

HAKONE SEMINAR 15 (1999) 7-30.

∂ -link の disjoint Seifert surfaces を利用して 作った有限被覆空間について

Kazuaki Kobayashi

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

平成11年 12月 20日

1 Introduction

この論文では、 ∂ -link の disjoint Seifert surfaces に沿って3次元球面 S^3 を切り開き、そのコピーを n 個用意し、切り開いた disjoint Seifert surfaces を適当に張り合わせるにより得られる n 重被覆空間について、グラフの助けを借りていくつかの性質を研究する。

∂ -link の disjoint Seifert surfaces を利用して作る有限被覆空間の構成の方法
構成 $L = (K_1, \dots, K_m)$ を S^3 内の ∂ -link とする。 $F = \coprod_{i=1}^m F_i$ を S^3 内の向き付け可能な曲面の非交和 (disjoint union) で各 F_i の境界が K_i となっているものとする。(i.e. $F_i \subset S^3$, $\partial F_i = K_i$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ ($i \neq j$))

$X = S^3 - \text{Int}U(L)$ とし、各 F_i で X を切り開いたものを \bar{X} とおく。

$\partial \bar{X} = F_1^\pm \cup \dots \cup F_m^\pm \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$ で各 V_i は円環 (annulus) と同相である。

\bar{X} の n 個のコピー $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ を用意する。

$\partial \bar{X}_i = F_{i1}^\pm \cup \dots \cup F_{im}^\pm \cup V_{i1} \cup \dots \cup V_{im}$ ($i = 1, \dots, n$) とおく。 V_{ij} は円環 (annulus) と同相。

F_{ij}^+ と F_{kj}^- とを同一視する。一般に第2添数が同じ j の i 番目と k 番目 ($i = k$ でも良い) を同一視する。従って各 j に対し $\{1, 2, \dots, n\}$ の1つの置換 π_j ($j = 1, 2, \dots, m$) が決まる。同一視を指示する n 個の数字 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の m 個の置換 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ によって位相空間

$$\tilde{X}_n := \coprod_{i=1}^n X_i / \sim_{\pi_1, \dots, \pi_m}$$

が決まる。 $p: \tilde{X}_n \rightarrow X$ は n 重被覆空間になる。 \tilde{X}_n に対し次のようにしてグラフ

Γ が決まる。

先ず n 個の頂点 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を用意し $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ に対応させる。 \tilde{X}_n を構成する過程で F_{ij}^+ と F_{kj}^- が同一視されたとき、 v_i から v_k へ、向きが付きかつ j という色のついた辺で結ぶ。このようにしてグラフ Γ を作る。 Γ は $2m$ regular m colored directed graph (with loops and multi-edges) となる。

$|V(\Gamma)| = n, |E(\Gamma)| = mn$, 各頂点に m 色の辺が $2m$ 本ずつ集まっている。従って Γ は $2m$ regular graph. \tilde{X}_n の基底空間 $X = S^3 - \text{Int}U(L)$ は \bar{X} において F_j^+ と F_j^- を張り合わせて出来る (即ち、一度切り開いて全く同じに再び張り合わせる) と考えられるから、 X に対応するグラフは m 個の円を 1 点でくっつけた bouquet B_m である。そこで 「 $p_X: \tilde{X}_n \rightarrow X$ が (正則) 被覆空間」 \iff 「 $p_0: \Gamma \rightarrow B_m$ が (正則) 被覆空間」という対応が出来る。即ち次の定理が成り立つ。

定理 1 X の n 重被覆空間 \tilde{X}_n は ∂ -link $L = \bigcup_{i=1}^n K_i$ と $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ の張り合わせを指定しているグラフ Γ 及び L に張った非交和向き付け可能曲面 $F = \bigsqcup_{i=1}^n F_i$ によって決まる。(この構成法では、出来る被覆空間が正則とは限らない。)

グラフの被覆空間に関しては

J.Gross and T.Tucker "Topological Graph Theory" Wiley Interscience Series を参照のこと。

Cayley graph

A を有限群とし、 $W = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ を A の生成族とする (即ち A の任意の元は W の元の積で書かれるが W の全ての元が生成元である必要はなく、また $x_i = x_j$ であっても良い)。 W の各元に異なる色を対応させておく。このとき、The "(right) Cayley color graph" $C(A, W)$ とは、頂点集合 $V(C(A, W))$ として A を取り、辺集合 $E(C(A, W))$ としてカルテシアン積 $W \times A$ を取る。辺 (x, a) は、その端点として a と ax ($a \in A, x \in W$) をもち a から ax へ向きを与える。辺 (x, a) を x_a と書くこともある。辺には x から決まる色を与える。辺の向きと色を無視したとき、 $C(A, W)^0$ と書き、群 A の W に関する Cayley graph という。

Cayley graph のもう 1 つの定義は Cayley color graph $C(A, W)$ で生成元 x が A で位数 2 を持つとき、任意の $a \in A$ に対し Cayley color graph $C(A, W)$ の 2 つの辺 x_a (a から ax へ) と x_{ax} ($= x_a^{-1}$) (ax から a へ) を 1 辺とし、そのラベルを x_a または x_{ax} としたものである。この、もう 1 つの Cayley graph を $C(A, W)^1$ とかく。

$C(A, W)^0$ も $C(A, W)^1$ も共に Cayley graph と呼ばれる。

注 1 $C(A, W)$ (または、 $C(A, W)^0, C(A, W)^1$) は生成族の集合 W の取り方によっ

て変わる。

例 1 3次対称群 $A = S_3 := \{1, 2, 3\}$ 上の置換の全体
 $|S_3| = 6$ だから頂点の数は6個。 $|S_3| = 6$ は次の2つの表示を持つ。
 $S_3 = \langle x, y | x^2 = y^2 = 1, xyx = yxy \rangle (x = (12), y = (23))$
 $= \langle a, b | a^3 = b^2 = 1, (ab)^2 = 1 \rangle (a = (123), b = (23))$
 $W_1 = \{x, y\}, W_2 = \{a, b\}$ とおく。

図 1.

$\beta = \text{rank}H_1(C(S_3, W_1)) = 7$	$\beta = \text{rank}H_1(C(S_3, W_2)) = 7$
4正則グラフ	4正則グラフ
6サイクル有り	6サイクル無し

例 2 $C(A) = Z_6, W_1 = \{1\}, W_2 = \{1, 1, 1\}$

$C(Z_6, W_1)$

$C(Z_6, W_2)$

図 2.

Voltage Graph

G を directed graph、 A を有限群とする。 $D(G)$ は G の各辺に向きをつけた辺の集合とし、 e_+ は $D(G)$ の辺の向きとし e_- の向きは対応する $D(G)$ の辺の向きと逆の向きとする。

対応 (写像) $\alpha : D(G) \rightarrow A$ は $\alpha(e_-) = (\alpha(e_+))^{-1}$ をみたすとき (ordinary) voltage assignment という。

$\{\alpha(e) | e \in E_+(G)\}$ を voltage という。 A を voltage group という。

(G, α) を (ordinary) voltage graph という。

voltage graph (G, α) の derived graph $G^\alpha = G \times_\alpha A$ を次で定義する。

$V(G^\alpha) = V(G) \times A, E(G^\alpha) = E(G) \times A$

$e = \vec{uv} \in E(G)$, $\alpha(e) = g$ のとき $(u, a) \in V(G^\alpha)$ は (e, a) によって $(v, ag) = (V, a\alpha(e))$ と結ばれる。 (u, a) , (e, a) 等は u_a, e_a とかくこともある。

例 3 $G = B_2, \mathcal{A} = D_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^5 = 1, (ab)^2 = 1 \rangle$
 $\alpha_1(e_1) = a, \alpha_1(e_2) = b \qquad \alpha_2(e_1) = a, \alpha_2(e_2) = ab$

図 3.

