HAKONE SEMINAR 16 (2000) 7-28.

Ribbon link and Separate ribbon link

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

平成12年 12月 26日

1 Introduction

この論文では、ribbon link と separate ribbon link の関係、及びその間の概念である free SHT trivial との関係について述べる。

定義 1 次の表にあらわれている絡み目の定義を記します。$L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ を m 成分の絡み目とする。

(1) L が *separate ribbon link* とは各 K_i に *ribbon disk* $\rho_i(D^2)$ が張れ、$\rho_i(D^2) \cap \rho_j(D^2) = \emptyset$ をみたすときを言う。

(2) L が *ribbon link* とは、各 K_i に *ribbon disk* $\rho_i(D^2)$ が張れ、$\rho_i(D^2) \cap \rho_j(D^2)$ も *ribbon type* になっている。

(3) L が *null-cobordant link (又は、strong slice link)* とは、$L \subset \mathbf{S}^3 = \partial D^4$ と考え、L の各成分 K_i に D^4 で局所平坦 *(locally flat)* な非特異円板 D_i^2 が張れ、$D_i^2 \cap D_j^2 = \emptyset$ $(j \neq i)$ となっている。

(4) L が *h-split link* とは、各成分 K_i に特異円板 $\phi_i(D^2)$ が張れ、$\phi_i(D^2) \cap \phi_j(D^2) = \emptyset$ $(j \neq i)$ となっている。$\phi_i(D^2)$ の特異点集合のタイプは *clasp* 型又は、*ribbon* 型として一般性を失わない。

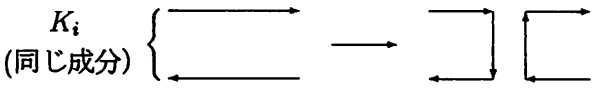
(5) L が *strong h-trivial* とは、任意の i に対し $[K_i] = 1 \in \pi_1(\mathbf{S}^3 - L^i)$ である。ここで、$L^i = L - \{K_i\}$ とする。

(6) L が *boundary link* とは、各成分 K_i に向き付け可能な曲面 F_i が張れ、$F_i \cap F_j = \emptyset$ $(j \neq i)$ となっている。

従って、絡み目を分離性の観点からみると、上で定義した絡み目の間の関係は次の図のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{separate ribbon link} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & h\text{-split link} \arrow[dl] \arrow[dr] & \text{ribbon link} \arrow[dr] & \\
\text{strong } h\text{-trivial link} & & \text{boundary link} & \begin{array}{c}\text{null cobordant link}\\ \text{(strong slice link)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

定義 2 *(SHT (self hyperbolic translation) の定義)* 絡み目 $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ において、つぎの変形を *self hyperbolic translation (SHT)* と呼ぶ。



命題 1 $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ が *ribbon link* $\Longleftrightarrow$ L の各成分に適当に *SHT* を行って L を *trivial link* に出来る。

証明。L の各成分に ribbon disk を張っておき、ribbon singularity の throughcut singularities の前後で SHT を行うと自明な絡み目になる。逆に L の各成分に適当に SHT を行って L を trivial link に出来るなら、trivial link の各成分に円板を張っておき、SHT の逆操作を行うと ribbon link になる。

命題 2 $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ が *separate ribbon*

$\Longrightarrow$ 任意の m 対 $(i_1, i_2, ..., i_m)$ に対し、この順番で先ず K_{i_1} に *SHT* を有限回行い、自明な絡み目にし、かつ $L^{i_1} = L - \{K_{i_1}\}$ と *split link* に出来、次に K_{i_2} に *SHT* を有限回行い、自明な絡み目にし、$L - \{K_{i_1}, K_{i_2}\}$ と *split* にでき、というように次々と *split* かつ 自明な絡み目に出来、最後に L 全体が自明に出来る。

証明。L は separate ribbon link なので、各成分に互いに交わらない ribbon disk $\rho_i(D^2)$ が張れる。$\rho_i(D^2)$ の自分自身と交わる ribbon singurality の throughcut singularity の前後で SHT を行うと自明な絡み目になり、このとき、この SHT は他の成分に張った ribbon disk と交わらずに出来るので、順番に関係なく命題に述べた性質を満たすように自明な絡み目に出来る。 □

例 1 命題２の逆は示せそうにない例。
これは命題２の結論の性質を持っているが *separate ribbon link* になりそうもない。
この例は *h-split link* である。

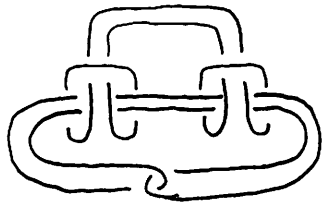


図 1.

注 1 (K-K-S) において以下の例４ *(Milnor link)* が命題２の逆が成り立たない例であることをしめした。

定義 3 命題２の結論の性質を持つ絡み目を *free SHT trivial link* という。

命題 3 *free SHT trivial link* $\Longrightarrow$ *strong h-trivial link* である。

証明。$L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ を free SHT trivial link とすると、任意の i について、K_i にSHTを有限回行うと $L_i = K_{i1} \cup \cdots \cup K_{ip_i}$ となり L_i は自明な絡み目であり、$L^i = L - \{K_i\}$ と分離している。そこで各 K_{ij} に non-singular disk D^2_{ij} を張ると L_i が自明な絡み目で、かつ L^i と分離しているので、$D^2_{ij} \cap D^2_{ik} = \emptyset$ かつ $D^2_{ij} \cap L^i = \emptyset$ と出来る。図のように SHT を行った場所を arc α_{ij} で結んでおくと。円板 D^2_{is} が交わるのは上記 arc α_{ij} のみである。ここで K_i の self crossing change をし $D^2_{is} \cap \alpha_{ij} = \emptyset$ とすると、$\bigcup_j D_{ij} \cup \bigcup_s \alpha_{is}$ を使って

$K_i \simeq \bigcup_j \partial D_{ij} \cup \bigcup_s \alpha_{is} \simeq *$ となる。

故に、 $[K_i] = 1 \in \pi_1(S^3 - L^i)$ □

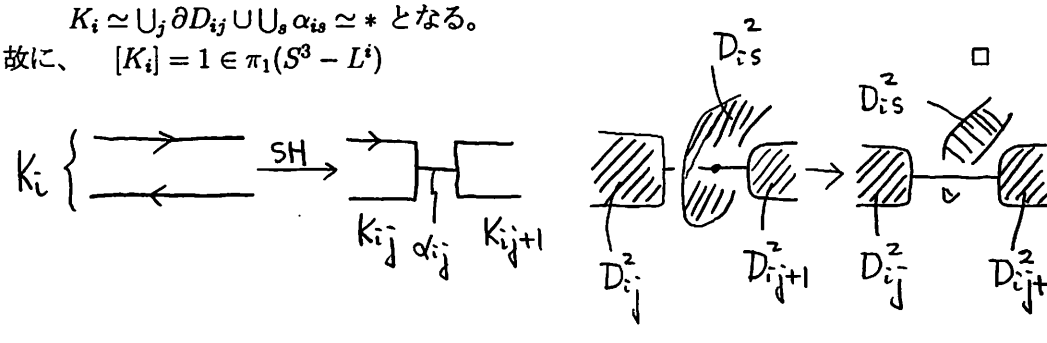
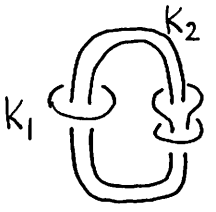


図 2.

注。この証明を応用すると「 ribbon link $\Longrightarrow$ homotopy trivial link 」が示せる。

例 2 これは *ribbon link* であるが、*strong h-trivial* でない。従って命題3より、*free SHT trivial* でない。



$[K_2]=1\in\pi_1(S^3-K_1)$ であるが

$[K_1]\neq 1\in\pi_1(S^3-K_2)$ である

図 3.

