

完全2部グラフの Canonical Representation について

Kazuaki Kobayashi

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

December 1996

1 有限グラフの標準空間表現

グラフ (特に非平面的グラフ) の標準空間表現を、そのグラフの本 (または蕾) への埋め込みを取り、その最小シート数を持つもの (最小シート数本表現) として定義したが、標準表現でも種類あることが完全グラフの場合には野田 [N] によってしめされ、また完全2部グラフについても伊美 [I] によって示された。そこで、この論文では新たに完全2部グラフの正規表現なるものを定義し、完全2部グラフ $K_{5,5}$ の正規表現 $\tilde{K}_{5,5}^*$ の位相的対称群 $TSG(\tilde{K}_{5,5}^*)$ を求める。

命題 1 (野田 [N. Pro.4.1]) K_7 の標準表現 \tilde{K}_7^* で次のような位相的対称群 $TSG(\tilde{K}_7^*)$ を持つものがある。

$$TSG(\tilde{K}_7^*) \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = id., \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle \cong D_3$$

ただし $Aut(K_7) \cong S_7$ を $\{1, 2, \dots, 7\}$ の置換群として表して $\sigma = (173)(456), \tau = (15)(36)(47)$ とする。

図 1。

(56)

命題 2 (伊美 [I]) $K_{4,4}$ の標準空間表現であるものは、次のいずれかの TSG をもつ。ここで

$$\text{Aut}(K_{4,4}) \cong S_2[S_4]$$

$$\text{TSG}(\tilde{K}_{4,4}^{(1)}) \cong \langle (15), (37), (1357), (26), (48), (2468), (12345678) \rangle$$

$$\text{TSG}(\tilde{K}_{4,4}^{(2)}) \cong D_8 \subset S_2[S_4]$$

$$\text{TSG}(\tilde{K}_{4,4}^{(3)}) \cong D_4$$

特に完全 2 部グラフにおいては、それがハミルトングラフになっているとき (鳥羽の条件)、そのハミルトン道がバインダー上にあるという条件をつけるか否かによって本表現に必要な最小シート数が異なることも解ってきた。(一般に必要な最小シート数は未だ完全には決定されてはいない。)

命題 3 (鳥羽の条件) 完全 n 部グラフ K_{m_1, m_2, \dots, m_n} ($m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$) が半ハミルトングラフになる必要十分条件は

$$m_1 \leq \sum_{i=2}^n m_i + 1$$

以下この論文では完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ に話を限る。

定義 1 $ms(K_{n,n})$ を完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の本表現の最小シート数とする。 Δ を $K_{n,n}$ の 1 つのハミルトン道とし、 $ms_{\Delta}(K_{n,n})$ を Δ に関する $K_{n,n}$ の本表現の最小シート数とする。

命題 4 (1) $ms_{\Delta}(K_{n,n}) = n$

(2) $ms(K_{n,n}) \leq n - 1$ (Bernhart-Kainen) (以下の定理 2)

命題 5 (伊美 [I]) $K_{4,4}$ の 3 シート表現は鏡像を除いてアンビエント・イソトピーの範囲で 1 種類でそれは $K_{4,4}^{(1)}$ にアンビエント・イソトピックである。

完全グラフにおいて大槻が正規的表現 (canonical presentation) を提案し、これについて次のことが解っている。

命題 6 (大槻 [O]) 完全グラフ K_n の正規的表現は鏡像を除いてアンビエント・イソトピーの範囲で 1 種類である。

命題 7 (野田 [N]) \tilde{K}_n を完全グラフの正規的表現とすると

$$TSG(\tilde{K}_n) \cong D_n \quad (n \geq 7)$$

$n \leq 6$ のとき正規的表現と標準表現は同じになり

$$TSG(\tilde{K}_5) \cong S_5 \quad (\text{吉松}) \qquad TSG(\tilde{K}_6) \cong S_2[S_3] \quad (\text{鳥羽})$$

そこで「標準」であることの 1 つの手掛かりとして空間グラフの位相的対称群 (Topological Symmetry Group, TSG) を取り上げ、これを追求することとする (TSG が最大のものが標準表現であるという捉え方)。

以下断らない限りハミルトン道 Δ が binding circle 上にあるものとする。

完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の蓄表現を考える。 n が奇数のとき最長の辺は長さが n で n 本ある。タイプは 1 種類で対頂点を結ぶもの (1 シート上 1 本)。また n が偶数のとき最長の辺は長さが $n-1$ のものでタイプは A, B 2 種類 (1 シート上 2 本)

図 2

定理 1 ([B-H]) $m \leq n, n \geq m^2 - m + 1 \implies ms(K_{m,n}) = m$

証明。 $m + n$ 個の頂点を円周上に任意にならべる。

$V(K_{m,n}) = U \cup V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ とする。

U の頂点は円周を m 個の弧に分ける。 $n \geq m^2 - m + 1$ ならこの m 個の弧の内どれか1つは V の頂点を m 個含む。この m 個の頂点を円周上 v_1, \dots, v_m とおく。円周上で $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ がサイクリックになるようにラベルづける（とくに u_m と u_1 の間に v_1, \dots, v_m が並ぶようにすればよい。）すると辺 $[u_i v_i]$ のどの2辺も同一ページには置けない。故に $ms(K_{m,n}) \geq m$ 。
 $ms(K_{m,n}) \leq m$ は次の例1と補助定理1から出る。 \square

$\alpha(G) = \min(\text{clique of } G)$ とおく。

例1 $\alpha(K_{m,n}) = m$ if $m \leq n$

補助定理1 G をグラフとし σ を頂点の任意の並べ方とすると $ms(G, \sigma) \leq \alpha(G)$

証明。バインダー上に頂点を σ に従って並べる。 $\alpha(G)$ を表現する α 個の頂点集合を S とし、 S の各頂点に1つのシートを対応させる。各頂点 $v \in S$ とそれに対応するシート上出来るだけ辺を乗せればよい。 \square

定理2 ([B-H]) $m \geq 4$ のとき $ms(K_{m,m}) \leq m - 1$

証明。 $V(K_{m,m}) = U \cup V$ とおき円周上に U と V の頂点が殆ど等しい個数だけ並べるように2つのグループの頂点を並べる。 $m \geq 8$ のとき m は $m - 4$ に還元出来る。4つのシートがコーナーの8つの頂点と他の全ての頂点とを結ぶために使われる。あとは掃納法。 \square

図3

一般に最小シート数本表現のシートにはAタイプ、Bタイプが混合して現れるが伊美による結果として $K_{4,4}$ に関しては全てAタイプの場合がTSGが一番大きくなる。
 n が奇数のとき最長の辺が時計廻り（又は反時計廻り）に順々に変化していくもの（大槻 K_n の正規表現に似ている）、また n が偶数のとき全てAタイプでそれが時計廻り（又は反時計廻り）に順々に変化していくもの（大槻の K_n の正規表現に似ている）、これらのTSGが最

