

# On links from the "splittness" view point

Kazuaki Kobayashi

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences  
Tokyo Woman's Christian University

October 1998

## 1 Introduction

この論文では、先ずさまざまな"分離性"を基準にして絡み目を眺めてみる。様々な"分離性"による絡み目には、 $h$ -split link, boundary link ( $\partial$ -link), homology boundary link, algebraically split link, homotopically trivial ( $h$ -trivial) link in the strong sense,  $h$ -trivial link, slice link in the strong sense 等がある。§3 で、それらの間の現在迄にわかっている諸結果及び例を挙げる。§4 では特に  $h$ -trivial link in the strong sense を中心に  $\partial$ -link, homology  $\partial$ -link 及び  $h$ -trivial link との関係を調べる。 $h$ -trivial link との間を明確にする higher order linking についても述べる。§5 では  $h$ -split link が持っている性質を述べる。この節の内容は未だ不完全で更に様々な性質を調べたり計算可能な不変量を作る必要がある。

## 2 Definitions

この節では Introduction で挙げ、今後使っていく、さまざまな絡み目の定義をすることにする。また、現在迄研究され、解明されている諸結果を述べる。

定義 1  $L = (K_1, K_2, \dots, K_n)$  を 3次元球面内の  $n$ -成分の絡み目とする。 $L^i = L - K_i$  とする。

- (0) 絡み目  $L$  が *geometrically split link* とは、任意の  $i$  に対して、 $K_i$  のみを含む 3次元球  $B^3$  が  $S^3$  に存在することである。
- (1) 絡み目  $L$  が *homotopically split link* ( $h$ -split link) とは、任意の  $i$  に対して、特異点 (自分自身が交わる点) を持つ円板  $\phi_i(D^2)$  で  $\phi_i(\partial D^2) = K_i$  且つ  $\phi_i(D^2) \cap \phi_j(D^2) = \phi$  となるものが存在するときをいう。

(26)

- (2) 絡み目  $L$  が *homotopically trivial link in the strong sense* (*h-trivial in the strong sense*) とは、任意の  $i$  番目の成分  $K_i$  が  $S^3 - L^i$  で可縮となることである。即ち、 $\pi_1(S^3 - L^i)$  で  $[K_i] = 1$ 。
- (3) 絡み目  $L$  が *homotopically trivial link* (*h-trivial link*) とは、 $L$  が同じ成分上での交差点の上下の入れ替えを有限回行って、自明な絡み目になることである。
- (4) 絡み目  $L$  が *boundary link* ( $\partial$ -link) とは、任意の  $i$  に対して  $\partial F_i = K_i$  となる、互いに交わらない (i.e.  $F_i \cap F_j = \phi$ )、向き付け可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が存在することである。
- (5) 絡み目  $L$  が *homology boundary link* ( $\partial$ -link) とは、次のような性質を持つ向き付け可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が  $S^3 - \bigcup \text{Int} V_i$  内に存在することである。ここで  $V_i$  は  $K_i$  の正則近傍とする。
- 1)  $F_i \cap F_j = \phi$
  - 2)  $F_i \cap V_j = \partial F_i \cap \partial V_j$  は有限個の単純閉曲線  $\lambda_{ij1}, \lambda_{ij2}, \dots, \lambda_{ijm}$  からなり、それらは  $V_j$  の中で  $K_j$  と *parallel* になっている。
  - 3)  $\partial F_i = \bigcup_{j,k} \lambda_{ijk}$
  - 4)  $\sum_k \lambda_{ijk} \sim 0$  in  $V_j$  if  $j \neq i$  (ホモロジー)
  - 5)  $\sum_k \lambda_{iik} \sim l_i$  in  $V_i$
- (6) 絡み目  $L$  が *algebraically split link* とは、任意の  $i, j$  ( $i \neq j$ ) に対し  $lk(K_i, K_j) = 0$  が成り立つことである。
- (7) 絡み目  $L$  が *strongly slice link* とは、任意の  $K_i$  に対して  $\mathbf{R}_+^4$  内で互いに交わらない *non-singular locally flat 2-balls*  $D_i^2$  が張れることである。
- (8) 絡み目  $L$  が *Brunnian link* とは、 $L$  の任意の真部分絡み目が自明な絡み目となることである。

命題 1 上で定義した様々な絡み目に対し、定義より次の強弱がすぐにわかる。

(a)  $(0) \implies (1) \implies (2) \implies (3) \implies (6)$  (ホモトピー系列)

(b)  $(0) \implies (1) \implies (4) \implies (5) \implies (6)$  (ホモロジー系列)

ここで  $(1) \implies (4)$  は 図-0 のように特異点をもつ円板  $\phi_i(D^2)$  を向きづけ可能な曲面  $F_i$  に変えることが出来るからである。

図-0

定義 2 上の命題のようにいくつかの絡み目の間で  $(m) \implies (n)$  が成り立っているとき  $(m)$  の絡み目は  $(n)$  の絡み目より分離性が強いということにする。

今までに知られている諸結果

(3) の絡み目であるか、否かの判定については Milnor の結果 ([M1]) があり、 $\mu$ -不変量がここで定義されていて  $h$ -trivial link で  $\mu$ -不変量が 0 である。従って (3) より分離性が強い絡み目では、この  $\mu$ -不変量は役に立たない。Milnor は ([M2]) で  $\bar{\mu}$ -不変量を定義し、絡み目をアイトピーで分類しているが Stallings ([ST]) が  $\bar{\mu}$ -不変量は  $1$ -同値で不変量であることを示している。従って  $\bar{\mu}$ -不変量はコボルディズム不変量であることがわかる。また (5) の絡み目で  $\bar{\mu}$ -不変量が消える事が Smythe ([S1]) により示されている。従って (5) より分離性の強い絡み目では役に立たない。Milnor の  $\bar{\mu}$ -不変量にはいくつかの幾何的解釈があり、特異円板を使って解釈するのが Hain ([Ha]) であり、各成分に張った Seifert 曲面を使って解釈しているのが ([C2]) である。また、[C1],[O1],[O2],[O3] において  $\bar{\mu}$ -不変量が消える限界を研究している。また、そこでは  $\bar{\mu}$ -不変量が消えたとき役目を発揮する新しい不変量も導入されている。(5) であるが (4) でない絡み目の Smythe による例を第 3 節例 5 に挙げてあるが、ここの部分を組織的に研究したのが ([C-O]) である。また (2) と (3) の差を示す不変量を Kobayashi が ([K2]) で定義した。これは第 4 節で詳しく述べる。 $\partial$ -link, homology  $\partial$ -link については、次の事がわかっている。

**命題 2**  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $S^3$  内の  $m$  成分絡み目とし、 $G(L) = \pi_1(S^3 - L)$  とする。 $G_q$  を  $G(L)$  の  $q$ -th lower central subgroup とし、 $F(m)$  を階数  $m$  の自由群、 $F_q$  を  $F(m)$  の  $q$ -th lower central subgroup とすると、次が成り立つ。

- (1) ([C1])  $L$  の longitude  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) が  $G_q$  に含まれる。  $\iff G(L)/G_{q+1} \cong F(m)/F_{q+1}$
- (2) ([S1])  $L$  が homology  $\partial$ -link  $\implies l_i \in G_\omega = \bigcap_{q \geq 1} G_q$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )
- (3) ([S1])  $L$  が  $\partial$ -link  $\implies l_i \in G''$  (2nd commutator subgroup of  $G(L)$ )
- (4) ([S1])  $L$  の初等イデアル  $\mathcal{E}_i$  について、  
 $L$  が homology  $\partial$ -link  $\implies \mathcal{E}_0(t_1, \dots, t_m) = \dots = \mathcal{E}_{m-1}(t_1, \dots, t_m) = 0$  であり、  
 $\mathcal{E}_m(t, \dots, t)$  が主イデアルで、結び目多項式で生成されている。

また、命題 1 のホモトピー系列とホモロジー系列の間の研究としては ([D]) があり、 $\partial$ -link ならば homotopically trivial であることが示されている。更に ([K2]) で Brunnian link の場合、homology  $\partial$ -link ならば  $h$ -trivial in the strong sense であることが示されている。

