箱根セミナ記録 9 5 (1995) 29-47.

Adaptability of graphs

Kazuaki Kobayashi
Department of Mathematics, College of Arts and Sciences
Tokyo Woman's Christian University

1 序文

この論文は樹下 [K1] によって提案され、鈴木 [S3] によって命名されたグラフの順応性 (adaptability) について、それらを一般化したものである。以下グラフとしては特に断らない限り有限、連結グラフを扱うこととする。

2 一般論

定義 1 G をグラフとする。このとき以下の記号を使う。
$\alpha(G) :=$ G に含まれるサイクルの総数
$\beta(G) := rank H_1(G : Z)$
$\Gamma_k(G) :=$ グラフ G の全ての k-サイクルの集合
$\Gamma(G) :=$ G に含まれる全てのサイクルの集合 $\Gamma(G) = \bigcup_k \Gamma_k(G)$

定義 2 G をグラフとし、$C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ を G 上のサイクルの集合（全てのサイクルとは限らない）とする。G が C に関して順応性がある *(adaptable)* とは任意に与えられた n 個の結び目型の集合 $K = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$ に対して k_i と $f(c_i)$ がアンビエント・イソト

ピックとなるような埋め込み $f: G \to R^3$ （またはS^3）があることである。
$\exists embedding\ f: G \to R^3$ （またはS^3） $s.t.\ f(c_i) \approx k_i$
特に G が $C = \Gamma(G)$ に関し順応性があるとき、単に G は順応性があるともいう。

定義 3 G をグラフとし、$C = \{c_1, c_2, ..., c_p, c'_1, c'_2, \ldots, c'_q\}$ を G 上のサイクルの集合（全てのサイクルとは限らない）とする。G が C に関して*(p,q)*タイプの半順応性 *(pseudo adaptable)*がある とは任意に与えられた p 個の結び目型の集合 $K = \{k_1, k_2, ..., k_p\}$ と q 個の自明な結び目に対して $f(c_i)$ と $k_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ がアンビエント・イソトピック, $f(c'_j)\ (j = 1, 2, \ldots, q)$ が自明な結び目となるような埋め込み $f: G \to R^3$ （またはS^3）があることである。
$\exists embedding\ f: G \to R^3$ （またはS^3） $s.t.\ f(c_i) \approx k_i\ (i = 1, 2, \ldots, p)\ f(c'_j) \approx \bigcirc\ (j = 1, 2, \ldots, q)$

命題 1 *(1)* $\alpha(G) \geq \beta(G)$
(2) $\beta(G) = 1 - |V(G)| + |E(G)| = |E(G)| - |E(T_G)|$
ここで T_G は G の極大木

例 1 $G = \theta_n$ のとき $\alpha(\theta_n) = n(n-1)/2$ 　　　 $\beta(\theta_n) = n - 1$

例 2 $G = K_n$ （n 頂点完全グラフ）のとき
$\beta(K_n) = rank H_1(K_n : Z) = 1 - |V(K_n)| + |E(K_n)| = (n-1)(n-2)/2$
次に K_n に含まれる k-サイクルの個数は
${}_nC_k \cdot {}_k\Pi_k \cdot (1/2) = (n!/((n-k)!k!)) \cdot (k-1)!1/2 = n!/(2k(n-k)!)$
よって $\alpha(K_n) = \sum_{k=3}^{n} n!/(2k(n-k)!)$

命題 2 **(樹下 [K1])** θ_nグラフは $\Gamma(\theta_n)$ に関して順応性を持つ。

命題 3 (山本[Y]) G をグラフとし、 $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ を G 上のサイクルの集合とする。各 c_i は続いている3つの辺 e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} を含み、かつ e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} は唯1つのサイクル c_i に含まれるとする。サイクル $c_1, c_2, ..., c_n$ の全ての像が自明な結び目であるような G の R^3 (又は S^3) への埋め込みがあるなら G は C に関し順応性を持つ。