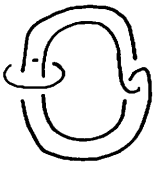
定義 4 m 成分の絡み目 $L=\bigcup_{i=1}^m K_i$ に対し、$p_n:(\tilde{S}^3,\tilde{K}_i)\longrightarrow(S^3,K_i)$ を K_i で分岐する n 重巡回被覆空間とする。

$p_n^{-1}(K_j)=\tilde{K}_{j1}\cup\cdots\cup\tilde{K}_{jl}$ とおく。(一般に $l\leq n$) $(j\neq i)$

(もし、L が *strong h-trivial* なら、$l=n$) 任意の n と任意の $j(\neq i)$ に対し $[\tilde{K}_{jl}]=1\in\pi_1(\tilde{S}^3-(\tilde{K}_i\cup(p_n^{-1}(L^i)-\tilde{K}_{jl})))$ のとき、L は K_i に関し *covering homotopy trivial* という。任意の i に対し L が K_i に関し *covering homotopy trivial link* のとき、単に L は *covering homotopy trivial* という。

注 2 $n=1$ のときが *strong h-trivial link* である。従って、
covering homotopy trivial link $\Longrightarrow$ *strong h-trivial link.*

例 3 *strong h-trivial* だが、*covering homotopy trivial* でない例 *(Whitehead link)*。



$p_2:(\tilde{S}^3,\tilde{K}_1)\longrightarrow(S^3,K_1)$ を K_1 で分岐する2重巡回被覆空間とし

$p_2^{-1}(K_2)=\tilde{K}_{21}\cup\tilde{K}_{22}$ とすると $lk(\tilde{K}_{21},\tilde{K}_{22})\neq 0$

$\therefore\ [K_{22}]\neq 1\in\pi_1(S^3-(\tilde{K}_1\cup\tilde{K}_{21}))$.

図 4.

定理 1 $L=\bigcup_{i=1}^m K_i$ が *h-split link* $\Longrightarrow$ L *covering homotopy trivial.*

証明。L の各成分に特異円板 $\phi_i(D^2)$ が張れ、$\phi_i(D^2)\cap\phi_j(D^2)=\emptyset$ となるものがある。$\phi_i(D^2)$ を surgery して向きずけ可能な曲面 F_i に変える。この surgery

は、$\phi_i(D^2)$ の近傍で行うので $F_i \cap \phi_j(D^2) = \emptyset$ と出来る。この F_i を利用して K_i で分岐する巡回分岐被覆空間 $p_n : (\tilde{S}^3, \tilde{K}_i) \longrightarrow (S^3, K_i)$ を作る。従って、特異円板$\phi_j(D^2)$ $(j \neq i)$ は被覆空間に lift し、$p_n^{-1}(L^i)$ の各成分に張れ、互いに交わらない。また$F_i \cap \phi_j(D^2) = \emptyset$ より、その特異円板は $\tilde{K}_i$ ともまじわらない。故に、$[\tilde{K}_{jl}] = 1 \in \pi_1(\tilde{S}^3 - (\tilde{K}_i \cup (p_n^{-1}(L^i) - \tilde{K}_{jl})))$ 即ち、L は covering homotopy trivial link である。 □

定理 2 $L = \bigcup_{i=1}^m K_i$ が *free SHT trivial link* $\Longrightarrow$ L は *covering homotopy trivial link.*

証明。$L = K_1 \cup K_2$ (2成分) のときに証明する。(m 成分でも証明は同じ。) L が K_1 に関しcovering homotopy trivial となっている事を示す。(L が K_2 に関しcovering homotopy trivial となっている事も同様に示せる。) L は free SHT trivial だから K_2 に有限回 SHT を行って $L = K_1 \cup L_2, L_2 = K_{21} \cup \cdots \cup K_{2p_2}$ となり、L_2 は自明な絡み目かつ K_1 とは geometrically split している。($K_2 \xrightarrow{SHT's} L_2$)
$p_n : (\tilde{S}^3, \tilde{K}_1) \longrightarrow (S^3, K_1)$ を K_1 で分岐する n-fold cyclic branched covering とする。$p_n^{-1}(K_2) = \tilde{K}_2^1 \cup \cdots \cup \tilde{K}_2^n$ とおく。K_2 上でSHT を行った個所は任意の $\tilde{K}_2^j$ 上に lift する。また、K_1, K_2 に張った ribbon disks $\rho_i(D^2)$ $(i = 1, 2)$ の $\rho_1(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ の所で SHT を行った場合、p_n を作るとき K_1 に張った ribbon disk $\rho_1(D^2)$ を surgery して F_1 を作り F_1 を切り開くが、このsurgery をする場所は $\rho_1(D^2)$ の self-intersection の所であって $\rho_1(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ の所は不変。従って K_2 に対し行う SHT は前と同様に任意の $\tilde{K}_2^j$ に lift する。よって、K_2 に対し行った全ての SHT は p_n によって lift され $\tilde{S}^3 - \tilde{K}_1$ で 各 $\tilde{K}_2^j$ は $\tilde{L}_2^j$ となり、$\tilde{L}_2^j$ は自明な絡み目である。故に、

$$[\tilde{K}_2^j] = 1 \in \pi_1(\tilde{S}^3 - (\tilde{K}_1 \cup (p_n^{-1}(K_2) - \tilde{K}_2^j))).$$

故に、K_1 に関し L は covering homotopy trivial である。同様に K_2 に関しても L は covering homotopy trivial であるから、L は covering homotopy trivial である。
□

例 4 *free SHT trivial link* であるが *h-split link* になりそうもない例 *(Milnor link)*。これは、*free SHT trivial (*従って、*covering homotopy trivial)* かつ、*boundary link* であるが、*h-split* になりそうもない。

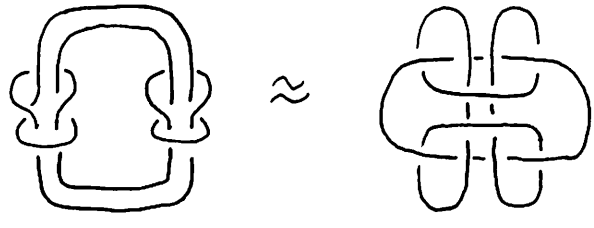


図　5.

注 3 (K-K-S) において、この *Milnor link* は *h-split link* でないことを示した。

2　$L = K_1 \cup K_2$ （2成分）の場合に ribbon link が free SHT trivial になるための ribbon disk による十分条件

定理 3 $L = K_1 \cup K_2$ を *ribbon link* とする。$\rho_i(D^2)$ $(i = 1, 2)$ を K_i によって *bound* される *ribbon disks* とする。$sing(\rho_2) = \{x \in D^2 | \#\rho_2^{-1}\rho_2(x) = 2\}$ が下図のようであると、K_2 は自明な結び目であり、K_1 上でのみ *SHT* を行って L を $L^* = L_1 \cup K_2$ に変えることが出来、L_1 は自明な絡み目で、K_2 と *split* している。

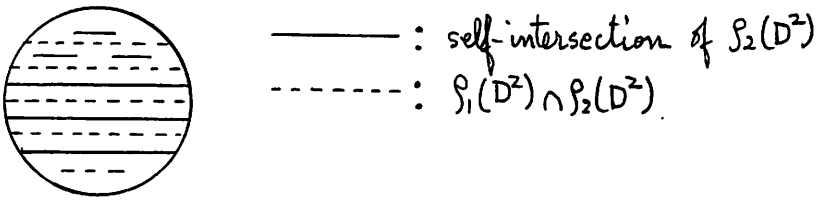


図　6.