絡み目  $L$  が strongly slice link なら、その多変数 Alexander 多項式  $\Delta_L(t_1, \dots, t_m)$  が、ある多項式  $f(t_1, \dots, t_m)$  を取って  $\Delta_L(t_1, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, t_m)f(t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1})$  と書けることが中川 ([N2]) により示されている。

### 3 Propositions and Examples

この節では、命題 1 の矢印の逆が成り立たない例をなるべく簡単な理論を使って述べる。

例 1  $h$ -trivial ではあるが、 $h$ -trivial in the strong sense ではない例。  
 図-1 (a) では 1 つの成分が非自明な結び目であるが、図-1 (b) の例は全ての成分が自明な結び目である。ただし *Brunnian link* ではない。

図-1

図-1 (a) において、明らかに、 $S^3 - K_2$  で  $K_1$  は可縮である。しかし  $K_2$  は  $S^3 - K_1$  で可縮ではない。

何故なら、 $\pi_1(S^3 - K_1) \cong \langle x, y, z | xz^{-1}y^{-1}z, zy^{-1}x^{-1}y \rangle \cong \langle x, y | xyx = yxy \rangle$

そして、 $[K_2] = zy^{-1} = y^{-1}xy \cdot y^{-1} = y^{-1}x \neq id$ .

図-1 (b) において  $K_3$  は  $S^3 - (K_1, K_2)$  で可縮であるが、 $K_1$  (又は、 $K_2$ ) は  $S^3 - (K_2, K_3)$  (又は  $S^3 - (K_1, K_3)$ ) で可縮でない。何故なら  $K_1 \approx K_2$  だから、 $K_1$  は  $K_2$  の longitude とみなせる。そこで、もし  $K_1$  が  $S^3 - (K_2, K_3)$  で可縮なら、 $K_1$  は  $S^3 - IntN(K_2, K_3)$  で可縮。そして、 $K_1 \subset \partial N(K_2)$  として良い。従って Dehn's Lemma により  $K_1$  に  $S^3 - IntN(K_2, K_3)$  で非特異な円板が張れる。これは、 $L^1 = (K_2, K_3)$  が自明な絡み目ということになり、矛盾。ゆえに、 $K_1$  は  $S^3 - (K_2, K_3)$  で可縮でない。従って、 $L = (K_1, K_2, K_3)$  は  $h$ -trivial in the strong sense ではない。

命題 3 2成分絡み目  $L = (K_1, K_2)$  が *Brunnian link* のとき、*algebraically split* であることと  $h$ -trivial in the strong sense とは同値である。

証明。  $h$ -trivial in the strong sense ならば *algebraically split* は明らかである。

そこで  $L$  が *algebraically split* であるとする。従って、 $\langle K_1 \rangle = 0 \in H_1(S^3 - K_2) \cong \mathbf{Z} \cong \pi_1(S^3 - K_2)$  故に、 $[K_1] = 1 \in \pi_1(S^3 - K_2)$ 。同様に、 $[K_2] = 1 \in \pi_1(S^3 - K_1)$  故に、絡み目  $L = (K_1, K_2)$  は  $h$ -trivial in the strong sense である。

命題 4  $m$ 成分絡み目  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が  $\partial$ -link で、 $K_1$  が自明な結び目であるとする。  $p_k : (M_k(K_1), \tilde{K}_1) \rightarrow (S^3, K_1)$  を  $K_1$  で分岐する  $k$ 重巡回分岐被覆空間とする (従って、 $M_k(K_1) \cong S^3$ )。すると、 $p_k^{-1}(L)$  は  $k(m-1) + 1$  個の成分から成る  $\partial$ -link である。

証明。  $L$  は  $\partial$ -link だから、互いに交わらない向きづけ可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) が存在して  $\partial F_i = K_i$  である。そこで  $F_1$  で  $S^3$  を切り開いた 3 次元多様体を  $M^3$  とすると、 $\partial M^3 = F_+ \cup F_-$ ,  $F_+ \cong F_- \cong F_1$ ,  $\partial F_+ = \partial F_-$  である。  $M^3$  のコピーを  $k$  個作り  $M_j^k$  ( $j = 1, \dots, k$ ) とする。  $\partial M_j^k = \partial F_+^j \cup \partial F_-^j$ .  $\partial M_j^k$  と  $\partial M_{j+1}^k$  を  $\partial F_+^j$  と  $\partial F_-^{j+1}$  で順に貼りあわせて  $M_k(K_1)$  を作る。従って  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) は  $p_k^{-1}$  によって  $M_k(K_1)$  に持ち上げられ、  $\tilde{F}_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$ ) は  $\tilde{F}_{ij} \cap \tilde{F}_{st} = \phi$ ,  $\partial \tilde{F}_{ij} = \tilde{K}_{ij}$  なので  $p_k^{-1}(K_1, K_2, \dots, K_m)$  は  $\partial$ -link である。ただし、  $p_k^{-1}(K_i), p_k^{-1}(F_i)$  ( $i = 2, 3, \dots, m$ ) は各々  $k$  個の成分を持つが  $p_k^{-1}(K_1), p_k^{-1}(F_1)$  は各々 1 個の成分を持つ。  $\square$

例 2 *Borromean* 環  $L_B$  (図 2) .  $L_B$  は *Brunnian, algebraically split link* であるが  $K_1$  で分岐する 2 重分岐被覆空間  $M_2(K_1)$  (図 2) を考えることにより命題 4 より  $\partial$ -link でない。又以下のように *h-trivial in the strong sense* でもない。(実は *Milnor  $\mu$ -invariant*  $\mu(1, 23) = 1$  だから *h-trivial link* でもないことがわかっている ( $[M1]$ )). )

図-2

図-3

$\pi_1(S^3 - (K_2, K_3)) = \langle u, v, x, y | uy^{-1}x^{-1}y, uyu^{-1}v^{-1}, vuy^{-1}u^{-1} \rangle = \langle x, y | \text{---} \rangle \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ . (図 3)

$[K_1] = z = ux^{-1} = y^{-1}xyx^{-1} \neq 1$  in  $\pi_1(S^3 - (K_2, K_3))$

$[K_2] \neq 1$  in  $\pi_1(S^3 - (K_1, K_3))$

$[K_3] \neq 1$  in  $\pi_1(S^3 - (K_1, K_2))$  も同様である。

例 3 *Whitehead link*  $W$  (図 4) は *Brunnian, h-trivial in the strong sense* であるが  $K_1$  で分岐する 2 重分岐被覆空間  $M_2(K_1)$  を考えることにより命題 4 より  $\partial$ -link ではない。

図 4.

図 5.

明らかに、  $K_2 \simeq * \text{ in } S^3 - K_1$  である。

また、図 5 より  $K_1 \simeq * \text{ in } S^3 - K_2$  である。または、  $\pi_1(S^3 - K_2) = \langle x, y | yxy^{-1}y^{-1} \rangle = \langle x | \text{---} \rangle \cong \mathbf{Z}$  であって  $[K_1] = yx^{-1} = 1$

例 4 次の例 (図 6) は *Brunnian, h-trivial in the strong sense,  $\partial$ -link* ある。

図 6.

図 7.