大となるであろう。

因みに \tilde{K}_n^* を K_n の正規表現とすると

$$\begin{aligned} TSG(\tilde{K}_n^*) &\cong D_n && (n \geq 7) \text{ ([野田])} \\ &\cong S_2[S_3] && (n = 6) \text{ ([鳥羽])} \\ &\cong S_5 && (n = 5) \text{ ([吉松])} \end{aligned}$$

また完全2部グラフ $K_{n,n}$ のTSGについては $\tilde{K}_{n,n}^*$ を $K_{n,n}$ の最小シート数表現とすると

$$TSG(\tilde{K}_{3,3}^*) \cong S_2[S_3] (\cong \text{Aut}(K_{3,3})) \text{ ([吉松])}$$

$$TSG(\tilde{K}_{4,4}^*) \cong TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(1)}) \cong \langle (15), (37), (1357), (26), (48), (2468), (12345678) \rangle \subset S_2[S_4]$$

$$TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(2)}) \cong D_8 \cong \langle (28)(37)(46), (12345678) \rangle$$

$$TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(3)}) \cong D_4 \subset D_8$$

明らかに $|TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(1)})| > |TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(2)})|$ であるが更に $(28)(37)(46) = (28)(46)(37) = (2468)(48)(37)$

$$\text{だから } TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(2)}) \cong D_8 \subseteq TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(1)}) \subseteq S_2[S_4]$$

(ハミルトン道 Δ を考慮しない) 最小シート数表現 $g: K_{4,4} \rightarrow B_3$ は鏡像とアンビエント・イソトピーの範囲で1種類 (伊美) であり $g \cong f_1$ (*amb.iso.of* S^3) だから $TSG(g) \cong TSG(f_1)$

$$(Im f_1 = \tilde{K}_{4,4}^{(1)})$$

(野田より) $TSG(K_n^*) \cong D_n$ ($n \geq 7$) だから $TSG(\tilde{K}_8^*) \cong TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(2)}) \subseteq TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(1)})$

$K_{n,n}$ の正規形

$V(K_{n,n}) = VUV'$, $|V| = |V'| = n$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ とし、円周上に V と V' の頂点を交互に並べる; $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_n, v'_n$.

n が奇数のとき、円盤上に最長辺は長さが n で1枚のシート上に1本のみ引ける。

(I) v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) から $v'_{i+\frac{n-1}{2}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) へ最長辺を引く (ただし $\text{mod } n$ で考える)

(II) $v_i v'_{i+\frac{n-1}{2}}$, $v'_i v_{i+\frac{n-1}{2}}$ と順に引いていく。ただし $v_i v'_{i+\frac{n-1}{2}}$ は $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ 迄、 $v'_i v_{i+\frac{n-1}{2}}$ は $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ 迄

今のところ上の(I),(II)の2つの可能性が考えられるがTSGに関しどちらが大きいかわからない。

(60)

n が偶数のとき。円盤上の最長辺は長さが $n-1$ で1枚のシート上に2本引ける。そこで v_1, \dots, v_n 各々から2本の最長辺を引き n 枚のシートに順に配分する(全てA型であり、B型は使わない)。 n が奇数のとき(II)に相当するものはない。

図 5

以下 $K_{5,5}$ の正規形について解析する。
(I)の2つの正規形について。

図 6

一枚目のシートにおいて最長辺(長さ5)の右半分に次の長さ(長さ4)の辺が2本引けるがそのどちらかを選ぶことにより残りの4つのシートでの最長辺の右側の次の長さの辺の取り方が一意に定まってしまう。

従って正規形(I)における最長辺の右側のパターンは上記(1),(2)の2種類のみ。最長辺の左側も全く同じで最長辺の右側と左側では選択肢は独立。従って正規形のパターンの可能性は4つ。

1:各シート

最長辺の $\begin{cases} \text{右... (1)タイプ} \\ \text{左... (1)タイプ} \end{cases} \dots P_{1,1}$

2:各シート

最長辺の $\begin{cases} \text{右... (1)タイプ} \\ \text{左... (2)タイプ} \end{cases} \dots P_{1,2}$

3:各シート

最長辺の $\begin{cases} \text{右... (2)タイプ} \\ \text{左... (1)タイプ} \end{cases} \dots P_{2,1}$

4:各シート

最長辺の $\begin{cases} \text{右... (2)タイプ} \\ \text{左... (2)タイプ} \end{cases} \dots P_{2,2}$

上のように $P_{i,j}(i=1,2)$ を決める。

$P_{1,1}$ において円盤を時計廻りに $\frac{2\pi}{10}$ 回転すると $P_{1,1}$ の1番目、2番目、3番目、4番目、5番

目のシートが順に $P_{2,2}$ の 4 番目、5 番目、1 番目、2 番目、3 番目のシートになる。故に $P_{1,1} \approx P_{2,2}$

図 7

$P_{1,2}$ において

1. 1 枚目のシートの辺 $3'5$ を 5 番目のシートへ
2. 2 枚目のシートの辺 $4'0$ を 1 番目のシートへ
3. 3 枚目のシートの辺 $25'$ を 2 番目のシートへ
4. 4 枚目のシートの辺 $31'$ を 3 番目のシートへ
5. 5 枚目のシートの辺 $42'$ を 4 番目のシートへ 移す

(このことは可能である。) すると $P_{1,2}$ は $P_{1,1}$ になるので $P_{1,2} \approx P_{1,1}$
同様に $P_{2,1}$ において

1. 5 枚目のシートの辺 $3'4$ を 1 番目のシートへ
2. 1 枚目のシートの辺 $14'$ を 2 番目のシートへ
3. 2 枚目のシートの辺 $25'$ を 3 番目のシートへ
4. 3 枚目のシートの辺 $1'3$ を 4 番目のシートへ
5. 4 枚目のシートの辺 $2'4$ を 5 番目のシートへ
6. 5 枚目のシートの辺 $3'5$ を 1 番目のシートへ 移す

(このことは可能である。) すると $P_{2,1}$ は $P_{2,2}$ になるので $P_{2,1} \approx P_{2,2}$
ゆえに $P_{1,1} \approx P_{1,2} \approx P_{2,1} \approx P_{2,2}$

以上より正規形 (I) のアンビエント・イソトピー類は唯一つ
次に以下のような正規形 (II) のパターンを考える。

□

(62)

図 8

このパターンで1枚目のシートで最長辺13'の右側に次長辺を12' (又は23') を選ぶと残りのシートでの最長辺の右側の次長辺の選び方はユニークに決まる。したがってパターンとしては $P_{i,j}$ のときと同様4パターンである。それを $Q_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) とおく。 $Q_{i,j}$ はいずれかの $P_{i,j}$ のシート変換 ($\neq id., (12345)$) の結果となっている。 $P_{i,j}$ のときと同様 $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{2,1}, Q_{2,2}$ を決める。