例 4 $G = B_2, \mathcal{A} = \mathbf{Z}_5$ 位数5の巡回群 $\alpha: B_2 \rightarrow \mathbf{Z}_5$
 $\alpha(e_1) = 1, \alpha(e_2) = 2 \qquad B_2^\alpha \cong C(\mathbf{Z}_5, W), W = \{1, 2\}$

図 4.

例 5 $G = B_2, \mathcal{A} = \mathbf{Z}_{12}$ (位数12の巡回群) $\alpha_1(e_1) = 2, \alpha_1(e_2) = 3; \alpha_2(e_1) = 2, \alpha_2(e_2) = 4$ とすると
 $B_2^{\alpha_1}$ は連結であり、 $B_2^{\alpha_2}$ は非連結である。

図 5.

定義 1 連結なグラフ G, \tilde{G} に対し写像 $f: \tilde{G} \rightarrow G$ が *graph covering* とは、辺 $e \in E(\tilde{G})$, 頂点 $v \in V(\tilde{G})$ に対し, $f(e) \in E(G), f(v) \in V(G)$ であって $\bar{f}: |\tilde{G}| \rightarrow |G|$ が位相空間として被覆空間となっていること。

定義 2 *graph covering* $f: \tilde{G} \rightarrow G$ が *regular covering* (正則被覆空間) とは、ある (有限) 群 \mathcal{A} が存在して、次を満たすときを言う。

(1) \mathcal{A} は \tilde{G} に自由に作用している。(即ち、任意の $a \neq id \in \mathcal{A}$ と任意の $v \in V(G)$ に対し $va \neq v$ である。)

(2) $\tilde{G}/\mathcal{A} \cong G$ (グラフとして同形)。ここで、 \tilde{G}/\mathcal{A} は $va = v, ea = e$ となる $a \in \mathcal{A}$ があれば $v \sim va, e \sim ea$ ($v \in V(\tilde{G}), e \in E(\tilde{G})$) とすることを意味している。

\mathcal{A} を \tilde{G} の被覆変換群といい、 $Cov(\tilde{G})$ ともかく。この時、 \tilde{X} を X の \mathcal{A} -covering という。即ち \mathcal{A} -covering とは *regular covering* であって、その被覆変換群が \mathcal{A} の時をいう。

注 2 \mathcal{A} は $V(\tilde{G})$ に推移的 (*transitive*) に作用している必要はない。

例 6 Cayley graph の間の写像 $p: C(\mathbf{Z}_{rn}, \{1\}) \rightarrow C(\mathbf{Z}_n, \{1\})$

$n = 3, r = 2$ とすると、

$$C(\mathbf{Z}_6, \{1\}) \qquad C(\mathbf{Z}_3, \{1\})$$

図 6.

Cayley graph $C(\mathbf{Z}_6, \{1\})$ への \mathbf{Z}_2 -action Φ を $\Phi(0)(v_i) = v_i, \Phi(1)(v_i) = v_{3+i}, \text{ mod } 6$ で定義する。この \mathbf{Z}_2 -action は $C(\mathbf{Z}_6, \{1\})$ に推移的には作用していない。 \mathcal{A} が $V(\tilde{G})$ に推移的に作用していると、 G は必然的に B_m になってしまい、正則被覆空間の base space としては狭すぎる。

命題 1 連結グラフ G から \mathcal{A} への voltage $\alpha: D(G) \rightarrow \mathcal{A}$ が与えられると $G^\alpha = G \times_\alpha \mathcal{A}$ は G の正則被覆空間となる。

証明。 \mathcal{A} の G^α への作用 Φ は $\Phi(a)(v_b) = v_{ab} \neq v_b$ (ただし $a \neq id \in \mathcal{A}$) だから \mathcal{A} は G^α に自由に作用している。 $V(G^\alpha) = V(G) \times \mathcal{A}, E(G^\alpha) = E(G) \times \mathcal{A}$ で $p: G^\alpha \rightarrow G$ は $p(v_a) = v, p(e_a) = e_a$ であり $G^\alpha/\mathcal{A} \cong G$ である。 \square

定理 2 B_m を m 本のループからなる bouquet とする。

1. 任意の有限群 \mathcal{A} に対し Cayley graph $C(\mathcal{A}, W)$ は B_m の正則被覆空間になる。ここで $|W| = m$ とする。
2. $f: \tilde{B}_m \rightarrow B_m$ が正則被覆空間なら、 $\mathcal{A} = Cov(\tilde{B}_m)$ に対し、次をみたく voltage $\alpha: D(B_m) \rightarrow \mathcal{A}$ がある。

(a) $\{\alpha(D(B_m))\}$ は \mathcal{A} を生成している。

(b) $\tilde{B}_m \cong B_m^\alpha (:= B_m \times_\alpha \mathcal{A})$

注 3 (a) より $B_m^\alpha = C(\mathcal{A}, W)$, $W = \alpha(E(B_m))$ となる。

証明。(1) $V(B_m) = \{v\}$, $E(B_m) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とおく。 $W = \{x_1, \dots, x_m\}$ とおき、 voltage $\alpha : D(B_m) \rightarrow \mathcal{A}$ を $\alpha(e_i) = x_i$ とおく。すると W は \mathcal{A} の生成族だから、 $a \in \mathcal{A}$ に対し $a = 1 \cdot w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ ($x_{i_j} \in W$) とかける。従って $C(\mathcal{A}, W)$ は連結、 $2m$ 正則グラフでさらに $b \in \mathcal{A} = V(C(\mathcal{A}, W))$ に対し \mathcal{A} の作用は $a \cdot b \neq b$ 。従って \mathcal{A} は $V(C(\mathcal{A}, W))$ (または $C(\mathcal{A}, W)$) に自由に作用していて、 $V(C(\mathcal{A}, W)/\mathcal{A}) = \{v\}$ (1 頂点) である。故に、 $C(\mathcal{A}, W)/\mathcal{A} \cong B_m$ または、 $C(\mathcal{A}, W) \cong B_m^\alpha$ であり、「上の命題から証明される。」としても良い。