系 3.1 4頂点完全グラフ K_4 は $\Gamma(K_4)$ に関し順応性をもつ。

順応性において実現すべき集合をサイクルの集合から部分グラフの集合に拡張したのが次の定義である。

定義 4 G をグラフとし、$S = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ を G の部分グラフの集合とする。n 個の任意の空間表現の集合 $\tilde{S} = \{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, ..., \tilde{H}_n\}$ が与えられて、$f(H_i) \approx \tilde{H}_i$ となるような G の埋め込み $f : G \to R^3$ (又は S^3) があるとき G は S に関し順応性がある(を持つ)(*adaptable*) という。

命題 4 (樹下 [K2]) $\tilde{S} = \{\widetilde{K}_{2,n}^{(1)}, ..., \widetilde{K}_{2,n}^{(p)}\}$ $(p = m(m\text{-}1)/2)$ を p 個の完全2部グラフ $K_{2,n}$ の空間表現の集合とする。完全2部グラフ $K_{m,n}$ は p 個の完全2部グラフ $K_{2,n}$ を部分グラフとして含む。これを $S = \{K_{2,n}^{(1)}, ..., K_{2,n}^{(p)}\}$ とおく。$K_{m,n}$ は S に関し順応性がある。

次にサイクルの集合に関する順応性について、もう少し詳しく述べる。

注 1 (Conway-Gordon の定理 [C-G]) より $n \geq 7$ のとき 完全グラフ K_n は $\Gamma(K_n)$ に関し順応性がない。

命題 5 (谷山 [T]) $G = K_5$ 又は $K_{3,3}$ のとき G は $\Gamma(G)$ に関し順応性がない。

系 5.1 任意の非平面的グラフ G において G は $\Gamma(G)$ に関し順応性がない。

命題 6 (命題3の系) *(1)* 完全グラフ K_n $(n \geq 4)$ は $\Gamma_3(K_n) \cup \Gamma_4(K_n)$ に関し順応性をもつ。
(2) 完全グラフ K_5 は $\Gamma_3(K_5) \cup \Gamma_5(K_5)$ に関し順応性をもつ

証明。(1) K_n において $\Gamma_3(K_n) \cup \Gamma_4(K_n)$ は命題3の連続3辺に関する条件を満たしている。
(2) K_5 において $\Gamma_3(K_5) \cup \Gamma_5(K_5)$ は命題3の連続3辺の条件を満たしている。

下図のように 4-cycle c_4=[2345] と 5-cycle c_5=[12345] があり、道(2345)を共有しているとき、c_4上に結び目k_1を載せ、c_5上に結び目k_2を載せるには辺(34)上にk_1#k_2の標準形を作り、k_1は辺(25)を忘れると自明な結び目に、k_2は辺(12)を忘れると自明な結び目になるように辺(12),(25)上で交差点の上下をつける。また辺(15),(25)を利用するときもある。

図 1

このようなとき辺(34)はサイクル c_4, c_5 の特異辺 (singular edge), 辺(23)(または(45))を連結道 (connecting path)、辺(12),(25)(または(15))を情報辺 (information edge) という。連結道は1つの辺からなるとは限らないから道という。山本 [Y] の連続3辺 e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} は e_{i2} が特異辺、e_{i1}, e_{i3} が情報辺、連結道は空集合の場合であると考えられる。1つのサイクル上に特異辺は1辺、連結道は無いか、1本か2本、情報辺は1辺か2辺ある。

補助定理 1 グラフ G 上のサイクルの集合 $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ において、任意の $c_i \in C$ の特異辺と情報辺の全てが他の $c_j \in C$(i $\neq j$)に含まれなければ G は C に関し順応性がある。

証明。山本 [Y] の補助定理 2.4 と同様である。

注 2 あるサイクルc_1の特異辺と情報辺が連続する３辺を成しているときは、特異辺と情報辺２辺のうちの１辺合せて２辺を含む他のサイクルc_2があってもc_1上の結び目型はc_2に影響を及ぼさないが、特異辺と情報辺が連結道によって結ばれているちき即ち特異辺と情報辺が離れているときは特異辺と情報辺を含む他のサイクルc_2があるとc_1上の結び目型は一般にc_2に影響を及ぼす。