1. $Q_{1,1}$ を π 回転すると $Q_{2,2}$ になる。ゆえに $Q_{1,1} \approx Q_{2,2}$
2. $Q_{1,2}$ を π 回転すると $Q_{2,1}$ になる。ゆえに $Q_{1,2} \approx Q_{2,1}$

図 9

$Q_{1,2}$ の

1. 3番目のシート上の辺14'を1枚目のシートに
2. 4番目のシート上の辺1'5を2枚目のシートに
3. 5番目のシート上の辺25'を3枚目のシートに
4. 1番目のシート上の辺3'5を4枚目のシートに
5. 2番目のシート上の辺45'を5枚目のシートに移す

(このことは可能) すると $Q_{1,2}$ は $Q_{1,1}$ になる。ゆえに $Q_{1,2} \approx Q_{1,1}$

同様にして $Q_{1,1} \approx Q_{1,2} \approx Q_{2,1} \approx Q_{2,2}$

従って $Q_{i,j}$ のアンビエント・イソトピー類は唯1つである。

$K_{5,5}$ の正規形 (I I) は明らかに K_{10} の正規形の部分集合になっている。ゆえに $\bar{K}_{10}^* \supset Q_{1,1}$

($Q_{1,1}$ は $K_{5,5}$ の (I I) の正規形)

ゆえに $TSG(\bar{K}_{10}^*) \cong D_{10} \subset TSG(Q_{1,1})$

$P_{1,1}$ のシートにシート変換(4 2 3 5)を行うと $Q_{1,1}$ のシート順になる。次に $K_{5,5}$ の正規(I)パターンから対頂点たとえば1,3' (必ずしも対頂点でなくたとえば5,5'でもよい)を除くと(従ってその2頂点のいずれかを端点とするすべての辺も除く)Aタイプを4枚使う $K_{4,4}$ の最小シート数表現が得られ、その4枚の順序に依らず全てアンビエント・イソトピックであることが伊美により証明されている([I. Th.3.1])。それを $\tilde{K}_{4,4}^{(1)}$ と表した。即ち $\tilde{K}_{4,4}^{(1)} \subset P_{1,1}$

ゆえに $TSG(P_{1,1}) \subset TSG(\tilde{K}_{4,4}^{(1)})$

同様に $K_{5,5}$ の正規(II)パターンの2つの頂点集合 V, V' から各1点ずつ除いても $K_{4,4}$ の正規形 $\tilde{K}_{4,4}^{(1)}$ は得られない。即ち $\tilde{K}_{4,4}^{(1)} \not\subset Q_{1,1}$ 。そこで以後正規パターン(I)のみ考えることにする。これを $\tilde{K}_{5,5}^*$ とかく。因みに $\tilde{K}_{4,4}^{(1)}$ には非自明な結び目は含まれずHopf linkが2組含まれる。

図 10

Aタイプが4枚のパターンであるがシートの順序が異なる。しかし伊美により、これはアンビエント・イソトピックである。

$\tilde{K}_{5,5}^*$ に含まれる結び目について

非自明な結び目になる可能性があるのは長さ6, 8, 10のサイクルである。 $V(K_{5,5}) = UVU$ とにおいて U, V から各1点ずつ頂点 u, v を除くと $\tilde{K}_{5,5}^* - \{u, v\}$ は $\tilde{K}_{4,4}^{(1)}$ になり $\tilde{K}_{4,4}^{(1)}$ には非自明な結び目は含まれていない。従って $\tilde{K}_{5,5}^*$ に非自明な結び目がふくまれるとすると長さ10のサイクルということになる。

(0) $\tilde{K}_{5,5}^*$ の10-サイクルのうちバインダー上の辺を1本も使わないものは各辺の長さが全て3か又は全て7のものである。

各辺の長さが全て3のもの [1 4 7 10 3 6 9 2 5 8]

各辺の長さが全て7のもの [1 8 5 2 9 6 3 10 7 4]

この2つのサイクルは同じサイクルである(むきは逆)。下図よりこのサイクルは三つ葉結び目である。

図 11

(64)

(1) バインダー上の辺を1つだけ使う長さ10のサイクル。バインダー上の1辺を12としても一般性を失わない。

表

図 12

従って $\tilde{K}_{5,5}^*$ に含まれる非自明な結び目はサイクル [1 4 7 10 3 6 9 2 5 8] の空間表現のみ。これを \tilde{C}_0 とおく。

もし $\omega \in TSG(\tilde{K}_{5,5}^*)$ なら

$f: K_{5,5} \rightarrow R^3$ を $f(K_{5,5}) = \tilde{K}_{5,5}^*$ となる埋め込みとして $h \cdot f = f \cdot \omega$ となる同相写像 $h \in \text{Homeo}(R^3)$ がある。そして $h \cdot f(C_0) = f \cdot \omega(C_0) = f(C_0) = \tilde{C}_0$ (as a set)

ゆえに $TSG(\tilde{K}_{5,5}^*) \subset TSG(\tilde{C}_0) \subset \text{Aut}(C_0) \cong D_{10}$

また $D'_{10} (\cong D_{10}) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{10} = \tau^2 = id., \sigma\tau\sigma = \tau \rangle$

ただし $\sigma = (123 \dots 910), \tau = (210)(39)(48)(57)$

とおくと、明らかに $\sigma \in TSG(\tilde{K}_{5,5}^*)$

また S_i を i 番目のシートとおくと $S_1 \longleftrightarrow S_1, S_2 \longleftrightarrow S_5, S_3 \longleftrightarrow S_4$ だから $\tilde{K}_{5,5}^*$ のシートの順は

$$\begin{array}{ccc}
[S_1 S_2 S_3 S_4 S_5] \supset \tilde{K}_{5,5}^* & & \\
\downarrow & & \downarrow \\
[S_1 S_5 S_4 S_3 S_2] \supset (\tilde{K}_{5,5}^*)! \text{ (mirror image)} & &
\end{array}$$

よって $\tau \in TSG(\tilde{K}_{5,5}^*)$ ゆえに $D'_{10} \subset TSG(\tilde{K}_{5,5}^*)$

以上より次の定理が得られた。

定理 3 $K_{5,5}$ の正規表現 $\tilde{K}_{5,5}^*$ に対し $TSG(\tilde{K}_{5,5}^*) \cong D_{10}$ である。

参考文献

- [B-K] F.Bernhart and P.C.Kainen : Book Thickness, J.Comb.Theory, Ser.B27 (1979) 320-331
- [E-O] Endo,T and Otsuki,T : Note on spatial representation of graphs, Hokkaido Math. J. XXXIII (1994) 383-398
- [I] 伊美典子 : 完全2部グラフ $K_{4,4}$ の最小シート数本表現について, 東女大修士論文 (1996)
- [N] C.Noda : Topological symmetry group of canonically embedded complete graphs, Master Thesis , Tokyo Woman's Christian University (1995)
- [O] T.Otsuki : Knots and links in certain spatial complete graphs, Master Thesis, Waseda Univ. (1994)
- [T] C.Toba : Topological symmetry group of spatial graphs, Master Thesis, Tokyo Woman's Christian University (1993)