(2) $f : \tilde{B}_m \rightarrow B_m$ が正則被覆空間で $\mathcal{A} = \text{Cov}(\tilde{B}_m)$ とする。 $v_1 \in V(\tilde{B}_m)$ を 1 つ取る。 v_1 から出ている辺 $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$, v_1 に入っている辺を $\tilde{e}'_1, \dots, \tilde{e}'_m$ とする。 $f(\tilde{e}_i) = f(\tilde{e}'_i) = e_i \in E(B_m)$ とする。 $\tilde{e}_i = v_1 v_i$ とおくと $f(v_1) = f(v_i) = v \in V(B_m)$ だから $v_1 \cdot x_i = v_i$ となる $x_i \in \mathcal{A}$ がある。($v_i = v_1$ のときもある。そのときは $x_i = \text{id}$)。 $W = \{x_1, \dots, x_m\}$ とする。 $\alpha : D(B_m) \rightarrow \mathcal{A}$ を $\alpha(e_i) = x_i$ とおくと \tilde{B}_m は連結だから任意の頂点 $u \in V(\tilde{B}_m)$ に対し始点を v 、終点を u とする道 (辺の列) $w_1 \cdots w_k$ がある。そして適当な $x_{i_j} \in W$ に対し $w_{i_j} = x_{i_j}$ となっている。故に $\{\alpha(D(B_m))\}$ は \mathcal{A} を生成している。

また、 $\tilde{B}_m \cong B_m^\alpha$ である。このとき、 \mathcal{A} が B_m^α に推移的に作用していることもわかる。 □

Seifert 曲面と graph covering を利用した link L の \mathcal{A} -covering space の構成前に Seifert 曲面を利用した有限被覆空間の構成法を述べたが、ここでは graph covering を考慮に入れて述べてみる。

$L = \bigcup_{i=1}^m K_i$ を ∂ -link とし、 $\{F_i\}_{i=1, \dots, m}$ を向き付け可能曲面で $\partial F_i = K_i$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ となるものとする。 $X = S^3 - \text{Int}U(L)$ とし $F_i \cap X$ を改めて F_i とおく。 $\{F_i\}$ で X を切り開いたものを \bar{X} とし、そのコピーを $\bar{X}_{a_1}, \dots, \bar{X}_{a_n}$ とする。ただし $a_i \in \mathcal{A}$, $n = |\mathcal{A}|$ (\mathcal{A} は後述の有限群)

$\partial \bar{X} = F_{a_1}^\pm \cup \dots \cup F_{a_m}^\pm \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$, $V_i \cong \text{annulus}$ である。そこで、 $\partial \bar{X}_{a_i} = F_{a_i}^\pm \cup \dots \cup F_{a_m}^\pm \cup V_{a_i,1} \cup \dots \cup V_{a_i,m}$ とする。 B_m を m 本のループからなる bouquet とし、 \mathcal{A} を有限群とし、 $\alpha : D(B_m) \rightarrow \mathcal{A}$ を voltage assignment とする。($D(B_m)$ は B_m の向きのついた辺の集合) すると、 $B_m^\alpha = B_m \times_\alpha \mathcal{A}$ は B_m の正則被覆空間になる。 $V(B_m^\alpha) = V(B_m) \times \mathcal{A}$, $E(B_m^\alpha) = E(B_m) \times \mathcal{A}$ 。

$E(B_m) = \{e_1, \dots, e_m\}$, $V(B_m) = \{v\}$ とおく。 $V(B_m^\alpha) \ni (v, a_i) = v_{a_i}$, $E(B_m) \ni (e_j, a_i) = e_{j, a_i}$ とする。今頂点 v_{a_i} と $v_{a_i, \alpha(e_j)}$ が辺 (e_j, a_i) で結ばれているので

$F_{a_i,j}^+ \subset \bar{X}_{a_i}$ と $F_{a_i\alpha(e_j),j}^- \subset \bar{X}_{a_i\alpha(e_j)}$ とを張り合わせる。 $\tilde{X}(L) = \coprod_{a_i \in A} X_{a_i} / \sim$ とおく。 辺に向きがついている事とその向きにしたがって曲面の $F_{a_i,j}^+$ と $F_{a_i\alpha(e_j),j}^-$ を張り合わせる事に注意

定理 3 $p_X : \tilde{X}(L) \rightarrow X(L)$ が上記の方法で作られた被覆空間とする。 $\theta : \pi_1(X(L)) \rightarrow \pi_1(B_m) \cong F(m)$ を $\theta(m_i) = x_i$ とする写像とする。ここで m_i は K_i の meridian (θ は唯一つではない)。すると、内部自己同型の範囲内で $p_{X\#}\pi_1(\tilde{X}(L)) = \theta^{-1}(K)$ となる $\pi_1(B_m)$ の正規部分群 K がある。

逆に $\theta^{-1}(K)$ に対し、上記の方法でつくられる $p_X : \tilde{X}(L) \rightarrow X(L)$ があって $p_{X\#}\pi_1(\tilde{X}(L)) = \theta^{-1}(K) \text{ mod } \text{Inn}(F(m))$ となる。

証明。 $\tilde{X}(L)$ の作り方からグラフの被覆空間 $p_B : \tilde{B}_m \rightarrow B_m$ がある。 $\tilde{\theta} : \tilde{X}(L) \rightarrow \tilde{B}_m$ を θ のリフトとする。また $B_m^\alpha \cong \tilde{B}_m$ 。そこで $p_{B\#}\pi_1(\tilde{B}_m) = K$ とおく。 $\omega : (I, \partial I) \rightarrow (\tilde{X}(L), \tilde{x}_0)$ を \tilde{x}_0 を基点とするループとする。 $\theta \circ p_{X\#}([\omega]) = p_{B\#} \circ \tilde{\theta}([\omega]) \in K$, よって $p_{X\#}([\omega]) \in \theta^{-1}(K)$ 。故に $p_{B\#}\pi_1(\tilde{B}_m) \subset \theta^{-1}(K)$ 。

逆に $[\tau] \in \theta^{-1}(K)$ とすると、 $\theta([\tau]) \in K = p_{B\#}\pi_1(\tilde{B}_m)$ 。従って $p_{B\#}([\tilde{\tau}] = \theta([\tau])$ となる閉曲線 $\tilde{\tau} : (I, \partial I) \rightarrow (\tilde{B}_m, \tilde{v})$ がある。 θ 及び $\tilde{\theta}$ の作り方から、 $\tilde{\theta}([\tilde{\omega}] = [\tilde{\tau}]$ となる、閉曲線 $\tilde{\omega} : (I, \partial I) \rightarrow (\tilde{X}(L), \tilde{x}_0)$ ある。そして、 $p_{X\#}([\tilde{\omega}] = [\tau]$ 。ゆえに、 $[\tau] \in p_{X\#}\pi_1(\tilde{X}(L), \tilde{x}_0)$ 。よって、 $\theta^{-1}(K) \subset p_{X\#}\pi_1(\tilde{X}(L), \tilde{x}_0)$ 。ゆえに、 $\theta^{-1}(K) = p_{X\#}\pi_1(\tilde{X}(L), \tilde{x}_0)$ 。

次に、 $\alpha : D(B_m) \rightarrow A$ を voltage assign. で、それから導かれる準同型 $\hat{\alpha} : F(m) \rightarrow A$ が全射で $\text{Ker}\hat{\alpha} = K$ となるものとする。 $B_m^\alpha = B_m \times_\alpha A$ を作り、 B_m^α の辺の接合関係 (incident relation) を利用して \bar{X} のコピー $\bar{X}_{a_1}, \dots, \bar{X}_{a_n}$ ($n = |A|$) を張り合わせる。出来た被覆空間 covering space $\tilde{X}(L)$ は $\text{Cov}(\tilde{X}(L)) \cong A$ で $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}(L)) = \text{Ker}\alpha \circ \theta = \theta^{-1}(\text{Ker}\alpha) = \theta^{-1}(K)$ である。 \square