図 7 により  $L$  は  $\partial$ -link である。 $S^3 - K_1$  で  $K_2 \simeq *$  である。 $\pi_1(S^3 - K_2) = \langle x, y, u, v | xx^{-1}x^{-1}u, xx^{-1}v^{-1}x, uyy^{-1}y^{-1} \rangle = \langle x | - - \rangle$  であり、 $[K_1] = y^{-1}yx^{-1}x = 1 \in \pi_1(S^3 - K_2)$ . 従って、 $h$ -trivial in the strong sense である。□

例 5 ( $[S1]$ )  $L = (K_1, K_2)$  は *homology  $\partial$ -link* であるが、 $\partial$ -link でない例。

図 8 (a) のように  $K_1 \cap K_2$  に向きづけ可能な曲面  $F_2$  を張る。すると  $\langle \partial F_2 \rangle = \langle K_2 \rangle + \langle K_1 \rangle + \langle -K_1 \rangle = \langle K_2 \rangle$  が成り立つ。次に  $K_1$  に穴のあいた円板を 3 枚張る。それを上から  $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$  とする。 $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$  は  $F_2$  の上に張り、 $\tilde{D}_3$  は  $F_2$  の下に張る。 $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$  には穴が各々 1 つずつあいており、 $\tilde{D}_3$  には穴が 2 つあいている。 $\tilde{D}_1$  の穴の境界を  $c_1$ ,  $\tilde{D}_2$  の穴の境界を  $c_2$ ,  $\tilde{D}_3$  の穴の境界を  $c_3, c_3'$  とする。 $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$  の向きは、それから導かれる  $\partial\tilde{D}_1, \partial\tilde{D}_2$  の向きが  $K_1$  の向きと一致するように定め、 $\tilde{D}_3$  の向きはそれから導かれる  $\partial\tilde{D}_3$  の向きが  $K_1$  の向きと逆になるように定める。 $c_1$  と  $c_3$ 、 $c_2$  と  $c_3'$  をそれぞれ tube でつなぐと向きづけ可能な曲面  $F_1$  が出来て、 $\langle \partial F_1 \rangle = \langle K_1 \rangle + \langle K_1 \rangle + \langle -K_1 \rangle = \langle K_1 \rangle$  である。

従って、 $F_1, F_2$  より  $L$  が *homology  $\partial$ -link* になることがわかった。

次に図 8 (b) から  $\pi_1(S^3 - L)$  の Wirtinger 表示を求める。 $K_1$  の longitude を  $K_1^+$  とし、 $K_1^+$  で生成される正規部分群を  $\ll K_1^+ \gg$  とおく。もし  $K_1 \in G''$  ( $G(L) = \pi_1(S^3 - L)$  の 2nd commutator subgroup) なら、

$$G(L) / \ll K_1^+ \gg \supset G(L) / G'' \supset G(L) / G' \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

ところが、 $G(L)$  の Wirtinger 表示において、 $K_1^+ = 1$  とおくと、

$G(L) / \ll K_1^+ \gg \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$  (自由群) となり、矛盾である。ゆえに、 $K_1 \notin G''$  となり、命題 2 (3) より  $L$  は  $\partial$ -link でない。

図 8.

図 9.

## 4 $h$ -trivial link in the strong sense

この節では  $h$ -trivial link in the strong sense を中心に  $\partial$ -link, *homology  $\partial$ -link* 及び  $h$ -trivial link との関係を述べる。

先ず、次の定理によって *homology  $\partial$ -link* との関係を述べる。

**定理 1** 絡み目  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が *Brunnian* かつ *homology  $\partial$ -link* であるなら *h-trivial in the strong sense* である。

Proof.  $L^i = L - \{K_i\}$  とおく。  $i_* : G(L) \rightarrow G(L^i)$  を包含写像から導かれる準同形写像とし、  $i_{q*} : G(L) \rightarrow G(L^i) \rightarrow G(L^i)/G_q(L^i)$  を  $i_*$  と商写像の合成写像とする。ただし  $L$  は *Brunnian* だから  $G(L^i)$  は階数が  $(m-1)$  の自由群である。すると  $\ker(i_{q*})$  は  $G_q(L)$  を含んでいる。  $L$  は *homology  $\partial$ -link* だから、  $[K_i]$  は  $G(L^i)$  の second lower central subgroup  $G_2(L^i)$  に含まれている。もし、  $G(L^i) (\cong F(m-1))$  で  $[K_i] \neq 1$  なら  $G_\omega(L^i) \cong F_\omega(m-1) := \bigcap_{q \geq 1} F_q(m-1) = \{1\}$  だから  $[K_i]$  は  $G_\omega(L^i)$  に含まれない。従って  $[K_i] \in G_q(L^i)$  かつ  $[K_i] \notin G_{q+1}(L^i)$  となる 2 以上の整数  $q$  がある。  $K_i^+$  を  $K_i$  の longitude とするなら、  $i_*([K_i^+]) = [K_i] \notin G_{q+1}(L^i)$  である。従って  $[K_i^+]$  は

$$\ker(i_{q+1*} : G(L) \rightarrow G(L^i) \rightarrow G(L^i)/G_{q+1}(L^i))$$

に含まれない、そして  $\ker(i_{q+1*}) \supset G_{q+1}(L)$  だから  $[K_i^+] \notin G_{q+1}(L)$  である。一方  $L$  は *homology  $\partial$ -link* だから、 Proposition 1 (4) によって  $[K_i^+] \in G_\omega(L)$  である。これは矛盾である。故に任意の  $i = 1, 2, \dots, m$  に対し  $G(L^i)$  で  $[K_i] = 1$  である。よって  $L$  は *h-trivial in the strong sense* である。  $\square$

次に *h-trivial link in the strong sense* と *h-trivial link* の間を区別する不変量である higher order linking について述べる。  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $m$  個の成分を持つ  $S^3$  内の絡み目とし、  $c$  を  $S^3 - L$  内の単純閉曲線とする。  $G(L) = \pi_1(S^3 - L)$  とし  $G_q = G_q(L)$  を  $q$ -th lower central subgroup of  $G(L)$  とする。

$G_q/G_{q+1}$  は  $\mathbf{Z}$ -加群だから (群としてアーベル群)、任意の元  $[c] \in G_q$  に対し、ホモトピー類  $[c]$  は  $G_q/G_{q+1}$  の元として一次結合  $\sum_i n_i g_i$  と表現出来る。ただし、  $n_i \in \mathbf{Z}$  であり  $g_i$  は  $\mathbf{Z}$ -module としての  $G_q/G_{q+1}$  の生成元である。

**定義 3** 単純閉曲線  $c$  と絡み目  $L$  の  $q$ -th linking vector  $LK_q[c, L]$  は  $[n_1, n_2, \dots]$  により定義される。また  $c$  と  $L$  の  $q$ -th linking number  $lk_q(c, L)$  は  $\sum_i n_i$  により定義される。

**注 1**  $lk_q(c, L)$  は可換ではない、即ち  $m = 1$  のときでさえも  $lk_q(c, L) \neq lk_q(L, c)$  (即ち  $L$  は結び目) である。一般に結び目  $L$  のときのみ  $lk_1(c, L) = lk_1(L, c)$  である。

**例 6**  $F(1) \cong \mathbf{Z}$  は可換群だから、  $F_2(1) \cong F_3(1) \cong \dots \cong \{1\}$  であり、  $F_1(1)/F_2(1) \cong \mathbf{Z}$ 、  $F_q(1)/F_{q+1}(1) \cong \{0\}$  ( $q \geq 2$ )。そこで、もし絡み目  $L = (K_1, K_2)$  が *Brunnian* なら、  $q$ -th linking vectors は  $q = 1$  のときのみ、意味を持ち、全ての  $q \geq 2$  に対し  $LK_q(K_1, L^1) = LK_q(K_2, L^2) = 0$  である。

例 7  $L = (K_1, K_2)$  を Whitehead link (Figure 2) とする。全ての  $LK_q[K_i, L^i]$  ( $i = 1, 2$ ) は全ての  $q \geq 1$  に対し 0 である。

注 2  $G_1 = G(L)$  だから,  $[c]$  は常に  $G_1$  に含まれる。従って  $c$  と  $L$  の 1-st linking vector (resp. 1-st linking number)  $LK_1[c, L]$  (resp.  $lk_1(c, L)$ ) は常に定義され、 $lk_1(c, L)$  は普通の絡み数を使って次のように表現される。

$$lk_1(c, L) = lk(c, L) = \sum_{i=1}^m lk(c, K_i).$$

$[c] \in G(L)$  であり  $G(L)/G_2 \cong H_1(S^3 - L) \cong \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} = \{ \langle m_1 \rangle \} \oplus \cdots \{ \langle m_m \rangle \}$  だから  $[c] = \sum_i n_i \langle m_i \rangle = \sum lk(c, K_i) \langle m_i \rangle$  in  $G(L)/G_2$  ここで  $m_i$  は  $K_i$  meridian,

例 8 (例 1 再考)  $G(L) = G(K) = \langle x, y | xyx = yxy \quad (*) \rangle$

これは三つ葉結び目の結び目群である。すると  $G_2 = \langle [x, y] | (*) \rangle$  ここで  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$  は  $x$  と  $y$  の交換子。Hall family ([Se]) を使って

$$G_3 = \langle [x, [x, y]], [y, [x, y]] | (*) \rangle$$

$$G_4 = \langle [x, [x, [x, y]]], [y, [x, [x, y]]], [y, [y, [x, y]]] | (*) \rangle$$

そこで  $G(K)/G_2 = G_1/G_2 \cong \mathbf{Z}$ .  $G_2/G_3$  で  $[x, [x, y]] = 1$  だから,  $G_2/G_3$  で  $x = y$  そこで  $G_2/G_3 \cong \{0\}$ . よって,  $G_q/G_{q+1} \cong \{0\}$ ,  $q \geq 2$ .