(66)

\tilde{K}_7

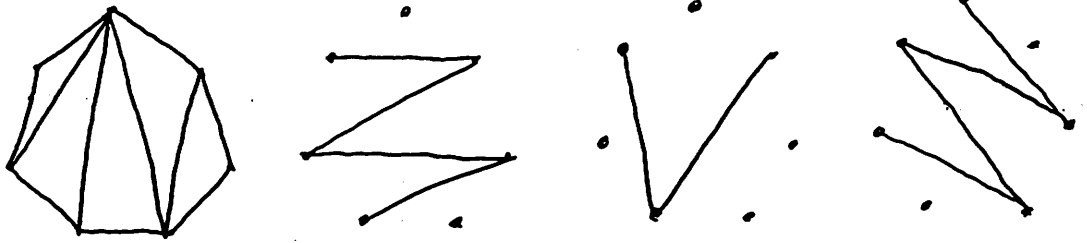


图 1.

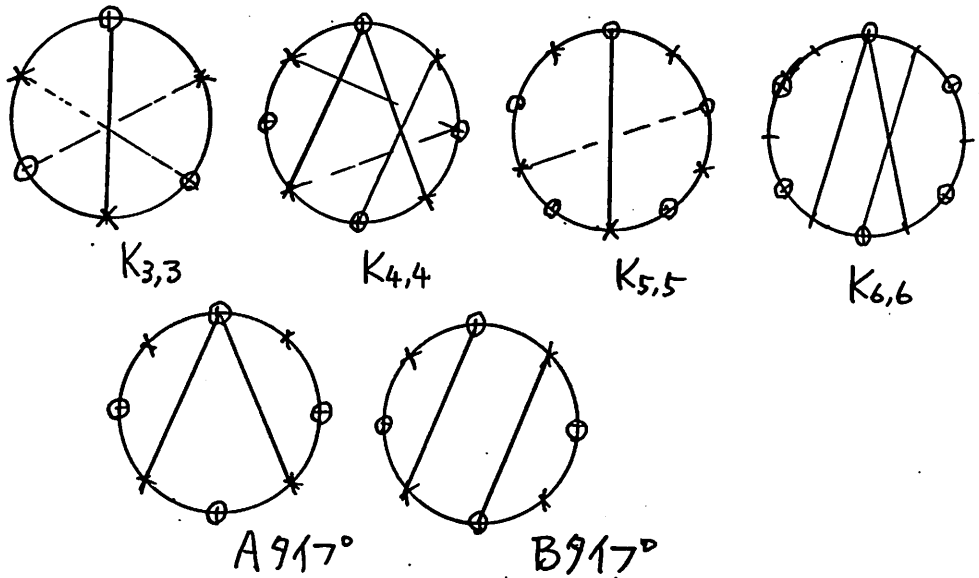


图 2

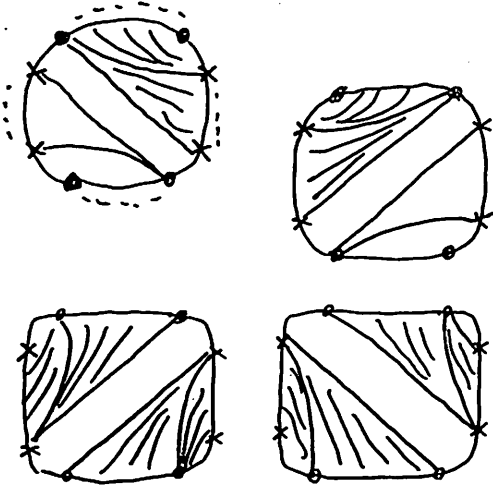


图 3

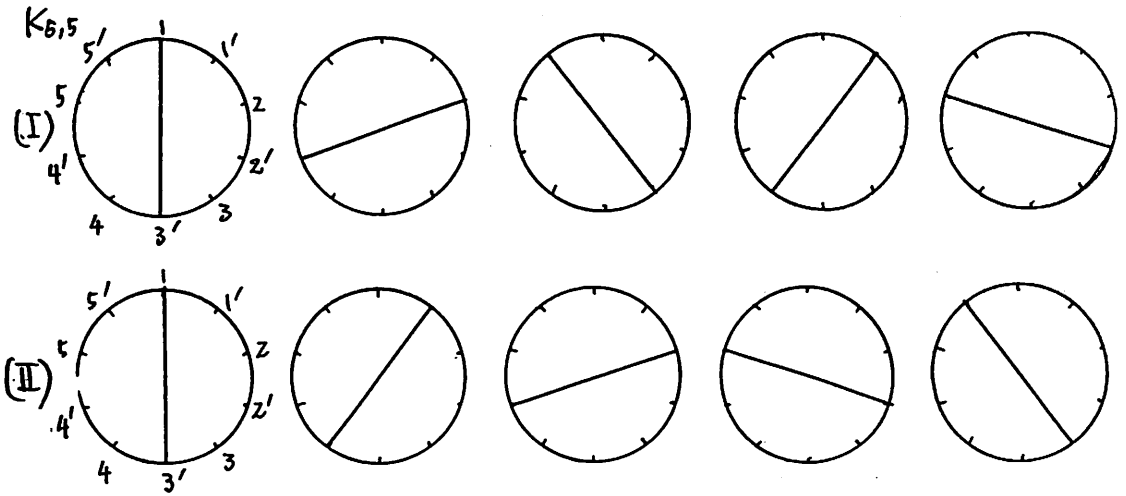
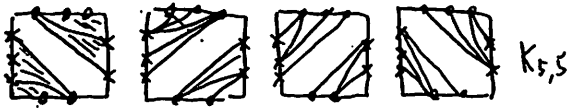
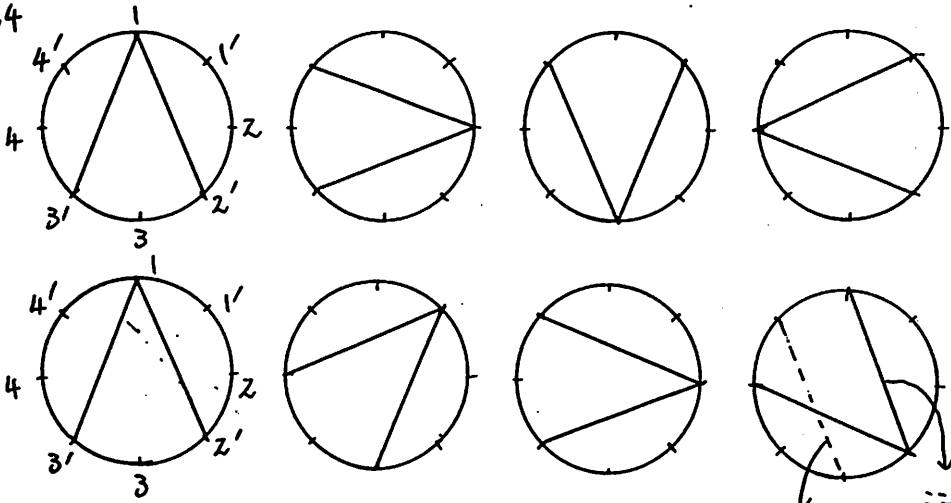


图 4
13

(68)

$K_{4,4}$



二が重複
二が有り. してしる.