例 7 $L = K$ を三つ葉結び目 (trefoil knot) とする。その基本群の表示を $G(K) = \pi_1(S^3 - K) = \langle x, y | xyx = yxy \rangle$ とする。3次の対称群の表示を $S_3 = \langle a, b | a^2 = b^3 = 1, aba = bab \rangle$ とする。準同形 $\phi : G(K) \rightarrow S_3$ を $\phi(x) = a, \phi(y) = b$ で定義する。すると、 $\text{Ker}\phi$ は x^2, y^2 で生成される $G(K)$ の正規部分群。準同形写像 $\theta : G(K) \rightarrow F_1 \cong \mathbf{Z} \cong H_1(S^3 - K) = \langle t | - \rangle$ を $\theta(x) = \theta(y) = t$ で定義すると、 $\theta(xy^{-1}) = 1$ 。故に、 $xy^{-1} \in \text{Ker}\theta$ である。しかし、 $\phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y) = ab \neq 1$ 。ゆえに、 $xy^{-1} \notin \text{Ker}\phi$ つまり $\theta^{-1}\theta(\text{Ker}\phi) \supset \text{Ker}\phi$ よって、上記の作り方によって作られる被覆空間でその基本群が $\text{Ker}\phi$ となるものはない。

定義 3 L を S^3 内の絡み目とし、 $G(L) = \pi_1(S^3 - L)$ とおく。 $X = S^3 - \text{Int}U(L)$

とおく。 X の2つの n 重被覆空間 $p_n: \tilde{X} \rightarrow X$, $p'_n: \tilde{X}' \rightarrow X$ が同値とは、同相写像 $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ が存在して $p_n = h \circ p'_n$ となることである。

定義 4 \mathcal{A} を有限群とし、 $\mu_1, \mu_2: G(L) \rightarrow \mathcal{A}$ を2つの表現とする。 μ_1, μ_2 が同値とは、 $\mu_2 = \sigma \circ \mu_1$ となる \mathcal{A} の内部自己同型 σ がある時を言う。

次の命題が被覆空間の一般論から知られている。

命題 2 $\{S^3 - \text{Int}U(L)$ の n 重被覆空間の全体 $\}/\sim_1$ と $\{G(L)$ の指数 n の部分群達 $\}/\sim_2$ との間に全単射対応がある。ここで、 \sim_1 は上で定義した被覆空間の同値関係であり、 \sim_2 は H_1, H_2 が $G(L)$ の指数 n の部分群で互いに共役ならば、 $H_1 \sim_2 H_2$ とする。

定義 5 被覆空間 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が \mathcal{A} -被覆空間とは、 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が正則被覆空間で $\text{Cov}(\tilde{X}) \cong \mathcal{A}$ となっているものを言う。

推移的な表現 $\mu: \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{A}$ があるとき、 G の部分群 G_0 と $G = \pi_1(X)$ の中で共役な部分群は同値な被覆空間をあたえる。従って、命題2を使うと全単射

$\{\mathcal{A}\text{-被覆空間 } \tilde{X}(L) \text{ の同値類} \} \longleftrightarrow \{ \text{推移的な表現 } \mu: \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{A} \} / \text{Inn}(\mathcal{A})$ がある。

特に、 L が ∂ -link のとき、splitting map (分解写像) $\theta: X = S^3 - \text{Int}U(L) \rightarrow B_m$ があり、 $\theta_\#: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B_m, v) \cong F(m) = \langle y_1, \dots, y_m \mid - \rangle$ である。

$[C-S]$ によって2つの分解写像 $\theta_{1\#}, \theta_{2\#}$ は y_i を y_i の共役に移す ($i = 1, \dots, m$) $\Phi \in \text{Aut}(F(m))$ の差だけ異なる。そして、 ∂ -link $L = \bigcup_{i=1}^m K_i$ の disjoint Seifert surfaces $\{F_i\}$ は分解写像 $\theta: X \rightarrow B_m$ によって決まる。 $[C-S], [Ko]$ 。

L が ∂ -link のとき、 m_i を K_i の meridian ($i = 1, 2, \dots, m$) とし、 $\theta_\#: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B_m) \cong F(m) = \langle y_1, \dots, y_m \mid - \rangle$ を $\theta_\#(m_i) = y_i$ となる分解写像とする。 $\Phi \in \text{Aut}(F(m))$ は $\Phi(y_i) = w_i y_i w_i^{-1}$ (y_i の共役) となるものとし、 $\mathcal{F}(m) = \{\theta' \in \text{Hom}(\pi_1(X), F(m)) \mid \theta' = \Phi(\theta)\}$ とする。

更に、 $\alpha: D(B_m) \rightarrow \mathcal{A}$ を $\alpha(D(B_m))$ が \mathcal{A} を生成しているような voltage とし、 $\hat{\alpha}: \pi_1(B_m) \cong F(m) \rightarrow \mathcal{A}$ を α から導かれる準同型とし、 $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ は $\sigma(a_i) = v_i a_i v_i^{-1}$ (a_i の共役) ($i = 1, 2, \dots, |A|$) となるものとする。

$V_\alpha(\mathcal{A}) = \{\hat{\alpha}' \in \text{Hom}(F(m), \mathcal{A}) \mid \hat{\alpha}' = \sigma(\hat{\alpha})\}$ とすると

L が ∂ -link のとき

$\{\text{disjoint } S\text{-surfaces から切り貼りで作る } \mathcal{A}\text{-covering の同値類} \} \longleftrightarrow \mathcal{F}(m) / \text{Inn}(F(m)) \longleftrightarrow \bigcup_\alpha V_\alpha(\mathcal{A}) / \text{Inn}(\mathcal{A}) = \{\text{voltage assign. } \alpha: D(B_m) \rightarrow \mathcal{A} \mid \alpha(B_m) \text{ が } \mathcal{A} \text{ を生成する} \} / \text{Inn}(\mathcal{A})$ という対応があり、 $\mathcal{F}(m)$ の元 $\theta_\#$ は $\theta_\#: \pi_1(X(L)) \rightarrow \pi_1(B_m) \cong F(m)$ を与えているから、次が言える。

命題 3 $\{disjoint\ S - surfaces\ から\ 切り\ 貼り\ で\ 作る\ A - 被覆空間\ \check{X}(L)\ の\ 同値類\}$ は集合 $\{voltage\ assign.\ \alpha : D(B_m) \rightarrow A | \alpha(B_m)\ が\ A\ を\ 生成\ する\} / Inn(A)$ と全単射対応がつく。

注 4 $\{disjoint\ S - surfaces\ から\ 切り\ 貼り\ で\ 作る\ A - covering\ の\ 同値類\}$ と全単射対応がつくのは $\{voltage\ assign.\ \alpha : D(B_m) \rightarrow A | \alpha(D(B_m))\ が\ A\ を\ 生成\ する\} / Inn(A)$ であって $\{voltage\ assign.\ \alpha : D(B_m) \rightarrow A | \alpha(D(B_m))\ が\ A\ を\ 生成\ する\} / Aut(A)$ ではない。2つの $voltage\ assignment\ \alpha_1, \alpha_2 : D(B_m) \rightarrow A$ に対し $\Psi(\alpha_1) = \alpha_2$ という $\Psi \in Aut(A)$ があっても $B_m^{\alpha_1} \cong B_m^{\alpha_2}$ という例がある。 $B_m^{\alpha_1}$ も $B_m^{\alpha_2}$ も共に B_m の正則被覆空間にはなっているが $B_m^{\alpha_1}$ と $B_m^{\alpha_2}$ は被覆空間として同値ではない。