証明。$\rho_1(D^2)$ の self-intersection および $\rho_1(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ に対し $\rho_1(D^2)$ 上で見て throughcut intersection の近くで K_1 に SHT を行う。この事により K_1 が link $L_1 = K_{11} \cup \cdots \cup K_{1p_1}$ となり、$\rho_1(D^2)$ は self-intersection のない ribbon disks $\rho_{11}(D^2), ..., \rho_{1p_1}(D^2)$ となる。更に $\rho_{1i}(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ は $\rho_{1i}(D^2)$ 上で見て slit intersection ($\Longleftrightarrow$ $\rho_2(D^2)$ 上で見て throughcut intersection) のみとなっている。throughcut intesection は ambient isotopy によって最も外側のものからはずせる。$\rho_2(D^2)$ の全ての thoroughcut self-intersection をはずすと自動的に slit self-intersection もなくなっている。 □

系 3.1 絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ の各成分 K_1, K_2 に *non-singular disks* $\rho_i(D^2)(i = 1, 2)$ が張れ、$\rho_1(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ が *ribbon type* のみならば、L は *free SHT trivial link* である。

証明。$\rho_1(D^2), \rho_2(D^2)$ の両方共定理３の条件を満たしているので、どちらからでも定理３の操作が始められる。 □

例 5 これは上の系の条件をみたしていないが *free SHT trivial link* である。

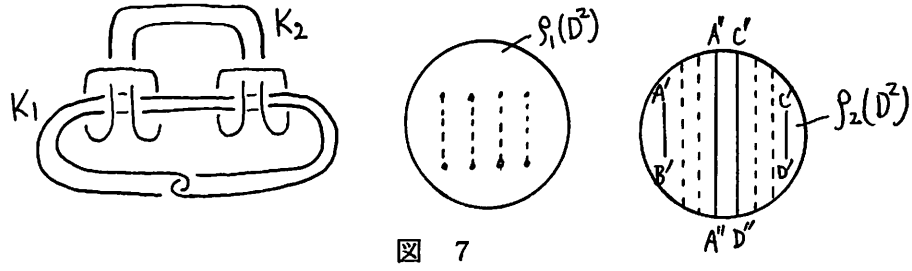


図 7

定理 4 $L = K_1 \cup K_2$ を *ribbon link* する。$\rho_i(D^2)(i = 1, 2)$ を K_i によって *bound* されている *ribbon disks* とする。
$\rho_2(D^2)$ は次をみたすとする。

(1) $sing(\rho_2) = \{x \in D^2 | \#\rho_2^{-1}\rho_2(x) = 2\}$ は下図のようになっている。

(2) $\rho_2(D^2)$ 上の各単純閉曲線 γ_i は *non-singular disk* D^2_{2i} を張り、$D^2_{2i} \cap D^2_{2j} = \emptyset$ $(i \neq j)$ かつ $D^2_{2i} \cap K_2 = \emptyset$

$\Longrightarrow K_1$ にのみ *SHT* を行って L を $L^* = L_1 \cup K_2$ に出来る。ここで、$L_1 = K_{11} \cup \cdots \cup K_{1p_1}$ は自明な絡み目で K_2 とは *split* している。

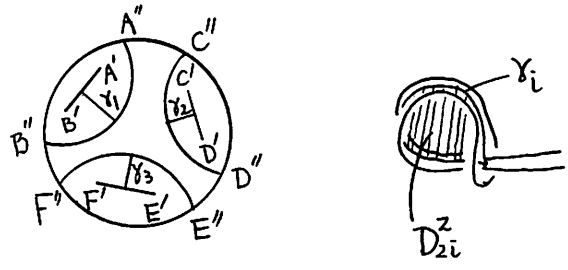


図 8.

証明。定理３と同様にして、$\rho_1(D^2)$ の self-intersection 及び $\rho_1(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ に対し $\rho_1(D^2)$ 上で見て全ての throughcut intersection の近くで K_1 にたいし SHT を行う。すると K_1 は link $L_1 = K_{11} \cup \cdots \cup K_{1p_1}$ となり、各 K_{1i} に self-intersection のない ribbon disk $\rho_{1i}(D^2)$ が張れ、$\rho_{1i}(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ は $\rho_{1i}(D^2)$ 上で見て slit intesection ($\Longleftrightarrow \rho_2(D^2)$ 上で見て throughcut intersection) のみとなっている。また、$\rho_{1i}(D^2) \cap \rho_{1j}(D^2) = \emptyset$ $(i \neq j)$ この $\rho_{1i}(D^2) \cap \rho_2(D^2)$ の slit type が $\rho_{1i}(D^2)$ 上に複数あるときは、$\rho_{1i}(D^2)$ 上にいくつか SHT arcs $\{\alpha_{ij}\}$ を取って α_{ij} 達で区切られる１つの領域中に slit type が１つのみになるように SHT を行う。この結果の特異円板を

改めて $\rho_{1i}(D^2)$ とする。$\rho_{1i}(D^2)$ 上で見れば throughcut type である。$\rho_2(D^2)$ 上の singularities は下図のようになる。

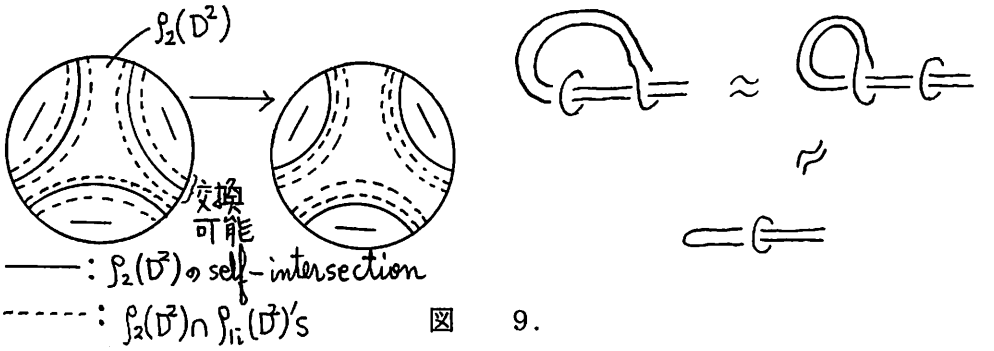


図 9.

条件（1）、（2）を使うと $\rho_2(D^2)$ 上で $\rho_{1i}(D^2)\cap\rho_2(D^2)$ と $\rho_2(D^2)$ の self-intersection の throughcut とが交換可能（このとき、$\rho_{1i}(D^2)$ 上に slit singularity が唯一つしか無いことを使う。slit が複数あると交換可能か否か不明）次に条件（2）を使って上記右図の変形をする（curl をなくす）すると $\rho_{1i}(D^2)$ $(i=1,2,...,p_i)$ が $\rho_2(D^2)$ から抜けて結論が得られる。 □

系 4.1 $L=K_1\cup K_2$ を *ribbon link* とし、$\rho_i(D^2)(i=1,2)$ を K_i によって *bound* される *ribbon disks* とする。$\rho_1(D^2),\rho_2(D^2)$ が共に定理4の条件（1）、（2）をみたすと L は *free SHT trivial link* である。

注 4 上の例5の図は定理4の系の条件を満たしている。

定理3と定理4を合わせると次の定理5になる。証明は定理4と同様である。

定理 5 $L=K_1\cup K_2$ を *ribbon link* とする。$\rho_i(D^2)$ $(i=1,2)$ を K_i によって *bound* されている *ribbon disks* とする。
$\rho_2(D^2)$ は次をみたすとする。

(1) $sing(\rho_2)=\{x\in D^2|\#\rho_2^{-1}\rho_2(x)=2\}$ は下図のようになっている。

(2) $\rho_2(D^2)$ 上の各単純閉曲線 $\{\gamma_i\cup\gamma_i'\}$ ($\gamma_i'=\emptyset$ のときもあり）が *non-singular disk* D^2_{2i} を張り、$D^2_{2i}\cap D^2_{2j}=\emptyset$ $(i\neq j)$, $D^2_{2i}\cap K_2=\emptyset$ $(i\neq j)$
$\Longrightarrow K_1$ にのみ *SHT* を行って L を $L^*=L_1\cap K_2$ に出来る。ここで、$L_1=K_{11}\cup\cdots\cup K_{1p_1}$ は自明な絡み目で K_2 とは *split* している。

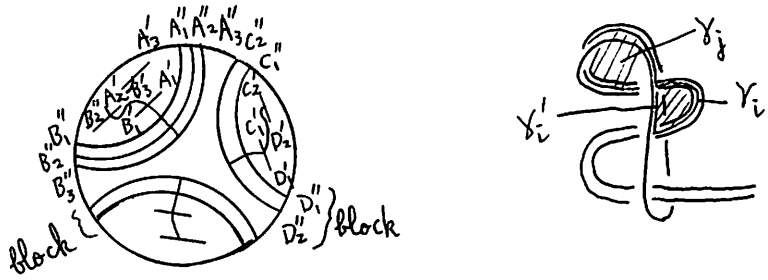


図 10.