図 5

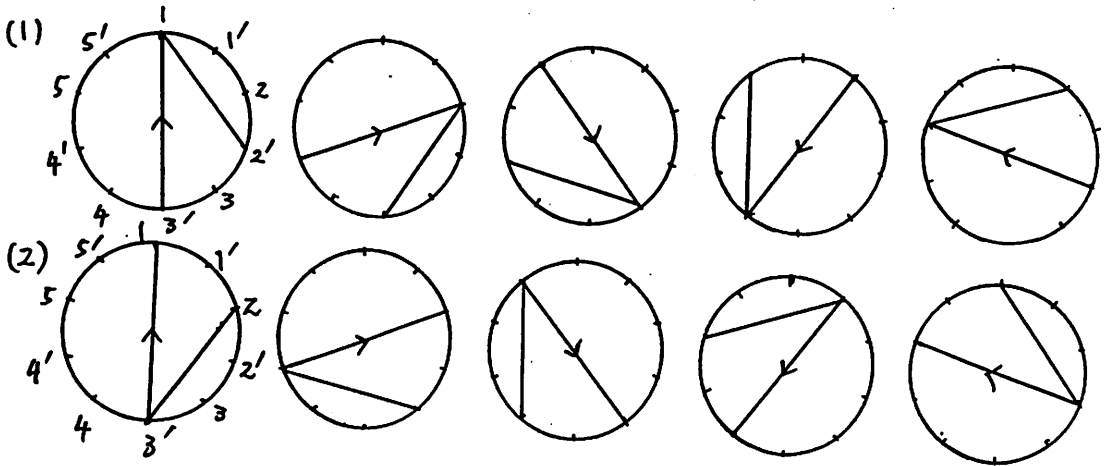


図 6

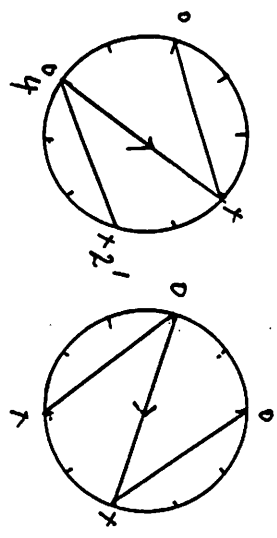
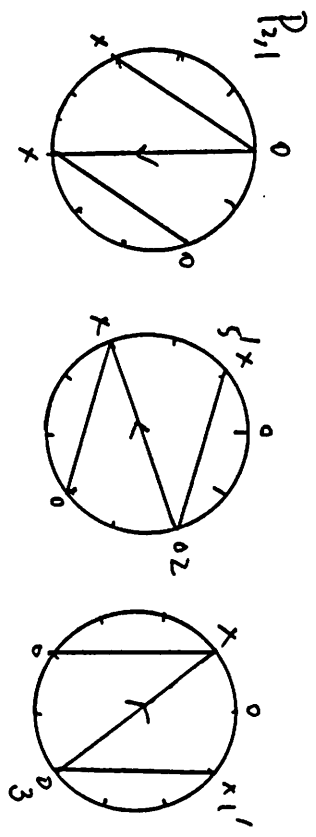
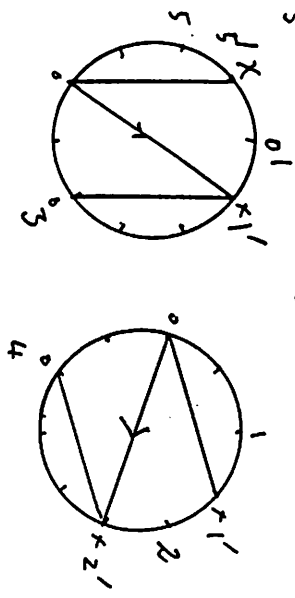
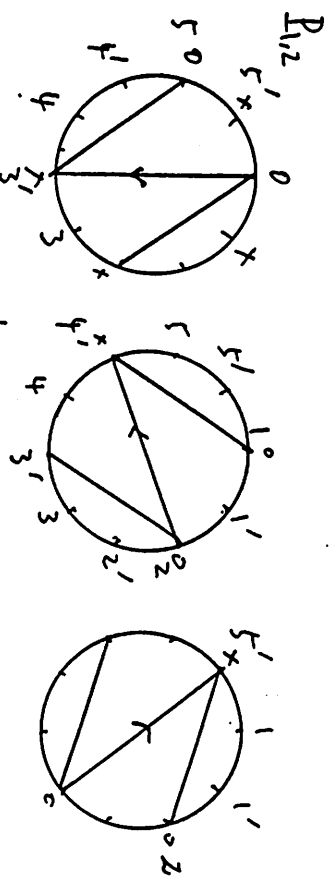


图 7

(70)