例 8 $m = 2$ とし、 $A = Z_3 = \{0, 1, 2\}$ とする。

$voltage\ assign.\ \alpha_i : B_2 \rightarrow A_3\ (i = 1, 2)$ を $\alpha_1(e_1) = \alpha_1(e_2) = 1, \alpha_2(e_1) = \alpha_2(e_2) = 2$ とする。 $\Phi \in Aut(Z_3)$ を $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = 2, \Phi(2) = 1$ とする。すると $\Phi \circ \alpha_1 = \alpha_2$ となる。しかし、 $B_2^{\alpha_1}$ と $B_2^{\alpha_2}$ は向きも考慮に入れた同形の意味で同形でない。(従って被覆空間として同値ではない) 因みに $\Phi \in Aut(Z_3) - Inn(Z_3)$ である。

図 7.

注 5 α を1つ決めても θ と θ' が違えば一般に $\alpha\theta \neq \alpha\theta'$ 。しかし、その違いは $\forall a_i \in A$ に対し $\Psi(a_i) = w_i a_i w_i^{-1}$ (共役) という自己同型 $\Psi \in Aut(A)$ の違いのみ。従って次の系を得る。

系。 A がアーベル群なら、表現 $\alpha\theta : \pi_1(X) \rightarrow A$ に対応する被覆空間 $\check{X}(L)$ は θ の取り方によらず α のみによって決まる ($\leftarrow \pi_1(\check{X}(L))$ は $\theta_{\#}$ の取り方によらず $\hat{\alpha}$ のみによってきまる。($Inn(A)$ の範囲内で。))

命題 4 $\alpha\theta' = \alpha'\theta$ となる α' がある。

証明。 [C-S] によって θ と θ' の差は y_i をその共役に移す $\Phi \in Aut(F(m))$ で表現される。即ち、 $F(m) = \langle y_1, \dots, y_m | - \rangle$ に対し

$\exists \Psi \in Aut(F(m))$ such that

(1) $\Phi(y_i) = w_i y_i w_i^{-1}\ (i = 1, 2, \dots, m)$

(2) $\Phi(\theta) = \theta'$

従って $\alpha\theta' = \alpha\Phi(\theta)$. そこで、 $\alpha' = \alpha\Phi$ とおくと $\alpha \circ \theta' = \alpha \circ \Phi(\theta) = \alpha' \circ \theta$. 故に上のような α' がある。 □

そこで、 θ を1つ止めて $\{\alpha\}$ を全て考えれば disjoint Seifert surfaces を切り貼りして作られる被覆空間の全ての基本群をリストすることが出来る。

よって、 $\{\alpha \circ \theta$ から導かれる $\pi_1(X(L))$ の部分群のリスト} は L の不変量である。(disjoint Seifert surfaces を切り貼りして出来る被覆空間の基本群の全てという意味で。) (n -重被覆空間を考えるなら $\pi_1(X(L))$ の指数 n の正規部分群のリストと言っても良い。)

被覆空間の1次元ホモロジー群 (または、 A -加群構造を持ったホモロジー加群) のリストも同様の意味で不変量である。しかし、具体的に disjoint Seifert surfaces が与えられたとき、実際 θ をどのように決めるのが標準的なのか不明。Wirtinger generator のうち 絡み目の各成分に対応するものの1つを meridian に指定することは出来るが、それが標準的なものか否かは不明。

命題 5 A の内部自己同型群 $Inn(A) \cong A/Z(A)$ 。ここで $Z(A) = \{a \in A | ab = ba \text{ for } \forall b \in A\}$ は A の中心部分群。従って A がアーベル群なら、 $A/Z(A) = \{0\}$ である。

証明。 $g \in A$ に対し $\sigma_g \in Inn(A)$ を対応させる。ここで、全ての $a \in A$ に対し $\sigma_g(a) = gag^{-1}$ である。この対応 $\Psi : A \rightarrow Inn(A)$ $\Psi(g) = \sigma_g$ は明らかに全射である。次に $g \in Z(A)$ なら $\sigma_g(a) = gag^{-1} = a$. 故に、 $\sigma_g = id$. 故に $Z(A) \subset Ker\Psi$. また、 $g \in Ker\Psi$ なら $\forall a \in A$ に対し $\sigma_g(a) = gag^{-1} = a$. 故に $ga = ag$. よって、 $g \in Z(A)$. 故に、 $Ker\Psi = Z(A)$ よって、 $Inn(A) \cong A/Ker\Psi = A/Z(A)$ □

命題 6 $A = D_n$ (位数 $2n$ の2面体群) のとき、

D_2 はアーベル群

$n \geq 3$ のとき、 $D_n = \langle a, b | a^2 = b^n = 1, (ab)^2 = 1 \rangle$ という表示を使って

$$Z(D_n) = \begin{cases} \langle b^m | b^{2m} = 1 \rangle & \text{if } n = 2m \\ \{1\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明。 D_2 がアーベル群である事は明らか。

D_n の任意の元は ab^i 又は b^j と書ける。そして、 $n = 2m$ のとき、元 b^m は $b^m ab^i = ab^{-m} b^i = ab^i b^{-m} = ab^i b^m$ また、 $b^m b^j = b^j b^m$. ゆえに $b^m \in Z(D_n)$.

逆に、 $g \in Z(D_n)$ とすると $g = b^u$ 又は $g = ab^v$ とかける。 $g = b^u$ のとき、 $b^u ab^i = ab^{i-u} = ab^{i+u}$ 故に、 $2u = 0 \pmod n$. よって、 $u = n/2$ のときのみ $g = b^u \in Z(D_n)$

$g = ab^v$ のとき、 $ab^v \cdot b^j = b^{-v-j}a$ 一方、 $ab^v \cdot b^j = b^j ab^v = b^{-v+j}a$. ゆえに、
 $-v-j \equiv -v+j \pmod n$ 故に $2j \equiv 0 \pmod n$. 従つて、 $ab^v \notin Z(A)$
 以上より、

$$Z(D_n) = \begin{cases} \langle b^m | (b^m)^2 = 1 \rangle & \text{if } n = 2m \\ \{1\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

□

系。

$$|Inn(D_n)| = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ n & n = 2m, m \geq 2 \\ 2n & n = \text{奇数} \end{cases}$$

証明。 $|D_n| = 2n$ と上の命題より。

□

命題 7 $\varphi(n)$ を Euler's phi 関数とすると

$$\begin{cases} \varphi(2) = 1 \\ \varphi(n) = \text{even} & n \geq 3 \end{cases}$$