3 ribbon link に対する disk-band system

定義 5 *ribbon link* $L=\bigcup_{i=1}^{m}K_i$ に対する *disk-band system DB*
$DB:=(\{D_{ij}^2\},\{B_{ik}\})_{i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,p_i;k=1,2,\ldots,q_i}$ (D_{ij}^2 は *disk* , B_{ik} は *band*) は次を満たすとする。

(1) $(\bigcup_{j=1}^{p_i}\partial D_{ij}^2\cup\bigcup_{k=1}^{q_i}\partial B_{ik})-Int(\bigcup_{j=1}^{p_i}\partial D_{ij}^2\cap\bigcup_{k=1}^{q_i}\partial B_{ik})=K_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$

(2) $D_{ij}^2\cap D_{i'j'}^2=\emptyset$ *for* $\forall i,i',j,j'$ *exept* $i=i',j=j'$

(3) $B_{ik}\cap B_{i'j'}=\emptyset$ *for* $\forall i,i',j,j'$ *exept* $i=i',j=j'$

(4) 任意の D_{ij}^2 に対し $(IntD_{ij}^2)\cap(\bigcup_{k,l}B_{k,l})$ は *ribbon type* で $\#((IntD_{ij}^2)\cap\bigcup_{k,l}B_{k,l})=1$ (連結成分の個数)

(5) 任意の i について $\bigcup_{j=1}^{p_i}D_{ij}^2\cup\bigcup_{k=1}^{q_i}B_{ik}$ は（抽象的には）円板に同相である。

$DB_i=(\{D_{ij}^2\},\{B_{ik}\})$ を K_i に対する *disk-band system* といい、$DB=\bigcup_{i=1}^{m}DB_i$ を 単に L の *disk-band system* という。

注 5 条件（5）より $\#\{B_{ij}\}=\#\{D_{ij}^2\}-1$ *i.e.* $q_i=p_i-1$ である。

定義より次の命題４、命題５は明らか。

命題 4 絡み目 $L=\bigcup_{i=1}^{m}K_i$ が *ribbon link* $\Longleftrightarrow$ L に対する *DB system* が存在する。

命題 5 絡み目 $L=\bigcup_{i=1}^{m}K_i$ を *ribbon link* とする。
任意の i について $(\bigcup_{j=1}^{p_i}D_{ij}^2)\cap\bigcup_{k,l}B_{k,l}=\emptyset$ $(k\neq i)$ をみたす L に対する *disk-band system* $DB=(\{D_{ij}^2\},\{B_{kl}\})$ が存在する。$\Longleftrightarrow$ L は *separate ribbon link* である。

命題 6 $L = K_1 \cup K_2$ を2成分絡み目とし、$DB = \{D^2_{11}, D^2_{12}, B_1, D^2_{21}, D^2_{22}, B_2\}$ を L に対する *disk-band system* とする。*(i.e.* $p_1 = p_2 = 2$*)*

(1) $B_1 \cap (D^2_{21} \cup D^2_{22}) = \emptyset$ かつ $B_2 \cap (D^2_{11} \cup D^2_{12}) = \emptyset$ 又は

(2) $B_1 \cap (D^2_{21} \cup D^2_{22}) \neq \emptyset$ かつ $B_2 \cap (D^2_{11} \cup D^2_{12}) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ L は *free SHT trivial link* である。

証明。1．の場合は命題5より L は separate ribbon link. 従って、L は free SHT trivial link である。

2．の場合。 全ての $B_2 \cap (D^2_{11} \cup D^2_{12})$ の所で K_2 に対し SHT を行うと、$K_2 \longrightarrow L_2$ となり、D^2_{11}, D^2_{12} の少なくとも1つの円板（例えば D^2_{11}）は交わりを持たなくなるので、その円板と B_1 を使って contract する。$D^2_{11} \cup B_1 \cup D^2_{12}$ は D^2_{12} に ambient isotopic. そして、$D^2_{12} \cap B_2 = \emptyset$ (何故なら、もし $D^2_{12} \cap B_2 \neq \emptyset$ なら初めにここで SHT を行っているから)。また $D^2_{12} \cap B_1 \neq \emptyset$ なら $D^2_{11} \cup B_1 \cup D^2_{12}$ を D^2_{12} に変形する途中で D^2_{12} を B_1 が通っている。故に D^2_{12} は交わりを持たない。従って L_2 は自明な絡み目で $D^2_{12} \cap L_2 = \emptyset$ ($\partial D^2_{12} \approx K_1$). 同様の事が全ての $B_1 \cap (D^2_{21} \cup D^2_{22})$ で行うことが出来るので L は free SHT trivial link. □

注 6 この命題の条件として「各 *band* B_1, B_2 がいずれかの *disk* の内部を通る」というのでは *free SHT trivial* になりそうにない例がある。

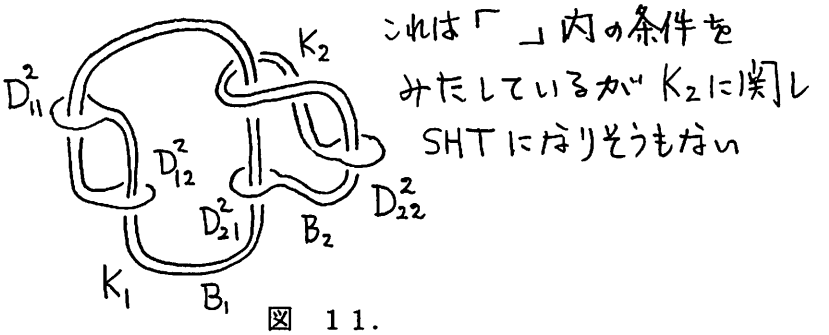


図 11.

これは「 」内の条件をみたしているが K_2 に関し SHT trivial になりそうもない。

定義 6 *disk-band system の characterizing graph*

下図のように *disk-band system* を *collapsing* して出来るグラフ G を DB の *characterizing graph* という。*characterizing graph* は *arrowed graph* である。

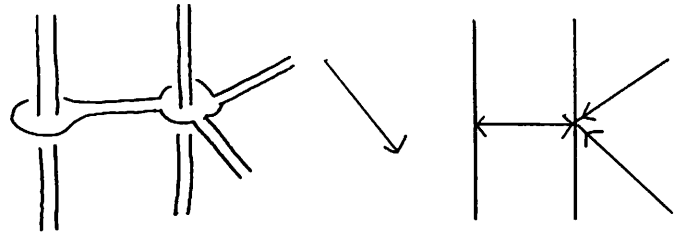


図　１２．

G の頂点では２本の辺だけが矢印を持たず、他の辺は頂点の近くで矢印を持つ。頂点が disk-band system の disk に対応し、辺 $\longleftrightarrow$ (途中に頂点がない) が１つの band に対応している。