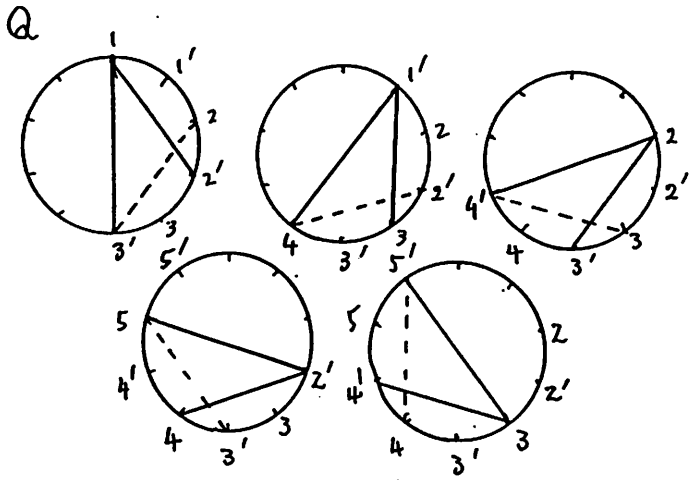


图 8

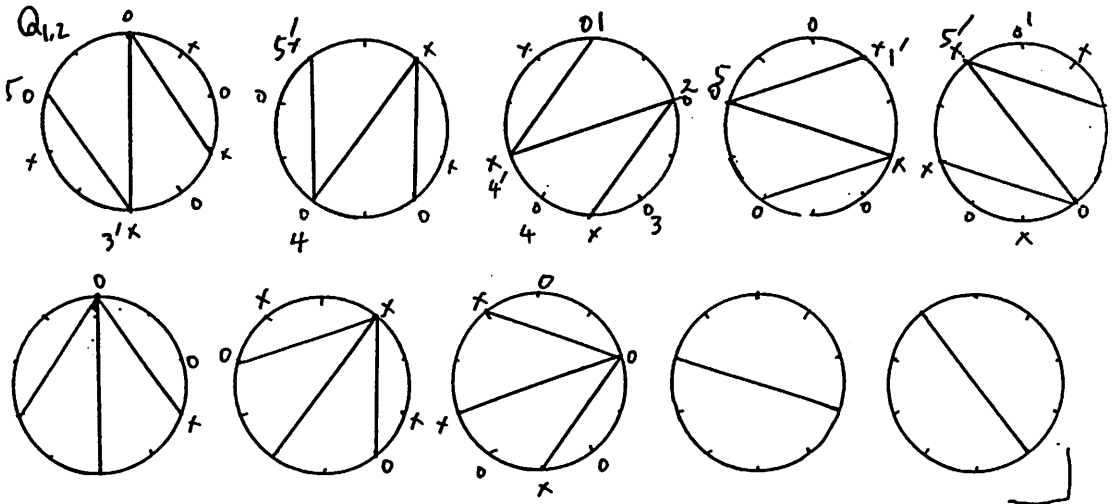


图 9. 16

$K_{5,5}$ の正規(I)パターン

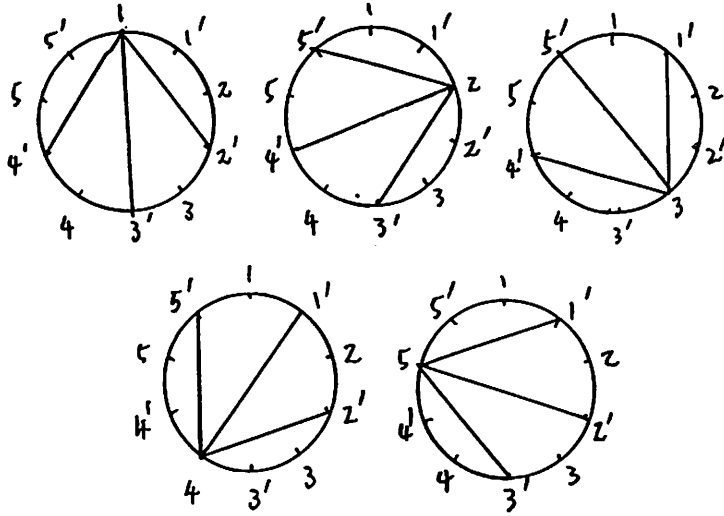
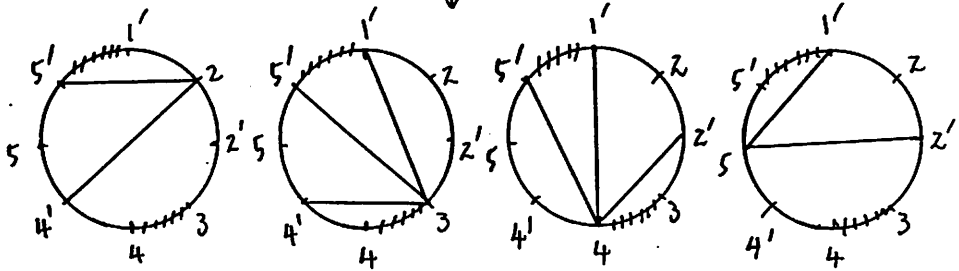
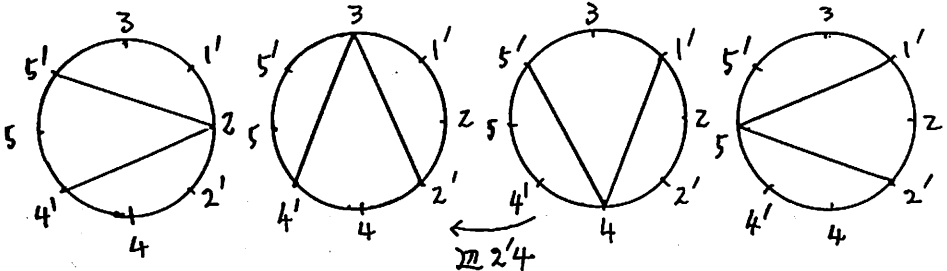


図10.

↓ 頂点 1, 3' を削除



≈ | 頂点 3 を 1' と 5' の間に amb. iso. で移動

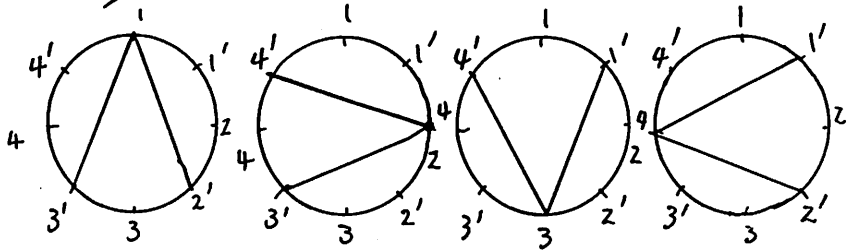


Aが17°が4枚のパターンであるがシート順序が異なる (参照 伊美論文) → しかし伊美に於ては amb. iso.

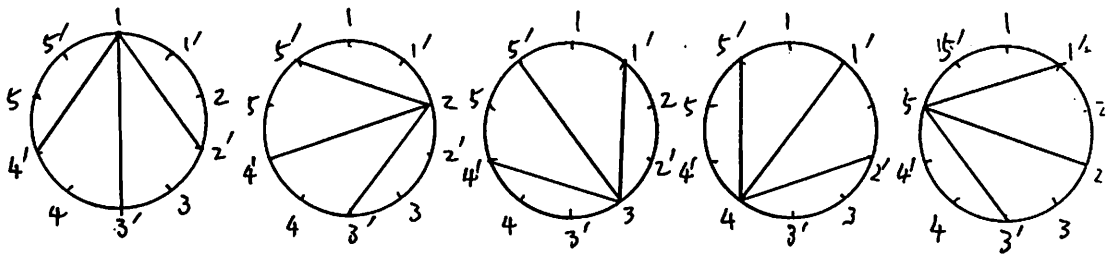
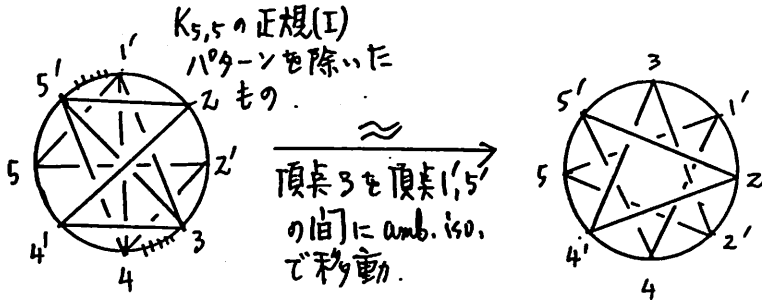
(72)

