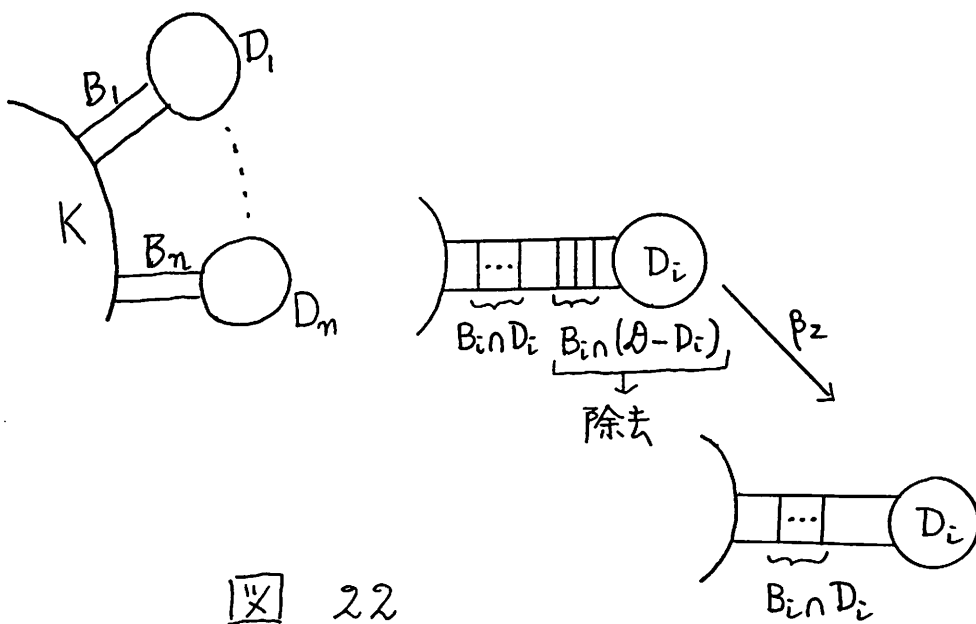


图 22

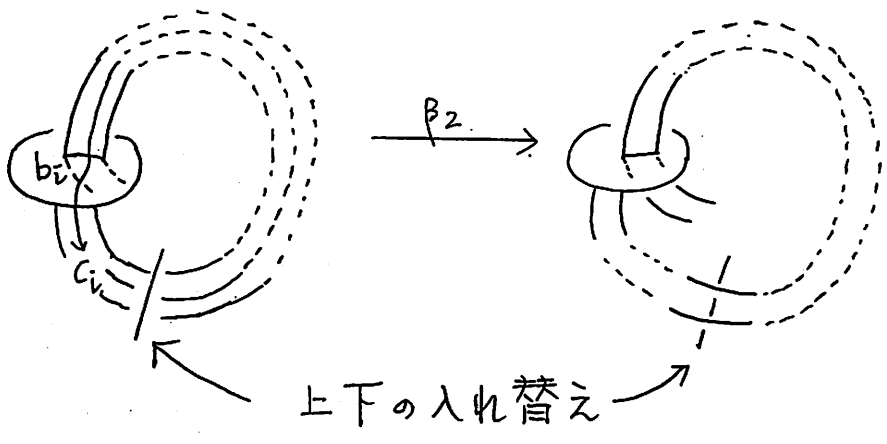


図 23

$n=3$  のとき.

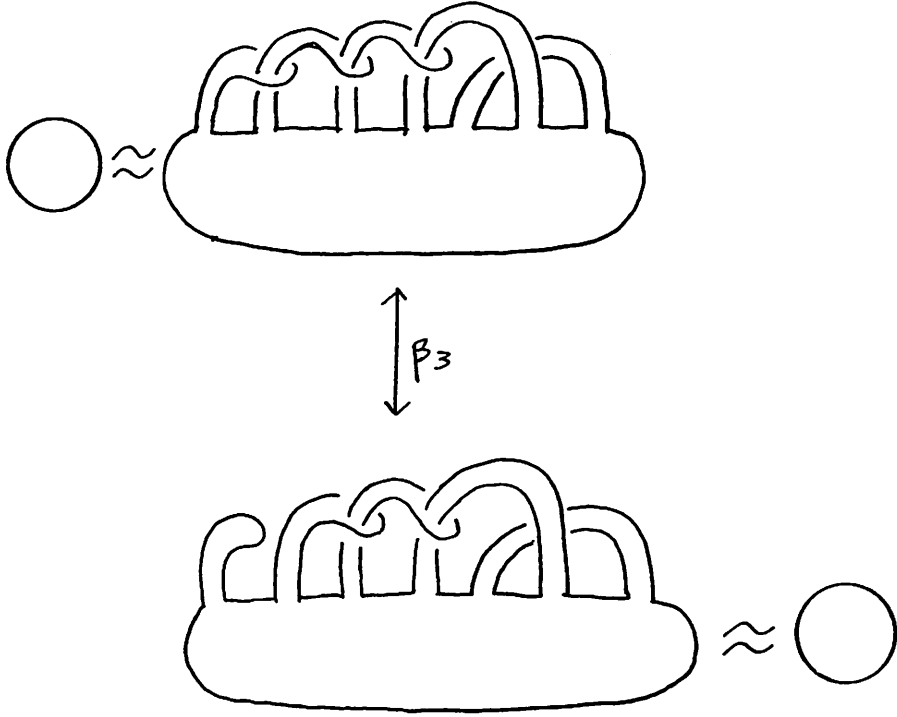


図 24