証明。 $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ と素因数分解すると $\varphi(n) = \varphi(p_1^{s_1}) \cdots \varphi(p_k^{s_k})$
 そこで、 $\varphi(p^s) = p^{s-1}(p-1)$ を調べれば良い。

$$\varphi(p^s) = \begin{cases} 1 & \text{if } p = 2, s = 1 \\ \text{even} & \text{if } p = 2, s \geq 2 \\ \text{even} & \text{if } p \geq 3 (\implies p \text{ は奇数}) \end{cases}$$

□

\mathbf{Z}_n - 被覆空間の数え上げ ($\mathcal{A} = \mathbf{Z}_n$ のとき)

$L = \bigcup_{i=1}^m K_i$ を ∂ -link とし $X = S^3 - \text{Int}U(L)$ とする。

$|\{p|p : \tilde{X} \rightarrow X \text{ は } \mathbf{Z}_n \text{ 被覆空間}\} / \sim| = |\{\psi : D(B_m) \rightarrow \mathbf{Z}_n : \text{voltage assignment で } B \times_{\psi} \mathbf{Z}_n \text{ が連結}\} / Inn(\mathbf{Z}_n)| = |\{\psi : D(B_m) \rightarrow \mathbf{Z}_n : \text{voltage assignment で } \psi(D(B_m)) \text{ が } \mathbf{Z}_n \text{ を生成する}\} / Inn(\mathbf{Z}_n)| := \Phi(B_m, \mathbf{Z}_n)$ とおく。

\mathbf{Z}_n はアーベル群なので $Inn(\mathbf{Z}_n) = \{1\}$ である。 voltage assignment $\psi : D(B_m) \rightarrow \mathbf{Z}_n$ の総数は、 n^m 個である。この内 $B_m \times_{\psi} \mathbf{Z}_n$ が連結にならないものを除く。

補助定理 1 $\{\psi_k | \psi_k(e_i) = t^k\}$ とし、 $g.c.d.(k_i, n) = l_i$ としたとき $g.c.d.(l_1, \dots, l_m) = 1$ となる ψ_k に対し $\psi(D(B_m))$ は \mathbf{Z}_n を生成する。ただし、 $\mathbf{Z}_n = \{1, t, \dots, t^{n-1}\}$ とする。

証明。 $g.c.d.(l_1, \dots, l_m) = 1$ だから、 $\sum \alpha_i l_i = 1$ となる $\alpha_i \in \mathbf{Z}_n$ ($i = 1, \dots, m$) がある。
 また、 $g.c.d.(k_i, n) = l_i$ だから、 $\beta_i n + \gamma_i k_i = l_i$ となる $\beta_i, \gamma_i \in \mathbf{Z}_n$ ($i = 1, \dots, m$) がある。
 そこで、 $0 \leq p \leq n-1$ となる任意の p に対し $t^p = t^{p(\sum \alpha_i l_i)} = t^{p(\sum \alpha_i (\beta_i n + \gamma_i k_i))} = t^{p(\sum \alpha_i \gamma_i k_i)} = (t^{k_1})^{p\alpha_1 \gamma_1} (t^{k_2})^{p\alpha_2 \gamma_2} \dots (t^{k_m})^{p\alpha_m \gamma_m} = \prod_{i=1}^m \psi_k(e_i)^{p\alpha_i \gamma_i}$ □

$S := \{\psi_k | \psi_k(e_i) = t^{k_i} \text{ とし、 } g.c.d.(k_i, n) = l_i \text{ としたとき } g.c.d.(l_1, \dots, l_m) \neq 1\}$ とおく。

定理 4 $\Phi(B_m, \mathbf{Z}_n) = n^m - |S|$

証明。 補助定理 1 から明らか。

例 9 $n = p^s$ (p は 2 以上の素数) のとき。

$g.c.d.(k_i, p^s) = l_i \neq 1$ となる k_i の個数は p^{s-1} 。 それらは全て p の倍数である。
 よって、 $g.c.d.(l_1, \dots, l_m) = p$ の倍数 または、 0。 従って、 $|S| = p^{(s-1)m}$ 。 故に、
 $\Phi(B_m, \mathbf{Z}_{p^s}) = p^{sm} - p^{(s-1)m} = p^{(s-1)m}(p^m - 1)$

(1) $\Phi(B_2, \mathbf{Z}_2) = 3$ すなわち、 $m = 2, p = 2, s = 1$ のとき。

$$\psi_1(e_1) = 1, \psi_1(e_2) = 0 \qquad \psi_2(e_1) = 0, \psi_2(e_2) = 1$$

図 8.

$$\psi_3(e_1) = 1, \psi_3(e_2) = 1$$

図 9.

(2) $\Phi(B_2, \mathbf{Z}_3) = 8$

$$\psi_1(e_1) = 1, \psi_1(e_2) = 0 \qquad \psi_2(e_1) = 0, \psi_2(e_2) = 1$$

図 10.

$$\psi_3(e_1) = 2, \psi_3(e_2) = 0$$

$$\psi_4(e_1) = 0, \psi_4(e_2) = 2$$

図 11.

$$\psi_5(e_1) = 1, \psi_5(e_2) = 1$$

$$\psi_6(e_1) = 2, \psi_6(e_2) = 1$$

図 12.

$$\psi_7(e_1) = 1, \psi_7(e_2) = 2$$

$$\psi_8(e_1) = 2, \psi_8(e_2) = 2$$

図 13.

ψ_5 と ψ_8 が巡回被覆空間である。

D_n - 被覆空間の数え上げ

$|\Phi(B_m; D_n)| = |\{\phi | \phi : \rightarrow D_n : B_m \times_{\phi} D_n \text{ が連結であるような voltage assingment}\} / \sim$
 | とする。ここで、 \sim は2つの voltage assingment ϕ_1, ϕ_2 において $\forall e_i \in E(B_m)$ に
 対し $\psi\phi_1(e_i) = \psi\phi_2(e_i)$ となる $\psi \in Inn(D_n)$ があるとき、 $\phi_1 \sim \phi_2$ とする。
 D_n の表示には少なくとも次の2つがある。

$$D_n = \langle a, b | a^2 = b^n = 1, (ab)^2 = 1 \rangle \dots\dots(1)$$

$$= \langle c, d | c^2 = d^2 = 1, (cd)^n = 1 \rangle \dots\dots(2) \text{ (} a = c, b = cd \text{ とおけば良い。)}$$

例 10 $n = 5$ のときの Cayley グラフ

(1) の表示による Cayley グラフを D_5^1 とする。

(2) の表示による Cayley グラフを D_5^2 とする。

図 14.