$K_{5,5}$ の正規パターン
から頂点 $5, 5'$ を

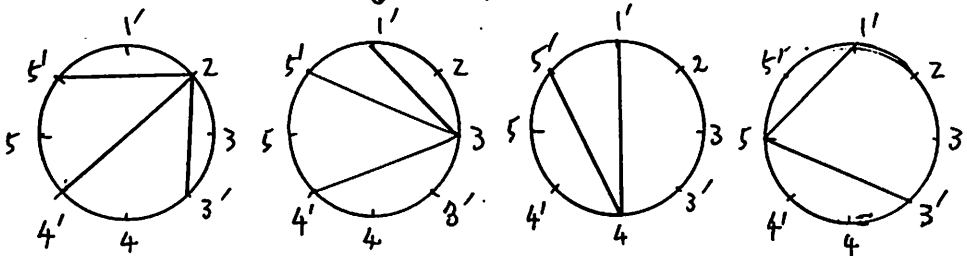
削除



$K_{4,4}$ の正規パターン (Aタイプ4枚が順序よく並んでいる).

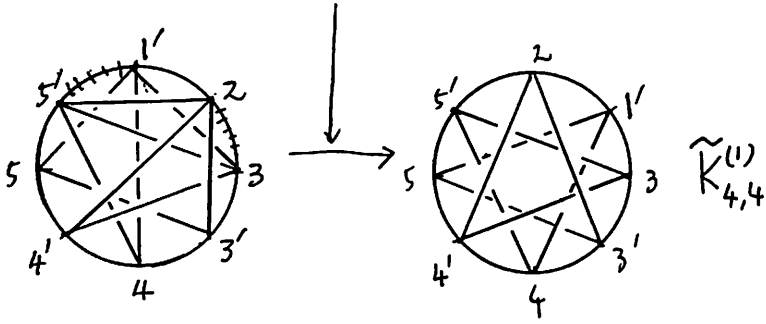


頂点 $1, 2'$ を削除



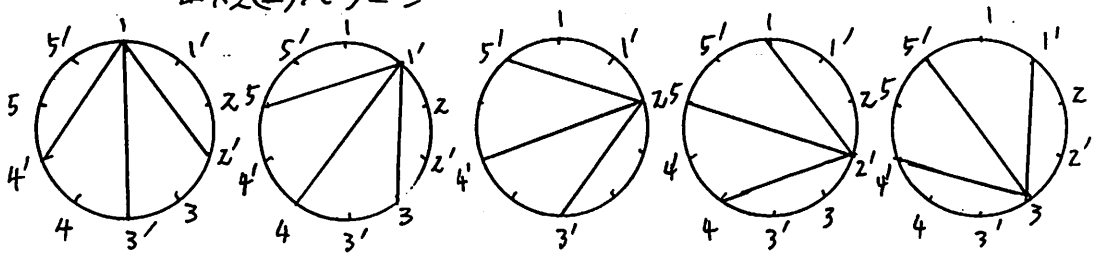
(73)

頂点 $1'$ を 2 と 3 の間に amb. isotopy で動かす

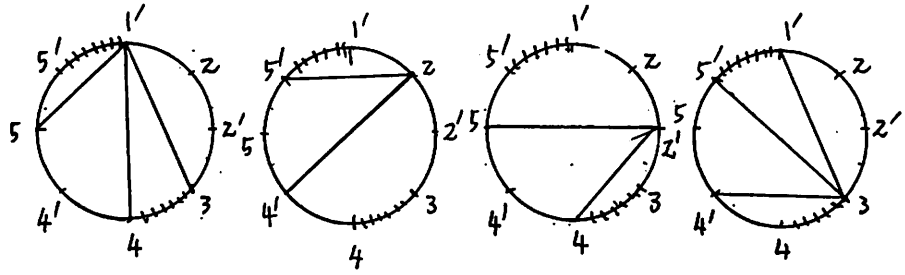


(74)

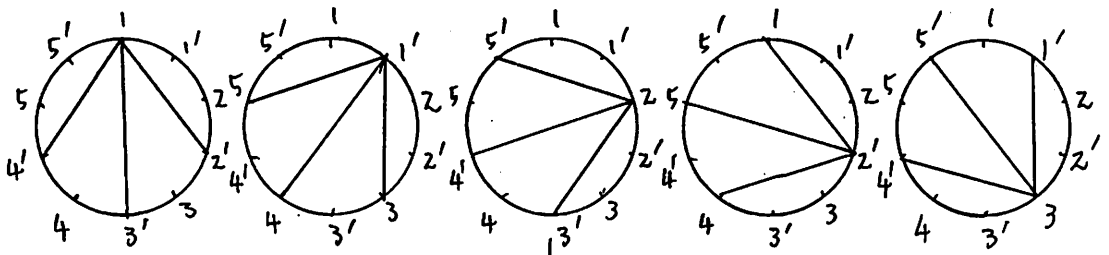
正規(II)八⁰9-₂



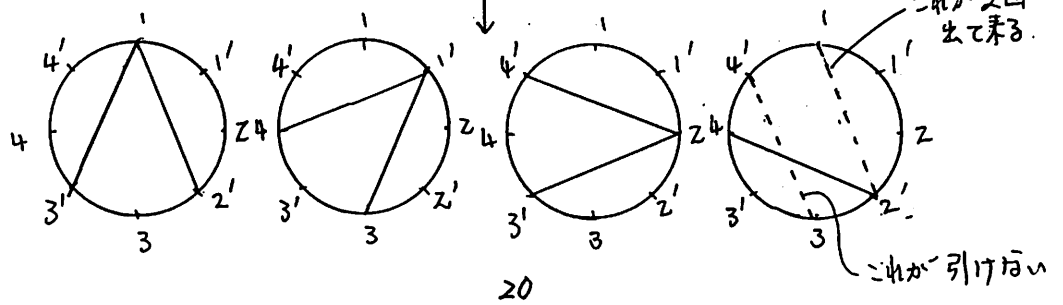
↓ 頂点 1, 3' を削除.



↓ 頂点 3 を頂点 1' と 5' の間に
amb. iso. で移動 (→ 出来ない)



↓ 頂点 5, 5' を削除.