例 1(a)  $K = K_1^1$  とおく。すると  $lk_1(K_1, K_2) = lk_1(K_2, K_1) = 0$ .

また,  $G(K_2^1)$  で  $[K_1^1] = 1$  だから  $lk_2(K_1^1, K_2^1) = 0$ ,  $G_2(K_1^1)/G_3(K_1^1) = \{0\}$  だから  $lk_2(K_2^1, K_1^1) = 0$  である。また,  $q \geq 3$  のとき,  $lk_q(K_1^1, K_2^1) = lk_q(K_2^1, K_1^1) = 0$ .

linking vector  $LK_q[c, L]$  の定義から、次の命題が容易に示せる。

命題 5  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $S^3$  内の  $m$  個の成分を持つ絡み目とし  $c$  を  $S^3 - L$  内の単純閉曲線とする。もし  $c$  が  $G(L)$  の  $q$ -th lower central subgroup  $G_q$  に含まれ、 $G_{q+1}$  に含まれないなら  $c$  と  $L$  の  $k$ -th linking vector  $LK_k[c, L]$  が  $k \leq q$  に対し定義され

$$\begin{cases} LK_k[c, L] = 0 & (k \leq q-1) \\ LK_q[c, L] \neq 0 \end{cases}$$

である。

例 9 (例 2 再考) Borromean 環  $L_B = (K_1, K_2, K_3)$  (図 10).

$L^i = L - \{K_i\}$  とする。すると  $G(L^3) \cong F(2) = \langle x, y | - - \rangle$ ,  $G_2 = \langle [x, y] | - - \rangle$ ,  $G_3 = \langle [x, [x, y]], [y, [x, y]] | - - \rangle$  である。 $[K_3] = y^{-1}xyx^{-1} = [y, x^{-1}] \in G_2$  で



あり、従って  $lk_1(K_3, L^3) = 0$ .  $G_2/G_3$  において  $x[x, y] = [x, y]x$  よって  $G_2/G_3$  で  $[K_3] = x[x, y]x^{-1} = [x, y]$ . 故に  $lk_2(K_3, L^3) = 1$ .

$L_B$  の Milnor  $\mu$ -invariant  $\mu(1, 23) = 1$  知られている ([M1]). 従って  $L_B$  は homotopically trivial でもない.

図 10.

例 10  $c$  と  $L$  の  $q$ -th linking vector  $LK_q[c, L]$  は 0 ベクトルでないが  $q$ -th linking number  $lk_q(c, L)$  は 0 となる例がある.

$L = (K_1, K_2)$  を自明な絡み目とする. すると  $G(L) = \langle x, y | - - \rangle \cong F(2)$  であり、従って  $G_3/G_4 \cong F_3/F_4$  の Hall 基底は  $\{[x, [x, y]], [y, [x, y]]\}$  である. もし  $S^3 - L$  内の単純閉曲線  $c$  を  $G(L)$  内で  $[c] = [x, [x, y]][y, [x, y]]^{-1}$  となるようにすると  $LK_3[c, L] = [1, -1]$  であり  $lk_3(c, L) = 0$  である. (図 11)

図 11.

定理 2  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が  $h$ -trivial link in the strong sense とすると、 $K_i$  と  $L^i$  の  $q$ -th linking vector は任意の  $q \geq 1$  と任意の  $i$  に対して  $LK_q[K_i, L^i] = 0$  である.

証明.  $L$  は  $h$ -trivial in the strong sense だから任意の  $i \in \{1, \dots, m\}$  に対して  $G(L^i)$  で  $[K_i] = 1$ . 故に、任意の  $q \geq 1$  に対して  $LK_q[K_i, L^i] = 0$  である.  $\square$

Brunnian, homology  $\partial$ -link は定理 1 によって  $h$ -trivial in the strong sense だから次を得る.

系 2.1  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が Brunnian, homology  $\partial$ -link なら  $K_i$  と  $L^i$  の  $q$ -th linking vector は、任意の  $q \geq 1$  と  $i$  に対し  $LK_q[K_i, L^i] = 0$  である.

しかし、次のように更に強い結果を得た.

定理 3  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が homology  $\partial$ -link ( $L$  が Brunnian という仮定無し) であると任意の  $q \geq 1$  と任意の  $i$  に対し  $LK_q[K_i, L^i] = 0$  である.

証明。  $K_i^+$  を  $K_i$  の longitude とする。  $L$  は homology  $\partial$ -link だから、  $[K_i^+]$  は  $G_\omega(L) = \bigcap_{q \geq 1} G_q$  にふくまれる ([S1])。そして  $i_*([K_i^+]) = [K_i] \in G(L^i)$  である。ただし  $i : S^3 - L \rightarrow S^3 - L^i$  は包含写像である。そして  $[K_i]$  は  $G_\omega(L^i)$  に含まれる。何故なら、もし  $[K_i] \notin G_\omega(L^i)$  なら  $[K_i] \in G_q(L^i)$ ,  $[K_i] \notin G_{q+1}(L^i)$  という  $q \geq 1$  がある。すると  $[K_i^+] \notin G_{q+1}(L)$  となり矛盾。故に任意の  $q \geq 1$  と  $i$  に対し  $LK_q[K_i, L^i] = 0$  である。  $\square$

上の定理は higher order linking vector  $LK_q[c, L]$  が絡み目を区別出来る分離性についての限界を示している。一方、次の定理は  $h$ -trivial in the strong sense でない絡み目に対する強さを示している。

**定理 4** 絡み目  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が Brunnian ではあるが  $h$ -trivial in the strong sense ではないなら、  $LK_q[K_i, L^i] \neq 0$  となる  $i \in \{1, \dots, m\}$  と  $q \geq 1$  がある。

証明。  $L$  は定理 1 によって homology  $\partial$ -link ではない。そして  $h$ -trivial in the strong sense でないから  $G(L^i)$  で  $[K_i] \neq 1$  であるような  $i$  がある。そして longitude  $K_i^+$  は  $G_\omega(L)$  に含まれない。もし  $[K_i^+] \in G_\omega(L)$  なら  $[K_i] = i_*([K_i^+])$  は  $G_\omega(L^i)$  に含まれる。ところが  $G(L^i) \cong F(m-1)$  であり、従って  $G_\omega(L^i) = \{1\}$  だから  $G(L^i)$  で  $[K_i] = 1$ 。これは矛盾である。それ故  $[K_i]$  は  $G_\omega(L^i)$  に含まれない。よって  $[K_i] \in G_q(L^i)$  かつ  $[K_i] \notin G_{q+1}(L^i)$  となるような  $q \geq 1$  がある。故に  $LK_q(K_i, L^i) \neq 0$  である。

#### $LK_q[c, L]$ の準同形像

一般に、絡み目  $L$  と  $S^3 - L$  内の単純閉曲線  $c$  に対し  $[c]$  が  $G_q$  に含まれるなら、  $q$ -th linking vector  $LK_q[c, L]$  は定義される。しかし実際に  $LK_q[c, L]$  の計算は  $G(L)$  に関係子があるのでかなり難しい。しかし  $L$  が自明な絡み目の場合は  $G(L)$  が自由群なので Hall 基底という標準的な基底がある。そこで  $LK_q[c, L]$  の自由群への準同形像をとると  $LK_q[c, L]$  の計算はかなり容易になる。