定義 7 *Milnor tangle, Milnor solid torus tangle of order n.*

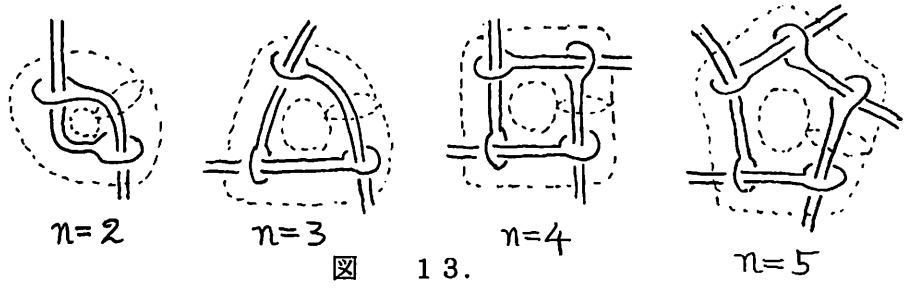


図　１３．

characterizing graph G における *Milnor cycle of length n.*

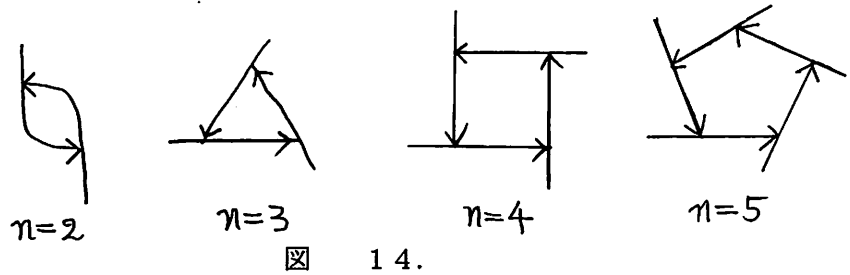


図　１４．

定義 8 *M-move, SHT, self-crossing change. Milnor (solid torus) tangle* における *M-move* とは次の変形のこととする。

n=4のとき

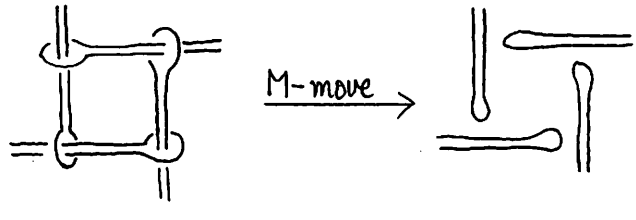


図　15.

Milnor (solid torus) tangle における *SHT* は次のようになる。

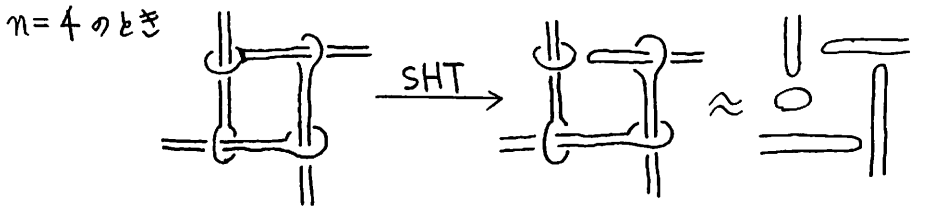


図　16.

絡み目の同じ成分同士の *crossing change* を *self crossing change* という。

定義 9　2成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ の K_1 と K_2 との間に有限個の互いに交わらない *Milnor tangle* があり（従ってどの *Milnor tangle* においても必ず K_1 と K_2 の *strings* が構成要素になっている)、これらの *tangle* を全て *M-move* で自明な *tangle* にしたとき、K_1 と K_2 が *split* するなら、L は K_1 と K_2 の *Minor union* になっているといい、$L = K_1 \odot K_2$ とかく。(上の K_1, K_2 を絡み目 L の *proper sublink* L_1, L_2 ($L = L_1 \cup L_2$) に代えても同様に定義出来る。ただし、L_1 と L_2 には共通の成分は無いものとする。)

注 7　*Milnor tangle* T_M を *M-move* で自明な *tangle* T_0 に変えても K_1, K_2 の各々の *knot type* は変えない。下図は *knot type* を変えているが、初めの部分が *Milnor union* でない。

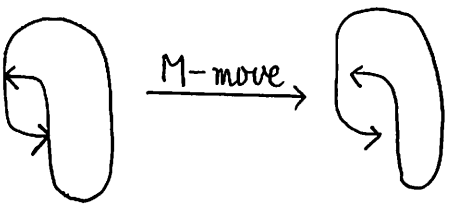


図　17.

定理 6　$L = K_1 \odot K_2$ となっており、K_1, K_2 が共に *ribbon knots* ならば、$L = K_1 \odot K_2$ は *free SHT trivial link* である。

証明。Milnor union になっているところで K_1 (又は、K_2) に対し SHT を行うと L は K_1 と K_2 と trivial circles (Milnor union の個数だけ) の split union になっている。K_1, K_2 はribbon link なので K_1 (または、K_2) に ribbon disk を張り ribbon singurality のところでSHT を行うと trivial link になる。結局 L は trivial link になったので free SHT trivial link である。 □

定理 7 V_M を *Milnor solid torus tangle* とすると、V_M から *trivial tangle* V'_M への *M- move* は V_M 内に含まれる１つの *string* の *self-crossing change* で実現出来る。

証明。下図より明らか。

図　１８.（後　出）

系 7.1 K_1 が自明な結び目で、２成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ が *order 2* の *Milnor tangle* のみで *Milnor union* になっている。$L = K_1 \odot K_2$ *(L* は *free SHT trivial* である必要はない。）
$\Longrightarrow$ L は K_1 に関し *covering homotopy trivial* である。

定義 10 *multi Milnor tangle of order n*
図は *order 2* の *multi Milnor tangle* である。*tangle* 内に *twist* がなければ *Milnor tangle* と同じに扱える。

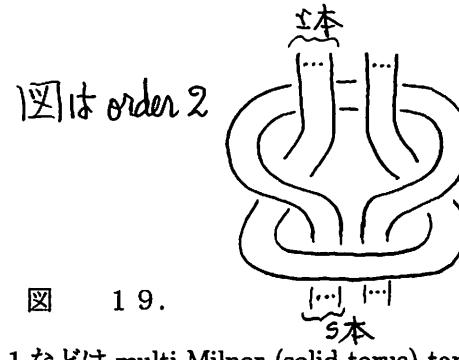
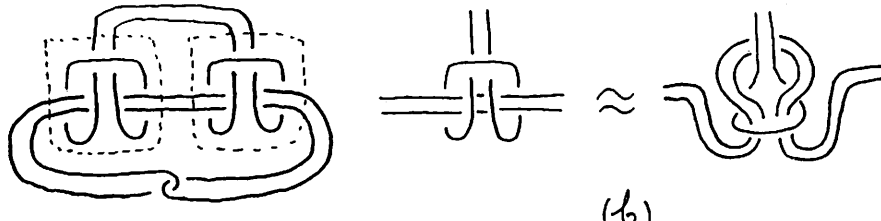


図　１９.

従って、定理６、定理７、系７．１などは multi Milnor (solid torus) tangle でも成り立つ。

例 6 *free SHT trivial link* かつ K_1, K_2 共に自明な結び目
(b) 図より、*(a)* 図の *tangle* は *multi Milnor tangle* になっている。従って、定理７、系より *covering homotopy trivial link* になる（この絡み目は *free SHT trivial link* なので当然 *covering homotopy trivial link* になる。）



(a)　　(b)

図　２０.

定義 11 *generalized Milnor tangle* と、その *M-move, self crossing change.*

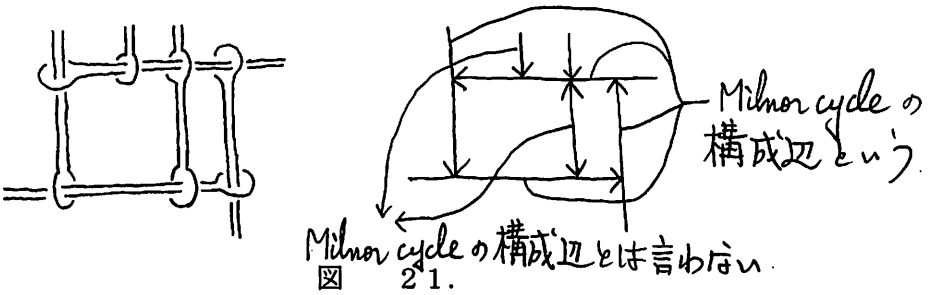


図　２１.