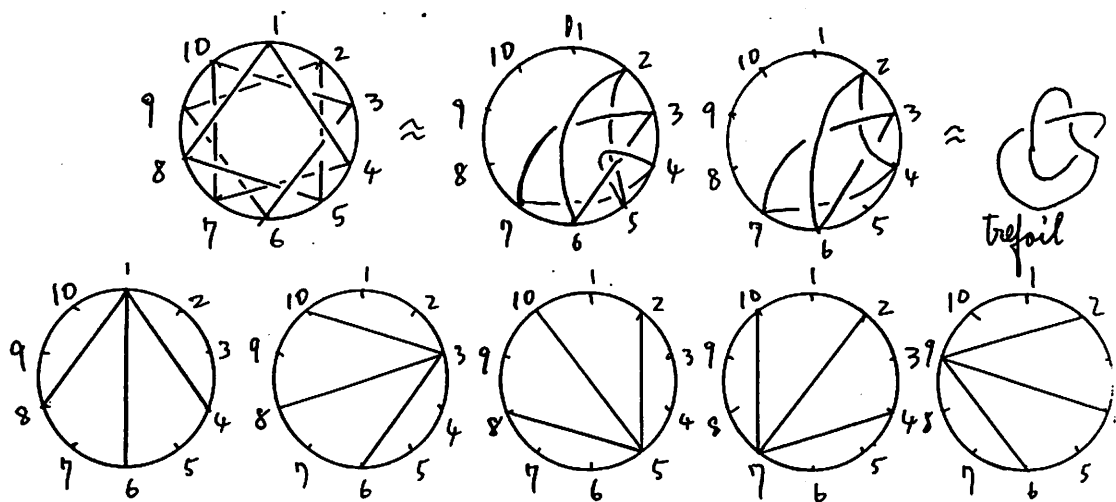
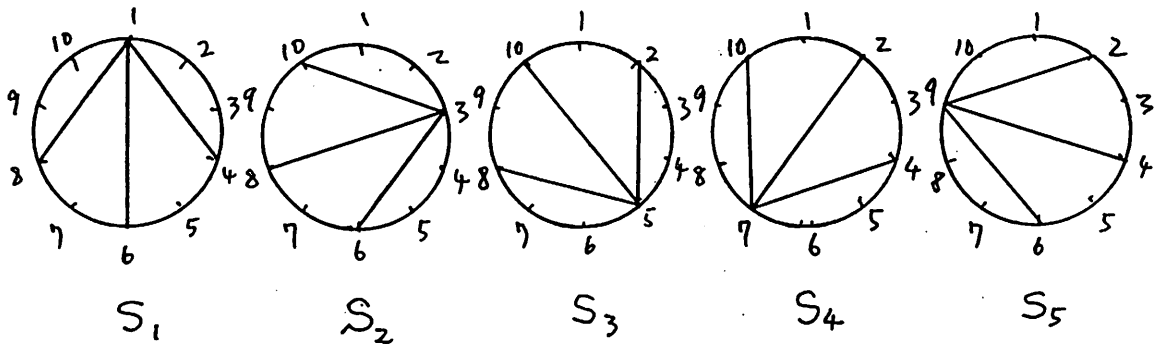
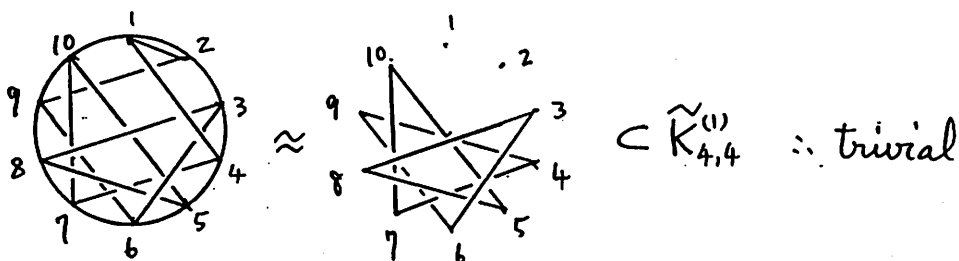


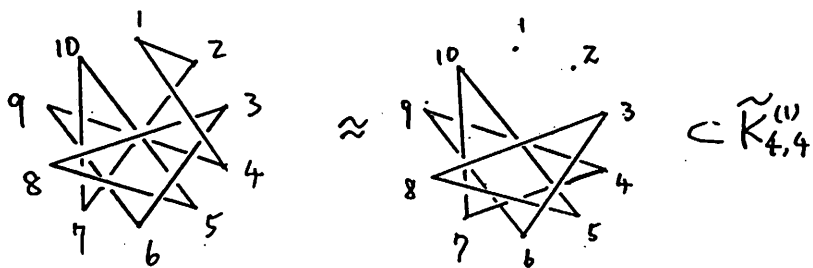
图 11



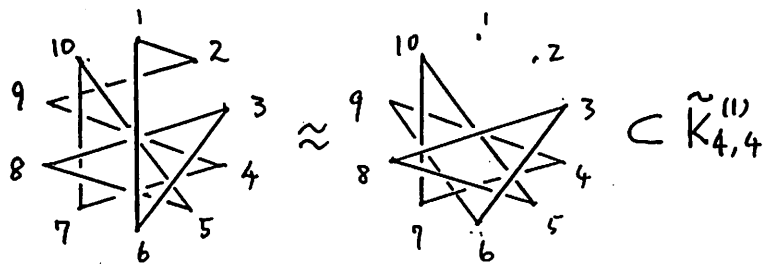
サイクル [14710583692]



サイクル [14963851072]



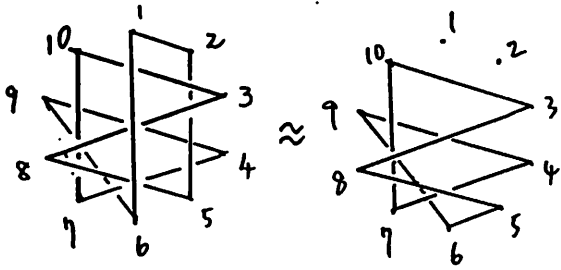
サイクル [16385107492]



□ 12

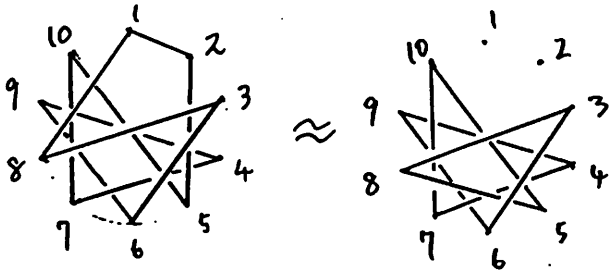
(78)

#1クル [16947103852]



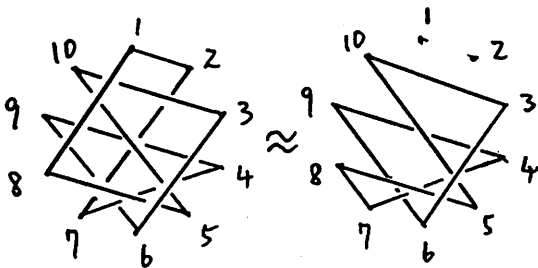
$\subset \tilde{K}_{4,4}^{(1)}$
 \therefore trivial knot

#1クル [18369471052]



$\subset \tilde{K}_{4,4}^{(0)}$
 \therefore trivial knot.

#1クル [18510369472]



$\subset \tilde{K}_{4,4}^{(0)}$
 \therefore trivial knot.

12