系 1.1 グラフG上のサイクルの集合Cに含まれるどのサイクルc_iにおいてもCの他のどのサイクルにも含まれない２辺を持てばGはCに関し順応性をもつ。

証明。c_i上の２辺e_{i_1}, e_{i_2}が他のどのサイクル$c_j \in C$にも含まれなければe_{i_1}を特異辺、e_{i_2}を情報辺とする。e_{i_1}とe_{i_2}がc_i上で隣接していなければ連結道(１本または２本) を使ってe_{i_1}の端点とe_{i_2}の端点を結べばよい。

定義 5 Gを平面的グラフとし$f: G \to R^2$を埋め込みとする。$R^2 - f(G)$の各成分R_iの閉包$\overline{R_i}$が閉円盤のときfは閉円盤的埋め込みといい、閉円盤的埋め込みを持つグラフGを強平面的グラフ*(strongly planar graph)*という。下図のグラフは平面的グラフであるが、強平面的グラフではない。

図　2

注 3 平面的グラフGが強平面的グラフである必要十分条件はGが切断頂点も切断辺も持たないことである。

定義 6 グラフGに対し次の性質を持つグラフHを考える。

1)Hは半ハミルトングラフである。

2)HはGを部分グラフとして持つ。

3)HとGの頂点集合は一致する。$V(H) = V(G)$

4)Hは上の性質1)〜3)の性質を持っているグラフのうち $|E(H)| - |E(G)|$が最小のものである。

このときHをGを含む極小半ハミルトングラフという。

命題 7 任意のグラフ G に対し、$H_1(G:Z)$ の基になるサイクルの集合 $C=\{c_1,c_2,...,c_p\}$ $(p=\beta(G))$ であって、C に関し G が順応性をもつようなものがある。

証明。T_GをGの極大木とする。命題1より$\beta(G)=|E(G)|-|E(T_G)|$である。辺$e_i\in E(G)-E(T_G)$の両端をT_G上で結ぶ道f_iは唯一つ存在し$c_i=e_i\cup_\partial f_i$とおくとc_iはサイクルとなる。e_iを特異辺としf_i上でe_iと隣接している2辺（c_iが2ーサイクルのときは1辺）を情報辺とすれば$C=\{c_1,\ldots,c_p\}$は補助定理1の条件を満足し、従ってGはCに関し順応性を持つ。□

3　5頂点完全グラフ K_5 の順応性

命題5によって K_5 は $\Gamma(K_5)$ に関し順応性がないことがわかっているので以下では $\Gamma(K_5)$ の部分集合でどれほど多くを取り出して、それに関して K_5が順応性を持つことが出来るかを調べる。

注 4 K_5 上には *3-cycle* が　$5!/(2\cdot3\cdot2!)=10$ 個
4-cycle が　$5!/(8(5-4)!)=15$ 個
5-cycle が　$5!/(2\cdot5\cdot0!)=12$ 個ある。

図　3

K_5を図3のように描き頂点番号をつける。
3ー、4ー、5ーサイクルを次のように決める。
$c_1=[123]$, $c_2=[124]$, $c_3=[125]$, $c_4=[234]$, $c_5=[134]$, $c_6=[345]$, $c_7=[452]$,
$c_8=[451]$, $c_9=[235]$, $c_{10}=[153]$
$d_1=[1235]$, $d_2=[1253]$, $d_3=[1245]$, $d_4=[1254]$, $d_5=[1234]$, $d_6=[1243]$,
$d_7=[3415]$, $d_8=[3451]$, $d_9=[3425]$, $d_{10}=[3452]$, $d_{11}=[4532]$, $d_{12}=[4531]$,
$d_{13}=[2315]$, $d_{14}=[1324]$, $d_{15}=[1524]$

$a_1 = [12345]$, $a_2 = [12354]$, $a_3 = [12435]$, $a_4 = [12453]$, $a_5 = [12534]$, $a_6 = [12543]$, $a_7 = [34152]$, $a_8 = [34251]$, $a_9 = [45132]$, $a_{10} = [45231]$

4ーサイクル d_i の特異辺を以下のようにきめ、情報辺は各サイクル上その特異辺の両側の隣接２辺とする。
$d_1 \sim d_6 : (12)$, $d_7 \sim d_{10} : (34)$, $d_{11}, d_{12} : (45)$, $d_{13}, d_{14} : (23)$, $d_{15} : (15)$
すると a_8, a_{11}, a_{12} はどの４ーサイクルの特異辺、情報辺からなる連続３辺も含まない。しかし a_8, a_{11}, a_{12} の連続３辺からなる特異辺、情報辺をどのように決めてもそれを含む４ーサイクルが必ず存在する。このことから次の命題が示せた。