**定義 4**  $\varphi : G(L) \rightarrow F(n)$  を絡み目群  $G(L)$  から、階数  $n$  の自由群への準同形写像とする。  $[c] \in G_q$  で  $\varphi([c])$  が  $F_r = F_r(n)$  ( $r \leq q$ ) に含まれるなら  $\varphi([c])_H$  は線形結合  $\varphi([c])_H = \sum n_i h_i$  と表される。ただし  $n_i \in \mathbf{Z}$  で  $h_i$  は  $F_r/F_{r+1}$  の Hall 基底  $H$  とする。そこで  $q$ -th linking vector  $LK_q[c, L]$  の  $\varphi$  による像  $LK_q^\varphi[c, L]_H$  を  $LK_q^\varphi[c, L]_H := \varphi([c])_H = [n_1, n_2, \dots]$  で定義する。

**定義 5** 絡み目  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が almost homology  $\partial$ -link ( resp. almost  $\partial$ -link) とは  $L$  の任意の proper sublink が homology  $\partial$ -link ( resp.  $\partial$ -link) であるときをいう。

例 11  $L = (K_1, \dots, K_m)$  が *almost homology  $\partial$ -link* であると、任意の  $i$  に対し、全射  $\varphi : G(L^i) \rightarrow F(m-1)$  がある。従って、この全射  $\varphi$  を使って  $LK_q^{\varphi}[K_i, L^i]_H$  が定義出来る。

## 5 $h$ -split link の持っている性質

$h$ -split link を  $\partial$ -link から区別する不変量は未だ知られていない。そこでこの節では  $h$ -split link が持っている幾何学的特長を  $\partial$ -link の場合と対比させながら列挙することにする。

命題 4 と同様にして次の命題が成り立つ。

命題 6  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $h$ -split link とし、 $K_1$  は  $S^3$  で自明な結び目とする。 $p_k : (M_k(K_1), \tilde{K}_1) \rightarrow (S^3, K_1)$  を  $K_1$  で分岐する  $k$ 重巡回分岐被覆空間とする。(従って、 $M_k(K_1) \cong S^3$ ) すると、 $p_k^{-1}(K_2, K_3, \dots, K_m)$  は  $k(m-1)$  個の成分から成る  $h$ -split link である。

証明。  $L$  は  $h$ -split link だから、互いに交わらない singular disks  $\phi_i(D^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) が存在して  $\phi_i(\partial D^2) = K_i$  である。そこで  $\phi_1(\partial D^2)$  を手術して non-singular orientable surface  $F_1$  をつくり ( $\partial F_1 = K_1$ )、命題 4 と同様にして  $F_1$  で  $S^3$  を切り開いたもののコピーを  $k$  個作り、 $\partial M_j^3$  の (+) 側と  $\partial M_{j+1}^3$  の (-) 側を順に貼りあわせて  $M_k(K_1)$  を作る。 $F_1 \cap \phi_i(D^2) = \phi$  ( $i = 2, 3, \dots, m$ ) だから  $\phi_i(D^2)$  ( $i = 2, \dots, m$ ) は  $p_k^{-1}$  によって  $M_k(K_1)$  に持ち上げられ、 $\tilde{\phi}_{ij}$  ( $2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$ ) は  $\tilde{\phi}_{ij}(D^2) \cap \tilde{\phi}_{si}(D^2) = \phi$ ,  $\tilde{\phi}_{ij}(\partial D^2) = \tilde{K}_{ij}$  なので  $p_k^{-1}(K_2, K_3, \dots, K_m)$  は  $h$ -split link である。  $\square$

命題 7  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $\partial$ -link とし、 $F_1, \dots, F_n$  を  $\partial F_i = K_i$ ,  $F_i \cap F_j = \phi$  となるような向きづけ可能な曲面とする。すると  $F_i$  上の任意の単純閉曲線  $c_i$  に対し  $lk(c_i, K_j) = 0$  である。

証明。もし  $lk(c_i, K_j) \neq 0$  ならば  $K_j$  は  $S^3 - c_i$  でヌルホモトープではない。これは  $F_j \cap F_i = \phi$  に矛盾。  $\square$

命題 8  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $h$ -link とし、 $\phi_1(D^2), \dots, \phi_n(D^2)$  を  $\phi_i(\partial D^2) = K_i$ ,  $\phi_i(D^2) \cap \phi_j(D^2) = \phi$  となるような特異円板とすると、 $\phi_i(D^2)$  上の任意の単純閉曲線  $c_i$  に対し  $\pi_1(S^3 - (K_1, \dots, K_i, c_i, \dots, \tilde{K}_j, \dots, K_n))$  で  $[K_j] = 1$  である。

証明。  $\phi_i(D^2) \cap \prod_{i \neq j} \phi_i(D^2) = \phi$  であるから。

命題 9  $L = (K_1, \dots, K_m)$  を  $\partial$ -link とする。従って、互いに交わらない、向きづけ可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) で  $\partial = K_i$  となるものがある。

$m$  成分絡み目  $L_0 = (K_1^0, \dots, K_m^0)$  で  $L_0$  の正則近傍  $U(L_0) = (U(K_1^0), \dots, U(K_m^0))$  で  $U(K_i^0) \cap F_i$  を満足するものがあるならば  $L$  は  $h$ -split link である。

証明。  $K_i = \partial F_i \subset F_i \subset U(K_i^0)$  だから  $U(K_i^0)$  で  $K_i \sim *$  (ホモローグ)。ところが  $\pi_1(U(K_i^0)) \cong \mathbb{Z} \cong H_1(U(K_i^0))$  だから  $U(K_i^0)$  で  $K_i \simeq *$  (ホモトピック)。故に  $L$  は  $h$ -split link である。  $\square$

### $n$ -可縮曲線

$h$ -split link の性質を調べるための、もう 1 つの概念である、 $n$ -可縮曲線というものを導入する。 $M^3$  を 3 次元多様体とし、 $\alpha$  を  $M^3$  に含まれる単純閉曲線とする。もし  $\alpha$  が  $M^3$  で可縮なら、次の性質を持つ singular disk  $\phi: D^2 \rightarrow M^3$  がある。

1.  $\phi|_{\partial D^2}$  は埋め込みである。
2.  $\phi(\partial D^2) = \alpha$ .
3.  $\phi$  の特異点は clasp 型か又は ribbon 型のみ。

$\phi$  (又は  $\phi(D^2)$ ) を  $\alpha$  の spanning singular disk という。包含写像から導かれる準同形写像  $i_*: \pi_1(\phi(D^2)) \rightarrow \pi_1(M^3)$  が 0-写像のとき、 $\phi(D^2)$  は本質的でない singular 2-disk という。

定義 6  $\alpha$  を 3 次元多様体  $M^3$  に含まれる単純閉曲線とする。 $\alpha$  が  $M^3$  で可縮のとき、 $\alpha$  は ( $M^3$  で) 0-可縮という。 $\alpha$  が  $M^3$  で 0-可縮で  $\alpha$  が本質的でない singular disk  $\phi(D^2)$  を張るとき、 $\alpha$  を ( $M^3$  で) 1-可縮という。次に  $\alpha$  の singular disk で、その上の全ての単純閉曲線が 1-可縮となるものがあるとき、 $\alpha$  を 2-可縮という。帰納的に  $\alpha$  の spanning disk で、その上の全ての単純閉曲線が  $(n-1)$  可縮のとき、 $\alpha$  を  $n$ -可縮という。任意の正整数  $n$  に対し、 $\alpha$  が  $n$ -可縮のとき、 $\alpha$  を  $\infty$ -可縮という。

### 図 12

命題 10  $L = (K_1, K_2)$  を  $S^3$  内の  $h$ -split link とし、 $K_2$  は  $S^3$  で自明な結び目とする。すると  $K_1$  は  $S^3 - K_2$  で 1-可縮である。