定理 8 *generalized Milnor solid torus tangle* の *M-move* は *Milnor tangle* の構成辺の *self-crossing change* で実現出来る（それ以外の *strings* の *self-crossing* では実現出来そうもない。）

図　２２.（後　出）

証明。上図より明らか。

注 8 以下 *arrowed graph* といったら *ribbon link* $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ の或る *disk-band system* DB の *characterizing graph* の事を言う事にする。

注 9 *free SHT trivial link* $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ の *proper sublink* H は再び *free SHT trivial link* である。

定義 12 *arrowed graph* $G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ に含まれる *generalized Milnor cycle* C_M が G で自明 *(trivial)* とは、C_M を *M-move* で *trivial edges* C_0 にすると C_M を構成していた *string* を含む各 G_i' が各々１点に *contract* するときをいう。

定義 13 *arrowed graph* $G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ に含まれる *generalized Milnor cycle* C_M が G を破壊 *(destroy)* するとは C_M を *M-move* で *trivial edges* に変換すると G が *contraction* によって m 個の点になるときを言う。

注 10 *Milnor cycle* C_M が G を破壊すれば、当然 C_M は G で自明である。

定理 9 $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ を m 成分 *ribbon link* とし、$G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ を L の DB の *characterizing graph* とする。
もし、次の性質を満足する *generalized Milnor cycles* $C_1, C_2, ..., C_p$ が G に存在すれば、L は *free SHT trivial link* である。

(1) 任意の C_i は G で自明である。

(2) 任意の G_i は $C_1, ..., C_p$ のいずれかの *Milnor cycles* の構成辺になっている。

注 11 条件（1）は G に含まれる全ての *generalized Milnor cycle* が G で自明であるといっているのではない。

証明。(1) より C_i に対応する DB のところで SHT を行うと C_i は自明だから K_i は trivial link かつ 他の成分と分離している。(2) より、に対応する G_i もいずれかの Milnor cycles の構成辺になっているのでどの K_i から始めても trivial link になる。よって L は free SHT trivial link である。 □

例 7 連結な *3-regular arrowed graph* G で $\longleftrightarrow$ という辺（途中に頂点がない辺）が全く無くかつ G に含まれる *generalized Milnor cycles* で G を破壊するものと破壊しないものを含む例。

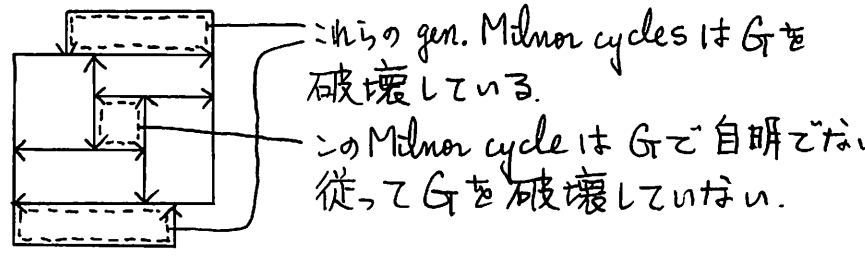


図　２３.

定理 10 *3-regular arrowed graph* G は *generalized Milnor cycle* を含む。

証明。(I) G に対応する disk-band system の band がいずれかの円板を通る場合（$\Longleftrightarrow G = \bigcup_i G_i$ において任意の G_i が辺 $\longleftrightarrow$ と異なる場合。即ち辺の途中に頂点がある。）図の＊印の部分から矢印を逆にたどり出す。矢印の頭を持つ頂点の部分にきたら（これは (I) の条件より必ずある。）矢印の頭を持つ辺に乗り移り進む。この方法で G のあるサイクル上を回り出したら、そのサイクルは Milnor cycle である。(I) の条件より上の方法で進めて、回り出さなければ G の辺の有限性より元に戻り、これが、Milnor cycle である。（この方法は少なくとも 1 つの Milnor cycle の存在を示しているのであって、他にgeneralized Milnor cycle が存在することもある。）

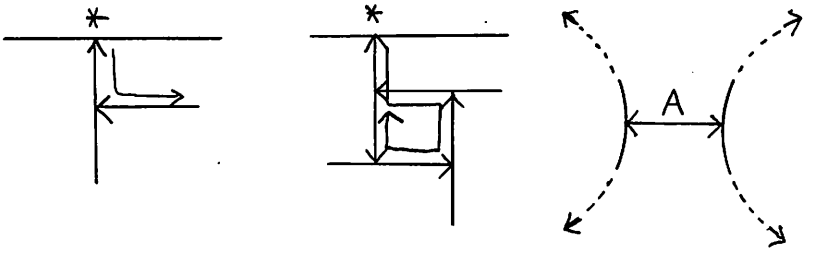


図　24.

(II) G_i が $\longleftrightarrow$ という事がある場合。$\longleftrightarrow$ という辺を G から取り除いたグラフを G' とする。1つの $\longleftrightarrow$ という辺を取り除くと新たに $\longleftrightarrow$ という辺が出現することがある。この時新たに 出現した $\longleftrightarrow$ という辺も次々と取り除いていく。この操作を行ってもグラフが3正則という性質は保たれている。また $G=\emptyset$ となる事はない。何故なら辺 A $\longleftrightarrow$ が最後の辺とすると、A の端点を含んでいる辺は A より先に取り除かれていなければならないが、それは内部に頂点（＝A の端点）を含むので不可能。よって $G' \neq \emptyset$ ただし、G' は非連結になる事はある。すると、G' は $\longleftrightarrow$ という辺を含まないので (I) の場合になり、G' は Milnor cycle を含む。故に、G は generalized Milnor cycle を含む。 □

次の定理１１は DB の characterizing graph G に含まれる generalized Milnor cycle C_M が G で自明になるための条件。

補助定理 1 *G に generalized Milnor cycle C_M が存在し、$V(G) \subset C_M \Longrightarrow C_M$ は G を破壊する。*

証明。Milnor cycle C_M を M-move で自明にすると C_M 上の頂点はなくなる。$V(G) \subset C_M$ だから他に頂点がなくなり、各 G_i は1点に contract していく。即ち C_M は G を破壊している。 □

定理 11 *ribbon link $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ の DB の characterizing graph G が 3-regular なら G で自明になる generalized Milnor cycle が存在する。*

証明。G から全ての辺 $\longleftrightarrow$ （途中に頂点がない辺）を取り除いたグラフ（或る $\longleftrightarrow$ を取り除いたとき新たに出来る辺 $\longleftrightarrow$ も更に取り除く）を G' とする。; $G' = G - \{\longleftrightarrow' s\}$. G' の任意の1つの成分を G_1 とする（定理１０(II) の証明より $G' = \emptyset$ という事はない）。G_1 は再び3正則グラフだから定理１０より generalized Milnor cycle C を含む。C が G_1 を破壊する事を示せば C は G_1 で自明であり、従って C は G で自明である。そこで、C が G_1 を破壊することを示す。

C を M-move で自明な tangle にしたものを C_0 とする。この M-move で G_1 が G_1' になったとする。

(1) $V(G_1) \subset C$ なら補助定理 1 より C は G_1 を破壊している。

(2) G_1' の全ての辺が C_0 の辺になっているなら、やはり C は G_1 を破壊している。

(3) $C \xrightarrow{M-move} C_0$ によって生まれた C_0 の free vertices を contraction して全て頂点になったとすると C は G_1 を破壊している。

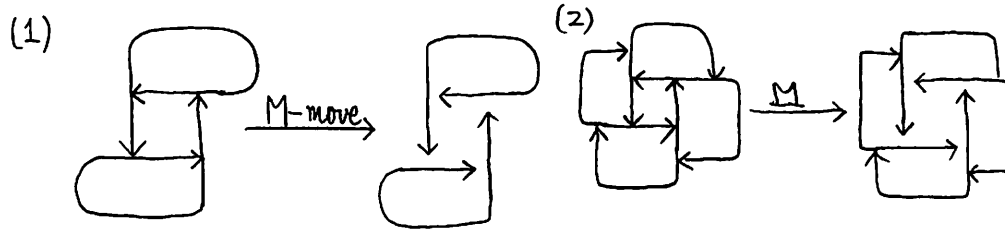
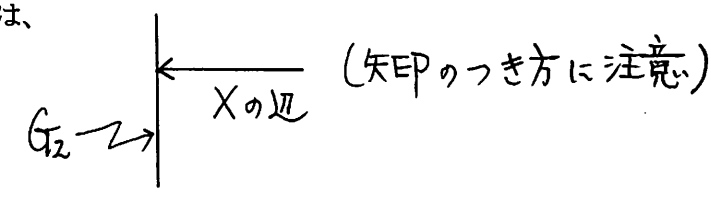


図　　２５.