命題 8 K_5 はサイクルの集合 $\Gamma_3(K_5) \cup \Gamma_4(K_5) \cup \{a_8, a_{11}, a_{12}\}$ に対し *(25,3)* タイプの半順応性を持つ。

4 ４本スポーク車輪グラフ (4 spokes wheel graph) の順応性

４本スポーク車輪グラフ (図 4) を W とおき、図のように頂点に番号をつける。W は平面的グラフ (planar graph) である。また $\beta(G) = rank H_1(W : Z) = 4$ である。

図　4

命題 9 W に含まれるサイクルは以下の通り。

3ーサイクル 4個	$c_1 = [125]$, $c_2 = [235]$, $c_3 = [345]$, $c_4 = [415]$
4ーサイクル 5個	$d_1 = [1234]$, $d_2=[1254]$, $d_3=[2345]$, $d_4=[1235]$, $d_5=[1534]$
5ーサイクル 4個	$a_1 = [15234]$, $a_2 = [15432]$, $a_3 = [14532]$, $a_4 = [12534]$

図　5

例 3 連続３辺の取り方の例

３－サイクルに関しては一意的
４－サイクルに関しては右図参照。　　図　6
５－サイクルに関しては右図参照。

命題 10 *(1)* ３－サイクルに関しては連続３辺の取り方は一意
(2) ４－サイクルd_1の特異辺、情報辺をどのように取っても少なくとも一つそれらを含む５－サイクルが存在する。そしてそのような５－サイクルが唯１つであると出来るような特異辺、情報辺の取り方がある。d_1以外の４－サイクルでは適当に連続３辺をとるとその連続３辺を含む４－、５－サイクルがないように出来る。
(3) 各５－サイクルでは適当に連続３辺を取るとそれら３辺を含む４－、５－サイクルがないように出来る。

系 10.1 W は $\Gamma_3(W) \cup (\Gamma_4(W) - \{d_1\}) \cup \Gamma_5(W)$ に関し順応性をもつ。

系 10.2 次のタイプの集合に関し W は順応性をもつ。ここで k_i は任意の結び目型、○は自明な結び目型

(1) $\{k_1, k_2, k_3, k_4, \bigcirc, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}\}$
従ってＷは $\{\Gamma_3(W) \cup (\Gamma_4(W) - \{d_1\}) \cup \Gamma_5(W), d_1\}$ に関し(12,1)タイプの半順応性を持つ。
(2) $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}\}$
(3) $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_5 \sharp k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13}\}$
(4) $\{k_1, \ldots, k_{12}, k_{13}\}$ の中の１つとはコボルダントな集合、従って例えば $\{k_1, \ldots, k_{12}, k'_{13}\}$ で k_{13} と k'_{13}はコボルダント

問題1。n 本スポーク車輪グラフの順応性についてしらべよ。

注 5 最近 安原 (*[YS]*) によって4本スポーク車輪グラフが順応性を持つことが示された。

5 グラフ G の m 重グラフ $G^{[m]}$ の順応性

以下では多重辺があると順応性が上がるのか、下がるのか、又は変わらないのかを調べる。

定義 7 G を単純グラフとする。G の全ての辺を m 重辺に変えたグラフを $G^{[m]}$ とかき、Gの m-重グラフ *(m-multiple graph)* という。また C をサイクルの集合としたとき、C に含まれるサイクルを構成している G の辺全てを m 重辺にしたものを $C^{[m]}$ とかき、C の m 重という。

以下で単純グラフ G があるサイクルの集合 C に関し順応性をもつとき $G^{[m]}$ は $C^{[m]}$ に関して順応性をもつかを調べる。

命題 11 n 頂点完全グラフ K_n の m 重グラフ $K_n^{[m]}$ のサイクルの集合
先ず $K_n^{[m]}$ の k-サイクルの個数 $|\Gamma_k(K_n^{[m]})|$ は
$|\Gamma_k(K_n^{[m]})| = |\Gamma_k(K_n)| \cdot m^k = n!m^k/(2k(n-k)!)$ $(k \geq 3)$
$|\Gamma_2(K_n^{[m]})| = |E(K_n)| \cdot {}_mC_2 = (n(n-1)/2) \cdot (m(m-1)/2)$
ゆえに $|\Gamma(K_n^{[m]})| = (n(n-1)/2) \cdot (m(m-1)/2) + \sum_{k=3}^{n} n!m^k/(2k(n-k)!)$