証明。  $K_1$  は  $S^3 - K_2$  で 1-可縮でないとする。すると、  $K_1$  を張る任意の特異円板  $\phi_1(D^2)$  上に  $S^3 - \text{Int}N(K_2)$  で可縮でない単純閉曲線  $c_1$  がある。従って、

$$[c_1] \neq 1 \text{ in } \pi_1(S^3 - \text{Int}N(K_2)) \cong \mathbb{Z} \cong H_1(S^3 - \text{Int}N(K_2))$$

よって、  $lk(c_1, K_2) \neq 0$  ゆえに、  $[K_2] \neq 1 \notin \pi_1(S^3 - c_1)$ 。これは、  $K_1$  と  $K_2$  に交わらない特異円板  $\phi_1(D^2), \phi_2(D^2)$  が張れないことを意味しており、  $L = (K_1, K_2)$  が  $h$ -split link であることに矛盾する。故に、  $K_1$  は  $S^3 - K_2$  で 1-可縮である。  $\square$

$h$ -split linkの交わらない Seifert 曲面と Seifert 行列について

$L = (K_1, K_2, \dots, K_m)$  を  $h$ -split link とし、  $L$  の各成分  $K_i$  が互いに交わらない特異円板  $\phi_i(D^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を張っているとす。  $\phi_i(D^2)$  を手術して  $K_i$  に張られている互いに交わらない向きづけ可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を作る。これらの曲面から  $L$  の Seifert 行列  $A = (lk(x_i^+, y_j))$  を作る。  $g_i = g(F_i)$  を  $F_i$  の種数とし、  $\{a_{i1}, b_{i1}, \dots, a_{ig_i}, b_{ig_i}\}$  を  $H_1(F_i)$  のシンプレクティック基底とする。また、  $a_{ij}, b_{ij}$  が表している  $F_i$  上の単純閉曲線も同じ記号  $a_{ij}, b_{ij}$  を使うとする。

命題 11  $h$ -split link  $L$  に対し、上の状況のもとで、更に必要なら  $a_{ij}$  と  $b_{ij}$  を入れ替えて、任意の  $i, j$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, g_i$ ) と任意の  $k$  ( $k \neq i$ ) について、次が成り立つ。

1.  $lk(a_{ij}, K_k) = 0$
2.  $lk(a_{ij}^+, x_{kl}) = 0$  ここで、  $x_{kl}$  は  $a_{kl}$  又は  $b_{kl}$
- 3.

$$lk(a_{ij}^+, a_{ij}) = \pm 1, \quad lk(a_{ij}^+, x_{il}) = 0 \quad (j \neq l)$$

ここで  $x_{il}$  は  $a_{il}$  又は  $b_{il}$ 。

$$\begin{cases} lk(a_{ij}^+, b_{ij}) = \pm 1, & lk(b_{ij}^+, a_{ij}) = 0 \\ lk(a_{ij}^+, b_{ij}) = 0, & lk(b_{ij}^+, a_{ij}) = \pm 1 \end{cases} \quad \text{又は、}$$

証明。  $L$  は  $\partial$ -link でもあるから (1) は成り立つ。また、特異円板の全ての特異点は clasp 型であるとして良い。従って図 1 3 より、(2)、(3) が成り立つ。  $\square$

図 1 3

$\partial$ -link  $L$  の各成分  $K_i$  に対し  $K_i = \partial F_i$  となるような互いに交わらない向きづけ可能な曲面  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) について Ko ([Ko]) は次のような Seifert 行列を定義した。

**定義 7** ([Ko])  $m^2$  個の小行列  $A_{ij}$  からなる行列  $A = (A_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) は次の条件を満たす時タイプ  $m$  の Seifert 行列という。

(i) 任意の  $i = 1, 2, \dots, m$  に対し  $A_{ii}$  は  $(2g_i \times 2g_i)$ -行列で  $A_{ii} - A_{ii}^T$  が *unimodular* という性質を持つ、ここで  $A^T$  は  $A$  の転置行列である。

(ii) 任意の  $i, j = 1, 2, \dots, m$  ( $i \neq j$ ) に対し  $A_{ij}$  は  $(2g_i \times 2g_j)$ -行列で  $A_{ij} = A_{ji}^T$  という性質を持つ。

絡み目  $L$  の行列  $A$  の成分は  $\sigma(x, y) = lk(x^+, y)$  で定義される Seifert pairing  $\sigma : H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$  によって与えられる。ここで  $F$  は  $F_i$  の非交和である。 $F = \coprod_{i=1}^m F_i$ 。

行列  $A$  の行を左から右へ順に  $a_{11}, b_{11}, \dots, a_{1g_1}, b_{1g_1}, a_{21}, b_{21}, \dots, a_{ng_m}, b_{ng_m}$  に対応するように並べる、列についても上から下に同様の順に並べる。

**命題 12**  $L$  を *h-split link* とし、 $L$  の Seifert 行列  $A$  を上で定義されたものとする。すると、 $a_{ij}$  に対応する行は  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$  (*resp.*  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$ ) となる。ここで  $1 \ 1$  (*resp.*  $1$ ) は  $a_{ij}, b_{ij}$  (*resp.*  $b_{ij}$ ) に対応する列での成分である。また、 $a_{ij}$  に対応する列は  $(0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$  (*resp.*  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ ) で  $1$  (*resp.*  $1 \ 1$ ) は  $a_{ij}$  (*resp.*  $a_{ij}, b_{ij}$ ) に対応する行である。また  $( )^T$  は行列  $( )$  の転置を意味しているものとする。更に  $a_{ij}$  が 特異円板の *ribbon* 型特異点に対応しているときは  $a_{ij}$  に対応する行は  $(0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$  (*resp.*  $(0 \ \dots \ 0)$ ) である。ここで、 $1$  は  $b_{ij}$  に対応する列の成分であり、 $a_{ij}$  に対応する列は  $(0 \ \dots \ 0)^T$  (*resp.*  $(0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$ ) ここで  $1$  は  $b_{ij}$  に対応する行。)

例えば  $m = 2$  で  $g_1 = g_2 = 1$  の時  $A$  は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

又は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}$$

という形をしている。ただし  $a_{42} = a_{24}$

また、 $m = 2$  で  $g_1 = g_2 = 1$ 、更に特異円板  $\phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) の特異点のタイプが ribbon 型のみの時、 $A$  は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

又は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}$$

という形をしている。ただし、 $a_{42} = a_{24}$

証明。図 13 から明らかである。□

## 参考文献

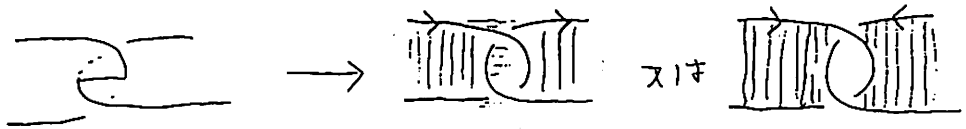
- [Ch1] Chen, K.T. : Commutator calculus and link invariants, Proc. A.M.Soc. 3(1952) 44-55
- [Ch2] ——— : Isotopy invariants of links, Ann. Math., 56(1952) 343-353
- [C1] Cochran, T.D. : Link concordance invariants and homotopy theory, Invent. math. 90, 635-645 (1987)
- [C2] ——— : Derivatives of links : Milnor's concordance invariants and Massey's products, Memoirs A.M.S. vol.84 no.427 Providence (1990)
- [C2] ——— : Homology boundary links and Branchfield forms : Concordance classification and new tangle-theoretic construction, Topology 33(3) (1994) 397-427
- [C-O] Cochran, T.D. and Orr, K. : Not all links are concordant to boundary links, Ann. of Math. 138 (1993) 519-554
- [D] Dimovsky, D. : A geometric proof that boundary links are homotopically trivial, Topology and its appl. 29(1988) 237-244