(4) $C \xrightarrow{M-move} C_0$ によって生まれた C_0 の free vertices から contraction を始めて頂点だけにならない G_1 の部分グラフがあったとする。その連結成分の１つを G_2 とする。$G_2 : G_1 - \{C \cup \text{contractible edges}\}$ の１つの成分

$G_2 \cap X$ の頂点では、

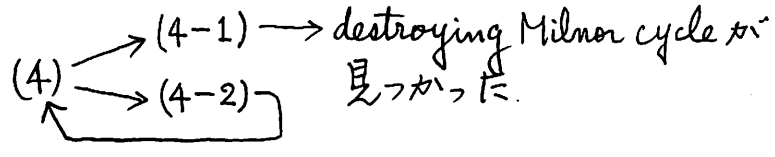


G_2 は再び３正則グラフ、従って、定理 １０より generalized Milnor cycle C_2 を含む。

(4-1) C_2 が G_2 を破壊しているとする。その時 $C_2 \xrightarrow{M-move} \hat{C}_2$ (trivial tangle) とすると、C_2 を contract したとき、X 側に free vertices が出来て、$G_1 - G_2$ が m 個の点となり、結局 C_2 が G_1 を破壊している事になる。

(4-2) C_2 が G_2 を破壊していない時、(4) の step を初めから行い、新しい G_3 に対し generalized Milnor cycle C_3 に対し同様の事を行う。

G_1 は有限グラフなので、必ず (4-1) で終わる。以上より、G_1 に G_1 を破壊する



generalized Milnor cycle が存在した。この destroying Milnor cycle は G で自明で

ある。 □

系 11.1 G から全ての辺 $\longleftrightarrow$ を取り除いたグラフ（ある $\longleftrightarrow$ を取り除いたとき出来る辺$\longleftrightarrow$ も更に取り除く）が連結なら G に G を破壊する *generalized Milnor cycle* が存在する。

注 12 定理１０，１１は定理９の条件（１）に対する１つの解である。

次の定理は定理９の条件（２）をみたすための１つの解である。

定理 12 $L = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ を *m-component ribbon link* とする。$G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ を L の１つの DB の *characterizing graph* で *3-regular* とする。G は *generalized Milnor cycles* $C_1, ..., C_p$ を含んでいるとする。
C_i の *cycle* としての長さ $l(C_i) = n_i$ とする。
ある G_j が $C_1, ..., C_p$ の構成辺となっている個数を s_j とする。即ち、G_j が $\bigcup_{i=1}^{p} C_i$ の中に現れる回数 $:= s_j \geq 0$.
このとき、任意の G_j は $C_1, ..., C_p$ のいずれかの構成辺になっている。
$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j \in \{j | s_j \geq 1\}} (s_j - 1) = \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{m} (s_j - 1) = m$

証明。($\Longrightarrow$) もし、各 G_j が $C_1, ..., C_p$ のうち、唯１つに必ず含まれ、しかも構成辺として唯１回になっていると (i.e. $s_j = 1$)、$\sum_{i=1}^{p} n_i = m$ である。さらに、ある G_j が $C_1, ..., C_p$ の中に複数回 $(= s_j)$ 含まれていると、

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j \in \{j | s_j \geq 1\}} (s_j - 1) = m$$

($\Longleftarrow$) 一般に $\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j \in \{j | s_j \geq 1\}} (s_j - 1) \leq \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{m} (s_j - 1) = m$
そして、例えば、もし G_m のみが $C_1, ..., C_p$ のいずれの構成辺にもなっていないと、

$$\sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j \in \{j | s_j \geq 1\}} (s_j - 1) = \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{m-1} (s_j - 1)$$
$$< \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{m} (s_j - 1) = m \text{ である。}$$ □

参考文献

[1] [H] Hillman J.W.: Alexander Ideal of links, Lecture Note in Mathematics 895, Springer-Verlag ,Berlin Hedelberg New York,1981

[2] Kobayashi K., Kodama K. and Shibuya T. : Separate ribbon link, free SHT trivial link and h-split link , (in preparation)

[3] [M] Milnor J.W. : Isotopy of links, A symposium in honour of S.Lefshetz (ed. by R.H.Fox, D.S.Spencer and W.Tucker), Princeton University Press, Princeton,1957, 280-306