例 4　3頂点完全グラフ K_3 の mー重グラフ $K_3^{[m]}$ について
$\Gamma(K_3^{[m]})$ は補助定理1の条件をみたすので $K_3^{[m]}$ は $\Gamma(K_3^{[m]})$ に関し順応性をもつ。

例 5　4頂点完全グラフ K_4 の m-重グラフ $K_4^{[m]}$ について
$\Gamma(K_4^{[m]})$ は補助定理1の条件をみたさないので K_4 は $\Gamma(K_4)$ に関し順応性を持つが $K_4^{[m]}$ は $\Gamma(K_4^{[m]})$ に関し順応性をもつとは限らない。

注 6　上の例のように一般に G がサイクルの集合 C に関して順応性をもっていても $G^{[m]}$ が $C^{[m]}$ に関して順応性をもつとは限らない。

以下で kーサイクルグラフ Z_k の m 重グラフ $Z_k^{[m]}$ の順応性について述べる。

命題 12　Z_k を kーサイクルグラフとし、$Z_k^{[m]}$ を Z_k の m 重グラフとすると
$\alpha(Z_k) = \beta(Z_k) = 1$
$\alpha(Z_k^{[m]}) = {}_m C_2 \times k + m^k = \frac{m\cdot(m-1)\cdot k}{2} + m^k$
$\beta(Z_k^{[m]}) = (m-1)\cdot k + 1$

Z_k において連続 l 本 $(l \leq k)$ の辺のみを m 重辺にしたグラフを $Z_{k,l}^{[m]}$ とかくことにする。したがって $Z_{k,k}^{[m]} = Z_k^{[m]}$

例 6　$Z_{k,3}^{[m]}$ は $\Gamma(Z_{k,3}^{[m]})$ に関し順応性をもつ。

$$|\Gamma(Z_{k,3}^{[m]})| = |\Gamma_2(Z_{k,3}^{[m]})| + |\Gamma_k(Z_{k,3}^{[m]})| = {}_mC_2 \times 3 + m^3$$

このとき　$\beta(Z_k^{[m]}) < |\Gamma(Z_{k,3}^{[m]})| < \alpha(Z_k^{[m]})$

更に $\gamma = |\Gamma(Z_{k,3}^{[m]})|$ とおくと $Z_k^{[m]}$ は γ 個のサイクルを適当に取った集合 C に対し順応性を持つ。

6 順応性をもつことが出来るサイクルの集合の位数について

Cをグラフ G 上のサイクルの集合とし、G は C に関し順応性をもつとする。このとき
$\gamma(G) = \max_c\{|C|\}$ とおく。

注 7 命題 7 を使うと $\beta(G) \leq \gamma(G) \leq \alpha(G)$ である。

注 8 命題 5 とその系より G が非平面的グラフのとき $\gamma(G) < \alpha(G)$ である。従って $\beta(G) < \alpha(G)$ である。

例 7 $\beta(G) = \gamma(G) = \alpha(G)$ となる例。

図 7

命題 13 $\alpha(G) = \beta(G)$ となる必要十分条件は異なる任意の 2 つのサイクルの交わりが空集合か 1 頂点である。

注 9 グラフ G が切断頂点も切断辺も持たなければ $\beta(G) < \alpha(G)$ である。

例 8 $G=K_n\ (n \geq 5)$ は $\beta(G) < \gamma(G) < \alpha(G)$ となる例である。

例 9 $G=K_4$, θ_n, $Z_{k,3}^{[m]}$ (例6参照), K_4の任意の隣接2辺以外の4本の辺をm重にしたグラフ、$K_4 \cdot K_4$ (図8)、$K_4 \dagger K_4$ (図8) は$\beta(G) < \gamma(G) = \alpha(G)$ となる例である。