- [E] Eilenberg, S. : Sur les espaces multicohérent II, *Fundamenta Mathematica* 29 (1937) 101-122.
- [Ha] Hain, R.M. : Iterated integrals, intersection theory and link groups, *Topology* 24(1) (1985) 45-66
- [Hi] Hillman, J.A. : Alexander ideals of links, *Lect. Note Math.* 895 Springer-Ver. (1981)
- [Ko] Ko, K. : Seifert matrices and boundary link cobordism, *Trans.A.M.S.* 299 (1987) 657-681
- [K1] Kobayashi, K. :  $\omega$ -contractible curves and  $C(\omega)$ -condition, *Kobe J. Math.* 1 (2) (1984) 133-146
- [K2] ——— :  $h$ -trivial link in the strong sense and higher order linking, preprint
- [K3] ——— : boundary links and  $h$ -split links, preprint
- [K4] ——— : homotopically split links , preprint
- [M1] Milnor, J. : Link groups, *Ann. of Math.* 59 (1954) 177-195
- [M2] ——— : Isotopy of links, *Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in Honor of S.Lefschetz*, Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. (1957) 280-306
- [N1] Nakagawa, Y. : Elementary disks and their equivalences, *Quart. J. Math.* 27(107) (1976) 355-369
- [N2] ——— : On the Alexander polynomials of slice links, *Osaka J. Math.* 15(1981) 161-182
- [O1] Orr, K : New invariants and applications, *Comm. Math. Helv.* 62, (1987) 542-560
- [O2] ——— : Homotopy invariants of links, *Invent. Math.* 95(2) (1989) 379-394
- [O3] ——— : Link concordance invariants and Massey products, *Topology* 30(4) (1991) 699-710
- [Se] Serre, J.-P. : Lie algebra and Lie groups, Benjamin / Cummings, London, Amsterdam, Don Mills, Sydney, Tokyo 1965

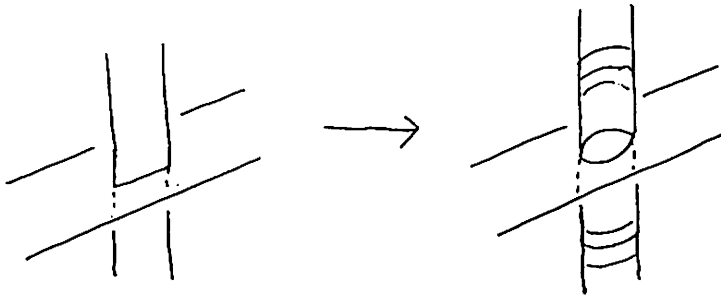


- [S1] Smythe, N.E. : Boundary links, In Topology Seminar, Wisconsin 1965 (ed. by R.H.Bing) AS60 (1966) 69-72
- [S2] ——— :  $n$ -linking and  $n$ -splitting, Amer.J.Math. 92 (1970) 272-282
- [ST] Stallings, J. : Homology and central series of groups, J. Algebra (1965), 170-181

(42)



clasp



ribbon

図 0.

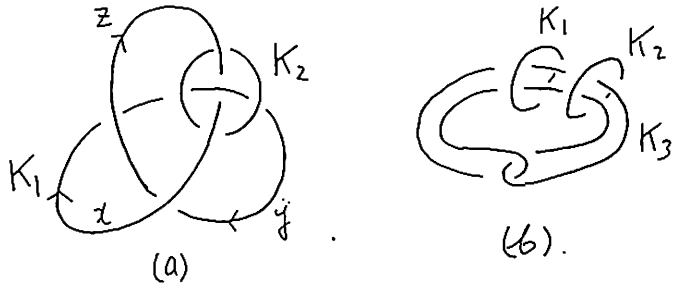


图 1

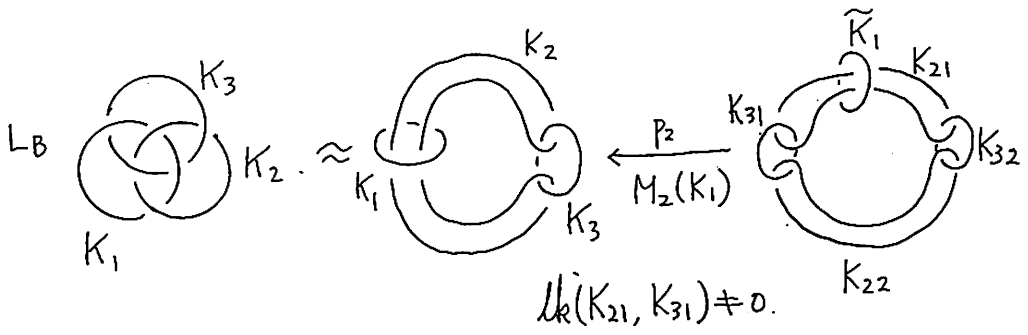


图 2

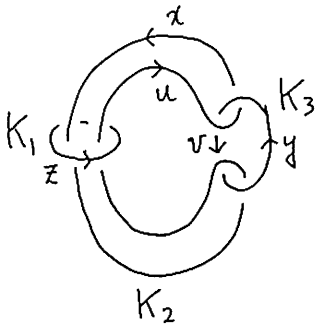


图 3

(44)

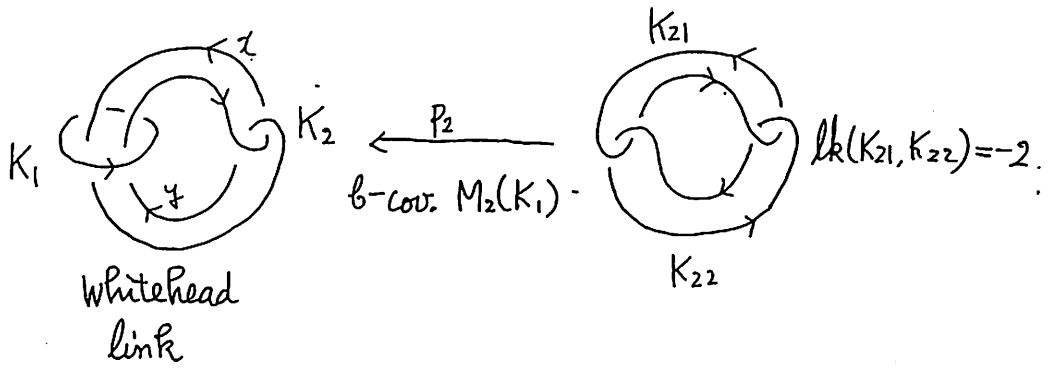


图 4.

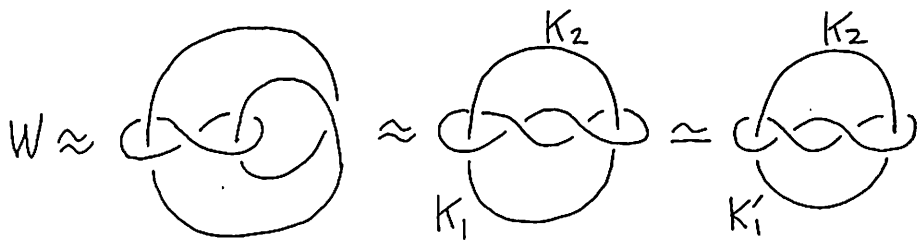


图 5.

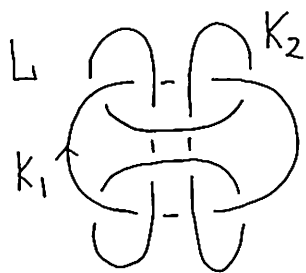


图 6.