D_5^1 と D_5^2 はグラフとしては同形ではない。 D_5^1 は 5 サイクルを持つが D_5^2 は 5 サイクルを持たない。

$|D_n| = 2n$ である。以下 D_n の表示として (1) の表示を使う。すると、 $\forall g \in D_n$ は $g = b^i$ または、 ab^i ($0 \leq i \leq n-1$) という形をしている。

$$Aut(D_n) = \{\sigma_j^i(a) = ab^i, \sigma_j^i(b) = b^j, 0 \leq i, j \leq n-1, g.c.d(n, j) = 1\}$$

$$\text{従って、} |Aut(D_n)| = n\varphi(n) = np_1^{m_1-1}(p_1-1)p_2^{m_2-1}(p_2-1)\cdots p_l^{m_l-1}(p_l-1)$$

ここで、 $\varphi(n)$ は Euler の phi 関数。また、 $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$ は n の素因数分解
また、命題 6 の系から

$$|Inn(D_n)| = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ n & n = 2m, m \geq 2 \\ 2n & n = \text{奇数} \end{cases}$$

$$|\{\phi | \phi : D(B_m) \longrightarrow D_n : \text{vol. assign}\}| = (2n)^m : \text{voltage assignment の総数。}$$

この、voltage assignment の総数から $B_m \times_{\phi} D_n$ が連結にならないものを除く。

例 11 $\Phi(B_2, D_n)$ においては、voltage assignment は、

$$(1) \begin{cases} \phi(e_1) = b^k \\ \phi(e_2) = b^l \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \phi(e_1) = ab^k \\ \phi(e_2) = b^l \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \phi(e_1) = b^k \\ \phi(e_2) = ab^l \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \phi(e_1) = ab^k \\ \phi(e_2) = ab^l \end{cases}$$

($0 \leq k, l \leq n-1$) の 4 タイプがある。

D_n の(1)の表示において成り立つ等式

$$(ab)^2 = a^2 = 1 \text{ より、 } b = a^{-1}b^{-1}a^{-1} = ab^{-1}a = ab^{n-1}a$$

$$b^2 = ab^{n-1}a \cdot ab^{n-1}a = ab^{n-2}a$$

$$\text{以下同様にして } b^s = ab^{n-s}a = ab^{-s}a$$

(1) のタイプの場合

$\phi(e_1)\phi(e_2) = b^{k+l} = \phi(e_2)\phi(e_1)$. 従つて一般に $\phi(e_1)^p\phi(e_2)^q = b^{pk+ql}$ となつて ab^s という形の元は出てこない。故に、(1)の場合 $\{\phi(e_1), \phi(e_2)\}$ は D_n を生成しない ($\leftarrow B_m \times_\phi D_n$ が連結でない)

(2) のタイプの場合

$$g.c.d.(n, l) = 1 \text{ だから、 } \exists \alpha, \beta; \alpha n + \beta l = 1$$

$$\text{そこで、 } 0 \leq \forall t \leq n-1 \text{ に対し } b^t = b^{t(\alpha n + \beta l)} = (b^l)^{t\beta} = (\phi(e_2))^{t\beta} \dots (a)$$

$$ab^t = ab^{k+t-k} = \phi(e_1)b^{(t-k)(\alpha n + \beta l)} = \phi(e_1)(b^l)^{\beta(t-k)} = \phi(e_1)(\phi(e_2))^{\beta(t-k)} \dots (b)$$

よつて、(a),(b)より $\{\phi(e_1), \phi(e_2)\}$ は D_n を生成する。

その個数は $n\varphi(n)$ である。

(3) のタイプは (2) のタイプの場合と同じ

(4) のタイプの場合

$$k \geq l \text{ として、 } g.c.d.(n, k-l) = 1 \text{ だから } \exists \alpha, \beta \in \mathbf{Z}; \alpha n + \beta(k-l) = 1$$

そこで、 $0 \leq \forall t \leq n-1$ に対し、

$$b^t = b^{t(\alpha n + \beta(k-l))} = (b^{k-l})^{t\beta} = (\phi(e_2)\phi(e_1))^{t\beta} \dots (c)$$

$$ab^t = ab^{k+t-k} = \phi(e_1)(\phi(e_2)\phi(e_1))^{(t-k)\beta} \dots (d)$$

(c),(d)より $\{\phi(e_1), \phi(e_2)\}$ は D_n を生成する。その個数は $n\varphi(n)$ である。

以上より、命題6の系を使うと

$$\Phi(B_2, D_n) = (n\varphi(n) + n\varphi(n) + n\varphi(n))/|Inn(D_n)|$$

$$= 3n \cdot \varphi(n)/|Inn(D_n)| =$$

$$\begin{cases} 6 & n = 2 \\ 3\varphi(n) & n = 2m, m \geq 2 \\ (3/2)\varphi(n) & n = 2m + 1 \text{ (命題7参照)} \end{cases}$$

□

参考文献

- [1] S.Hong, J.Kwak and J.Lee : Regular graph coverings whose covering transformation groups have the isomorphism extension property, Discrete Math. 148 (1996) 85-105

- [2] J.Kwak, J.Lee and M.Sohn : Isomorphic periodic links as coverings, J. Knot Theory and its Ramif. 8 (2) (1999) 215-240
- [3] J.Cha and K.Ko : Signature invariants of links from irregular covers and non-abelian covers, preprint
- [4] K.Ko : Seifert matrices and boundary link cobordisms, Trans. A.M.S. 299 (2) (1987) 657-681
- [5] J.Gross and Tucker : Topological graph theory, John Wiley and Sons, (1987)
- [6] S.Kinoshita : Branched coverings of knots and links, Lecture Note at Kwansai Gakuin Univ. (1983)

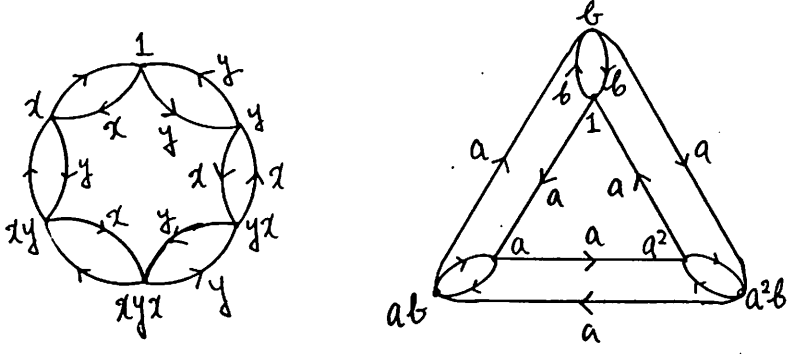


图 1

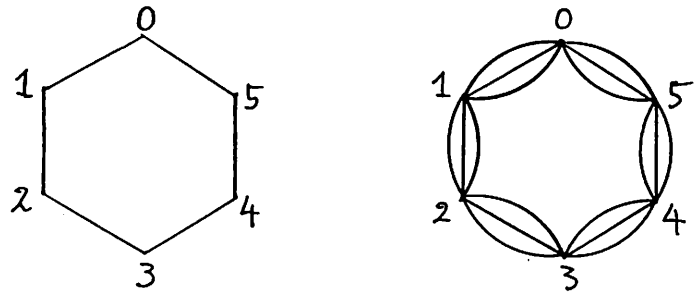


图 2

[24]

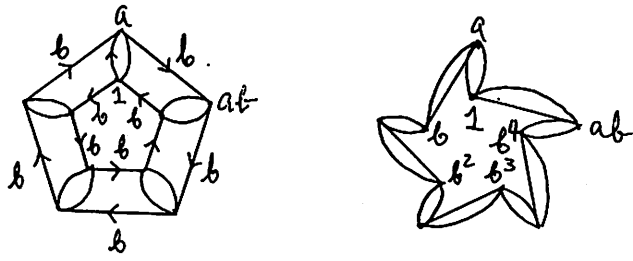


图 3

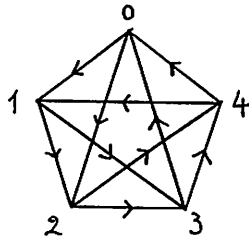


图 4.