図 8

注 10 2つのK_4を2辺でつないだグラフ、2頂点でつないだグラフは命題3の連続3辺の条件を満たさない (図9)。

図 9

命題 14 $\beta(G) < \alpha(G)$ ならば$\beta(G) < \gamma(G)$ である。

証明。T_GをGの極大木とする。命題1より$\beta(G) = |E(G)| - |E(T_G)|$である。命題7の証明と同様にして辺$e_i \in E(G) - E(T_G)$の両端を$T_G$上で道$f_i$によって結び$c_i = e_i \cup f_i$とおくとGは$C_0 = \{c_1, \ldots, c_p\}$ $(p = \beta(G))$に関し順応性を持った（命題7）。このときc_iの特異辺はe_iでありf_i上でe_iに隣接する2辺（または1辺）が情報辺であった。$\beta(G) < \alpha(G)$だから$E(G) - E(T_G)$に2辺e_{k_1}, e_{k_2}がありe_{k_1}, e_{k_2}の両端を結ぶ道f_{k_1}, f_{k_2} (e_{k_1}とe_{k_2}が隣接しているときは道は1本）があって$c_k = e_{k_1} \cup e_{k_2} \cup f_{k_1} \cup f_{k_2}$がサイクルとなるものがある。$e_{k_1}$を特異辺、$e_{k_2}$を情報辺としその間を結ぶ連結道を$f_{k_1}, f_{k_2}$とする。もし$e_{k_1}$のみを含むサイクル$c_k$, 及び$e_{k_2}$のみを含むサイクル$c'_k$の情報辺が$c_k^{(2)}$に含まれてしまうときは$E(c_k) - E(c_k^{(2)}), E(c'_k) - E(c_k^{(2)})$に含まれている辺を各々$c_k, c'_k$の情報辺とする。するとGは$C = C_0 \cup \{c_k^{(2)}$に関し順応性を持つ。$|C| = \beta(G) + 1$だから $\beta(G) < \gamma(G)$ □

命題 15 T_GをグラフGの極大木とする。C_kを$E(G)-E(T_G)$の元を丁度k本含んで作られるGのサイクル$c_i^{(k)}$の集合とする。またS_3をC_3の部分集合で次の性質を持つ$c_i^{(k)}$の全てからなるものとする。

性質：$c_i^{(3)}$は1つの$c_j^{(2)}$に含まれる$e_{j_1}, e_{j_2} (\in E(G)-E(T_G))$をともに含んではいない。または$c_i^{(3)}$は1つの$c_j^{(2)}$に含まれる$e_{j_1}, e_{j_2}$をともに含んでいるが$e_{j_1}$と$e_{j_2}$が隣接していて1本の連結道$f_j$をその$c_i^{(3)}$は含んでいない。
このとき$C_1 \cup C_2 \cup S_3$の全ての元を自明な結び目とするGからR^3への埋め込みがあるなら$\gamma(G) \geq |C_1 \cup C_2 \cup S_3|$　である。

注 11 $|C_1| = \beta(G)$, $|C_k| \leq \binom{p}{k}$ $(p = \beta(G))$

証明。$c_i^{(k)} = e_{i_1} \cup e_{i_2} \cup \cdots \cup e_{i_k} \cup f_{i_1} \cup \cdots \cup f_{i_k}$とおく。ここで$e_{i_k} \in E(G)-E(T_G)$であり、$f_{i_j}$は$T_G$上で$\{e_{i_j}\}$の端点を結ぶ道であり、$\{e_{i_j}\}$の中に隣接しているものがあれば$\{f_{i_j}\}$の本数は減る。$E(c_i^{(1)})-E(c_j^{(2)}) \neq \phi$, $E(c_i^{(1)})-E(c_j^{(3)}) \neq \phi$だから　$c_i^{(1)} = e_i \cup f_i$ $(e_i \in E(G)-E(T_G))$とおいたときe_iを$c_i^{(1)}$ の特異辺、$E(f_i) \cap (E(c_i^{(1)}) - E(c_j^{(2)}))$かつ$E(f_i) \cap (E(c_i^{(1)}) - E(c_j^{(3)}))$の辺を$c_i^{(1)}$の情報辺とする。$c_i^{(2)} = e_{i_1} \cup e_{i_2} \cup f_{i_1} \cup f_{i_2}$においては$e_{i_1}$を特異辺、$e_{i_2}$を情報辺とし、$f_{i_1}, f_{i_2}$を連結道とする。$c_j^{(3)} = e_{j_1} \cup e_{j_2} \cup e_{j_3} \cup f_{j_1} \cup f_{j_2} \cup f_{j_3}$　ではe_{j_1}を特異辺、e_{j_2}を情報辺とする。$c_j^{(3)} \in S_3$だから、このe_{j_1}とe_{j_2}が同じ$c_l^{(2)}$に含まれることはない。従ってGは$C_1 \cup C_2 \cup S_3$に関し順応性を持つ。