[26] $n=4$ のときに証明する

self-crossing change する string を K とする

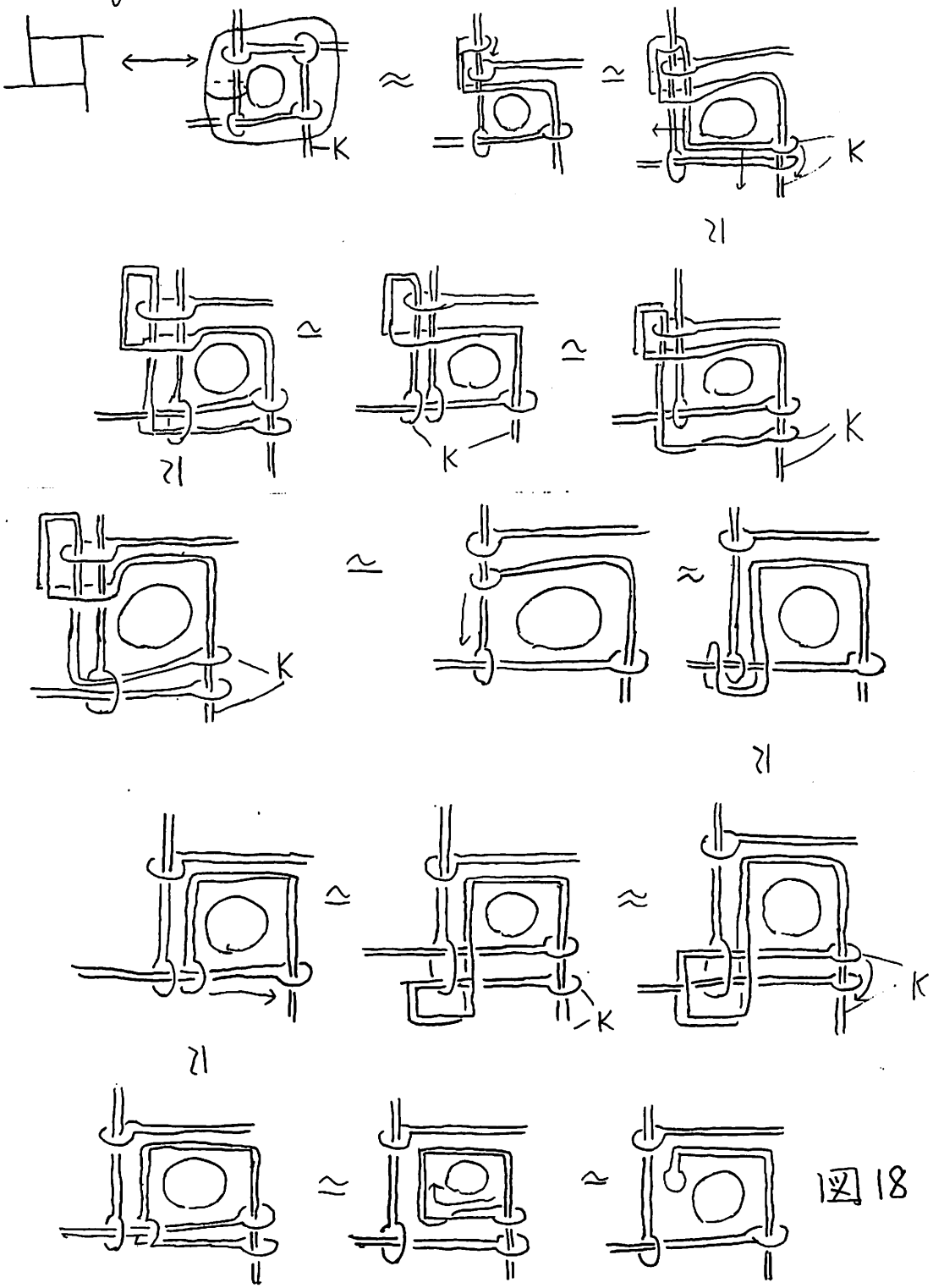


図 18

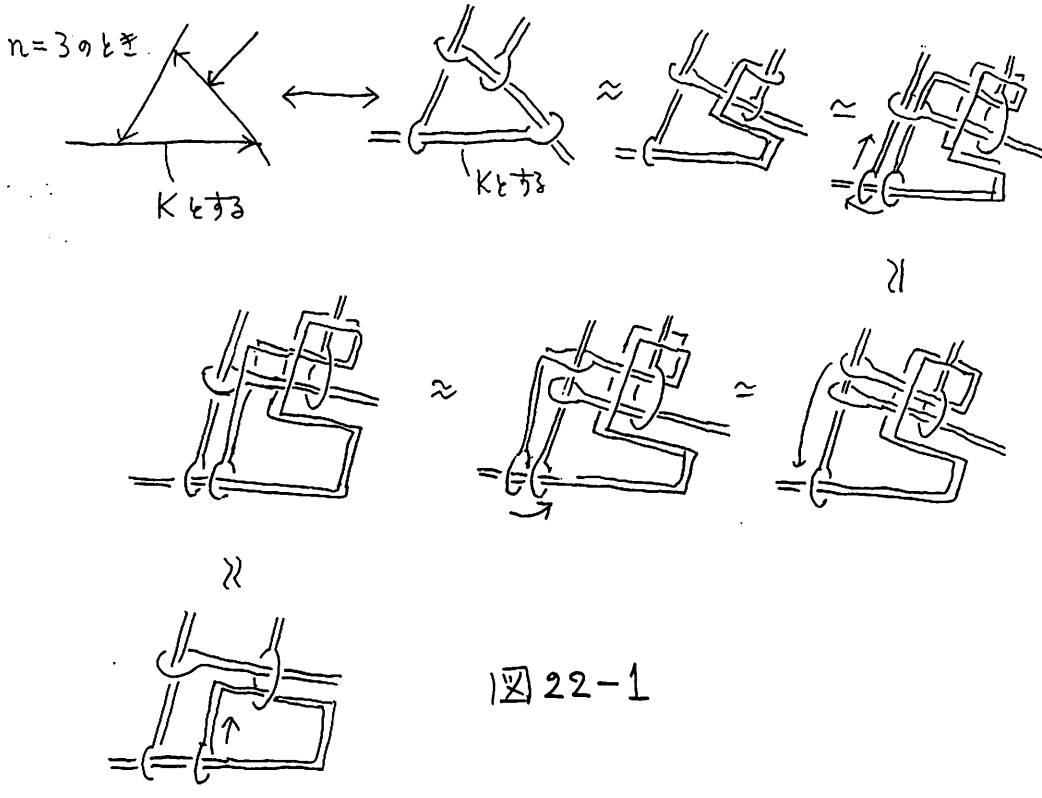


図22−1

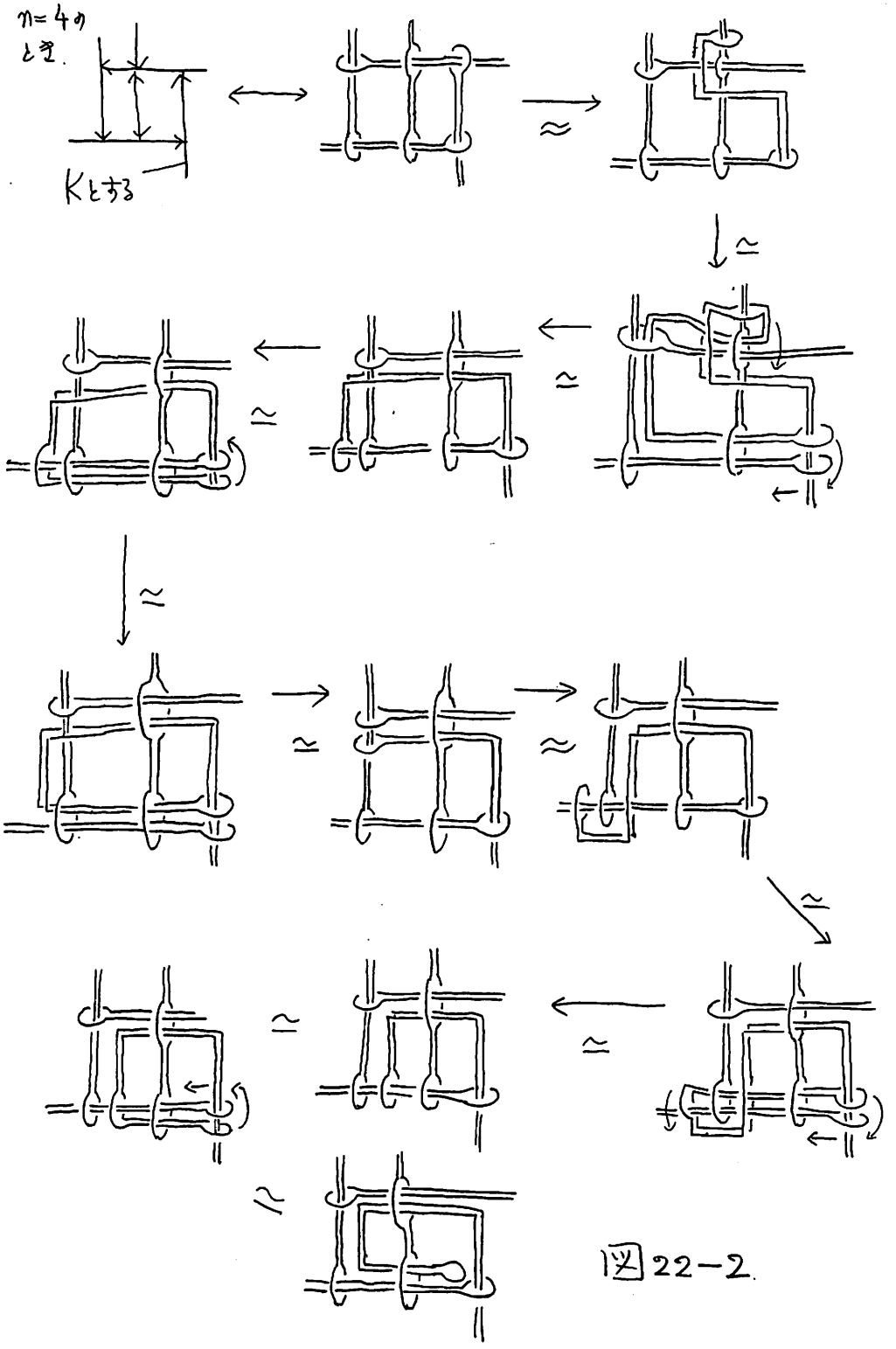


図22−2.