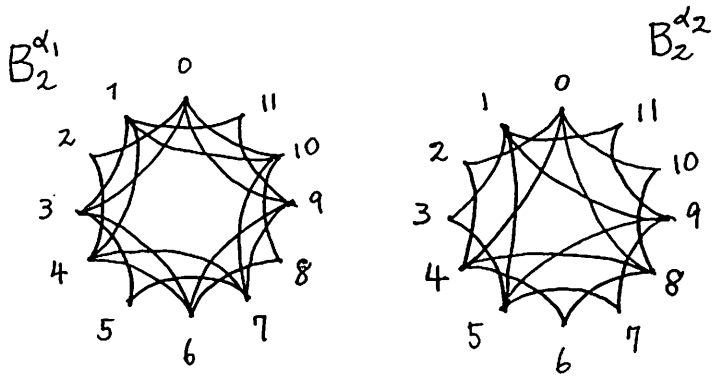


图 5

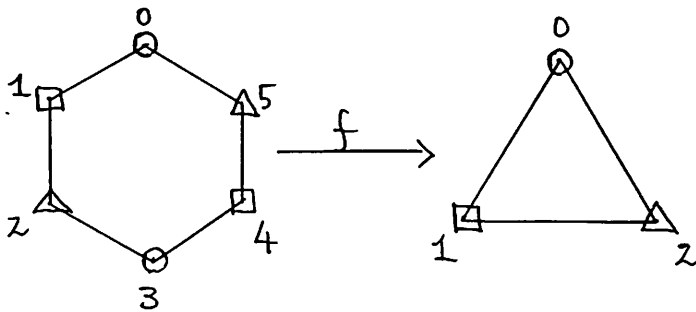


图 6

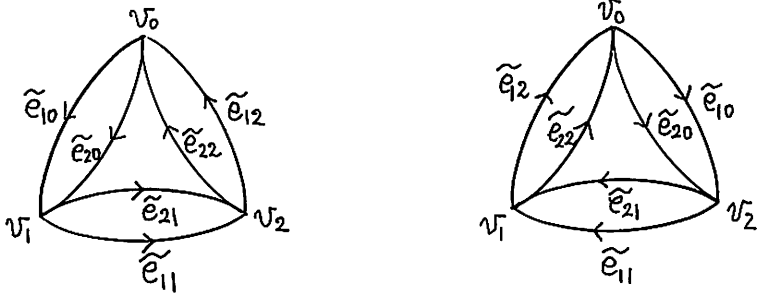


图 7

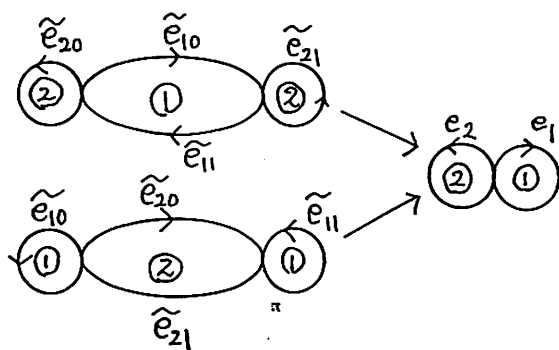


图 8

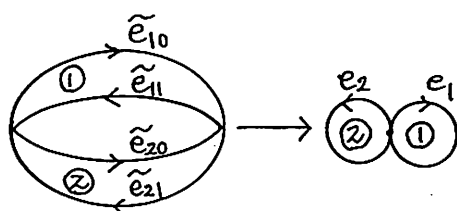


图 9

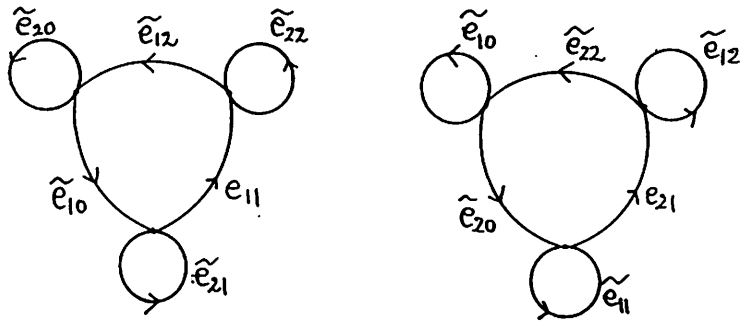


图 10

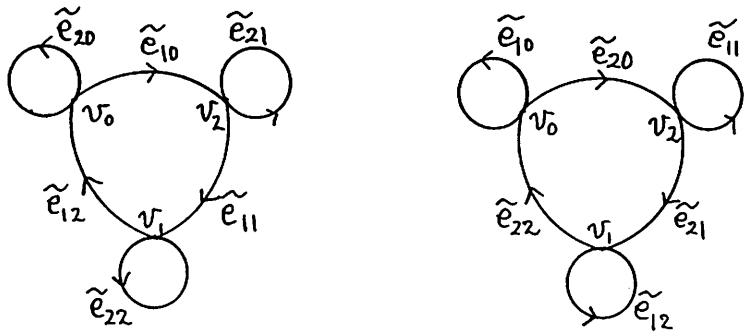


图 11

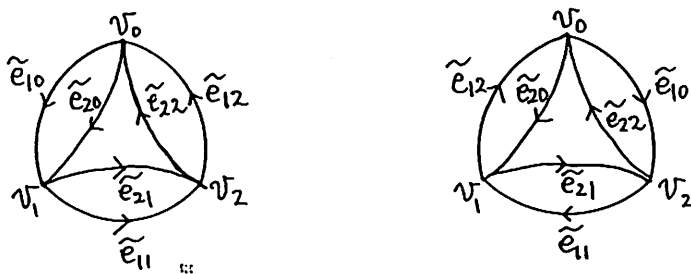


图 12

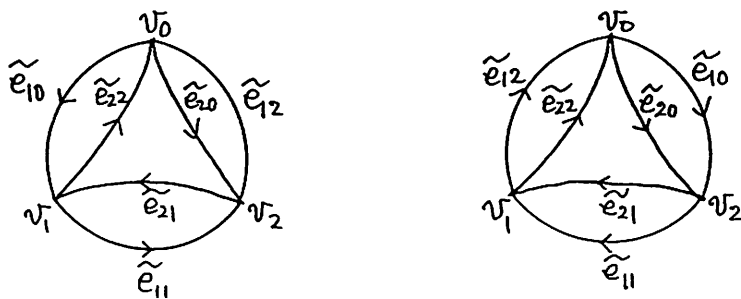


图 13

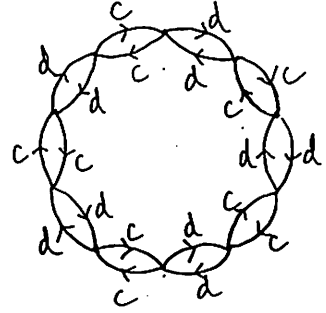
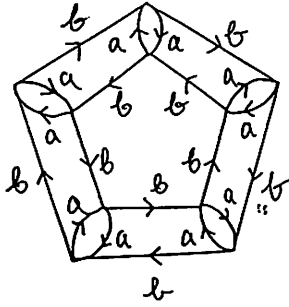


图 14