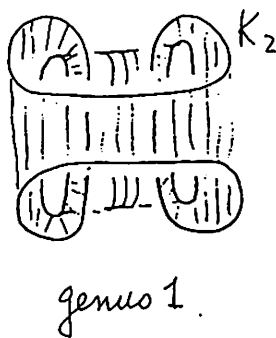
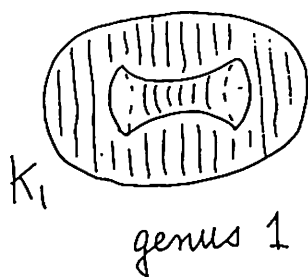
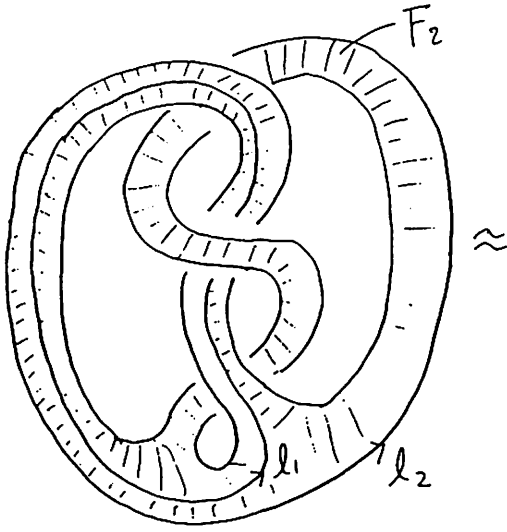
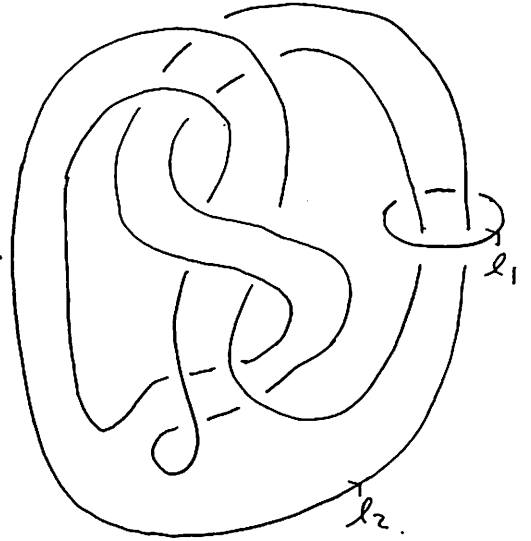


图 7.

(46)

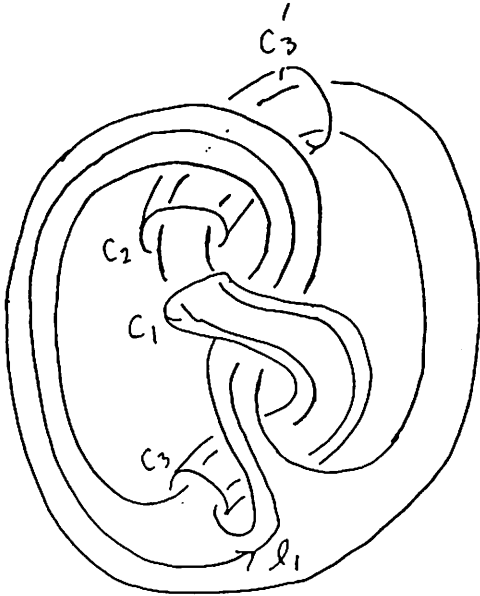


(a)

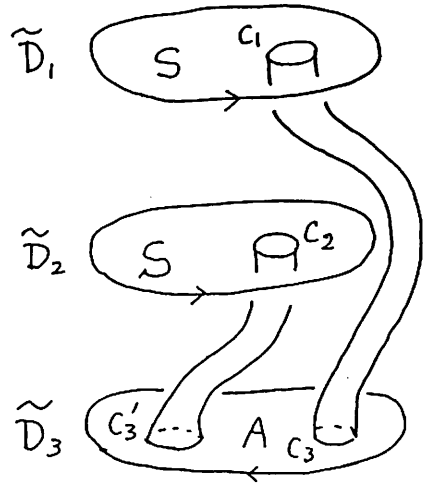


(b)

图 8



(a)



(b)

图 9

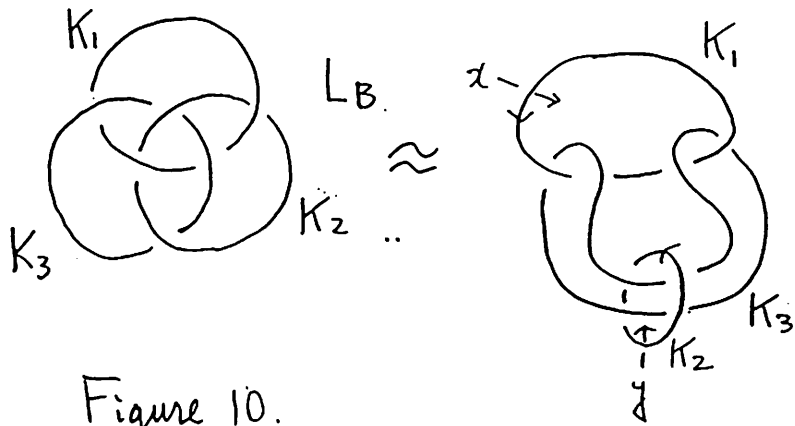


Figure 10.

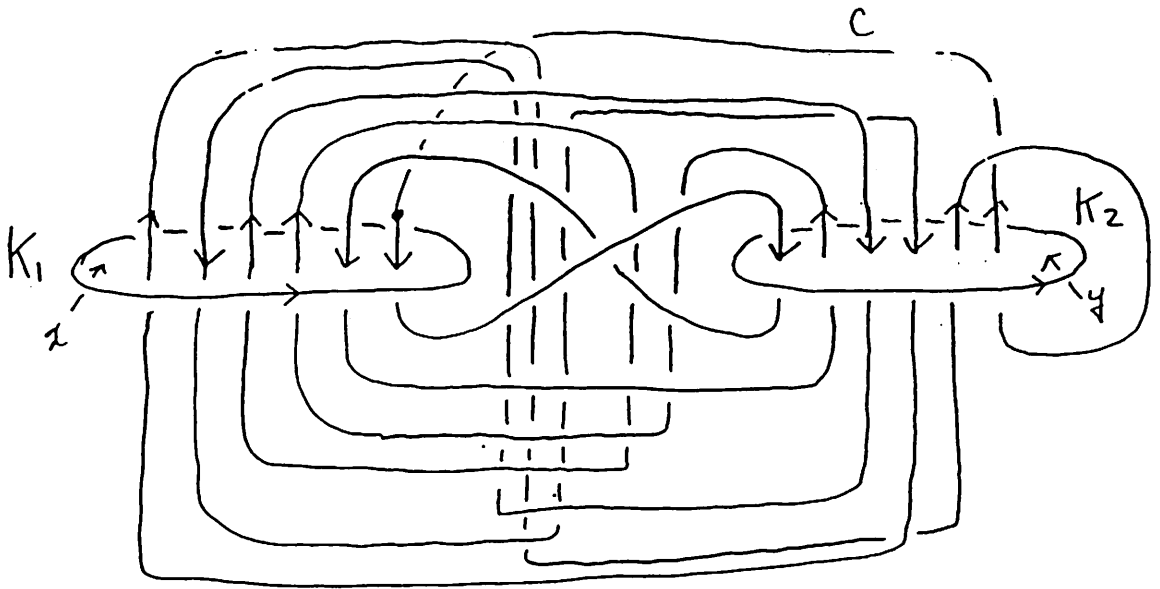
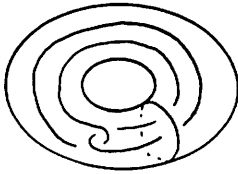


Figure 11.

(48)



0-contractible



1-contractible

图 12

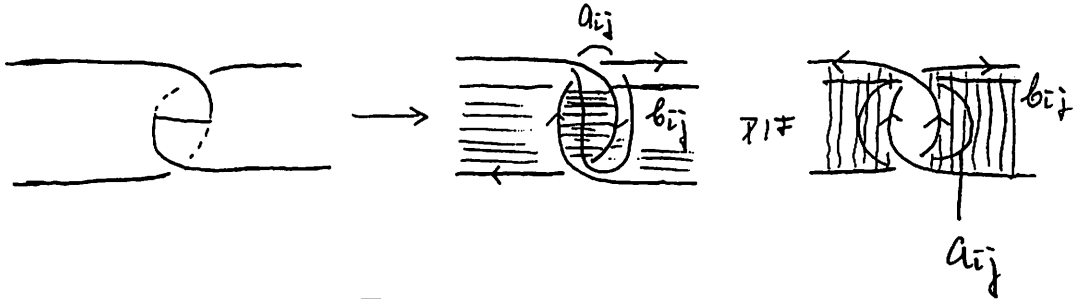


图 13