例 10 $G=\theta_n$のとき$|C_1| = \beta(G) = n-1$
$|C_2| = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $C_k = \phi$ $(k \geq 3)$
そして$|C_1 \cup C_2| = \frac{n(n-1)}{2} = \gamma(G) = \alpha(G)$

例 11 $G=K_4$のとき$|C_1|=3, |C_2| = \binom{3}{2} = 3$, $|S_3| = |C_3| = 1$，$\gamma(G) = \alpha(G) = |C_1 \cup C_2 \cup S_3| = 7$

例 12 $G{=}K_5$のとき$|C_1| = 6, |C_2| = 14$　一方K_5は$\gamma_3(K_5) \cup \gamma_4(K_5)$に関し順応性を持つから$\gamma(G) \geq 25$

注 12 $E(G) - E(T_G)$の元を丁度1つ含むサイクルは必ず1つ存在する．$E(G) - E(T_G)$ の2元が隣接していれば，それを含むサイクルは丁度1つ必ず存在する．$E(G) - E(T_G)$ の2元e_1, e_2が隣接していないとき，$T_G \cup \{e_1, e_2\}$が2ー連結ならe_1, e_2 を含むGのサイクルが丁度1つ必ず存在する．$E(G) - E(T_G)$の3元が連続3辺をなしているとき，この3元を含むサイクルが丁度1つ必ずある．2辺e_1, e_2が隣接しておりe_3が$e_1 \cup e_2$と隣接していないときは$T_G \cup \{e_1, e_2, e_3\}$が2連結であれば，この3辺を含むサイクルがただ1つ存在する．3辺e_1, e_2, e_3がどの2辺も隣接していないとき，$T_G \cup \{e_1, e_2, e_3\}$が3連結なら，この3辺を含むサイクルがただ1つ存在する．

7　グラフの変形に関する順応性の遺伝について

命題 16　(細分) グラフ G が G 上のサイクルの集合 C に対し順応性を持てば G の細分 G' は C' に対し順応性を持つ。ここで C' は C に含まれるサイクルを細分して得られる G' 上のサイクルの集合である。

命題 17　(辺の除去) グラフ G 上のサイクルの集合 C が補助定理1の条件をみたすとき G の辺 e に対し $G - \{e\}$ は $C - \{e\}$ に関し順応性をもつ。

証明。$C{-}\{e\}$ が $G{-}\{e\}$ において補助定理1の条件をみたすことを示せばよい。$c_i \in C{-}\{e\}$ を取り、c_i の特異辺 s_i, 情報辺 t_{ij} (j = 1 または j = 1,2) とする。$\{s_i, t_{ij}\}$ が$c_j \in C - \{e\}$ に含まれるなら $c_i, c_j \in C$ だから C が補助定理1の条件をみたすことに矛盾。

命題 18　(辺の縮約)。グラフ G 上のサイクルの集合 C が補助定理1の条件をみたすなら Gの辺 e に対し G/e は C/e に関し順応性をもつ。

証明。e がループのときは明らか。e がループでないとする。C/e が G/e において補助定理 1 の条件をみたすことを示せばよい。

参考文献

[C-G] Conway,J.H. and Gordon,C.McA. : Knots and links in spatial graph, J. Graph Theory 7 (1983) 445 – 453

[K1] Kinosita,S. : On θ_n curves in R^3 and their constituent knots, Topology and Computor Scince, Kinokuniya (1987) 211 – 216

[K2] __________ : On spatial bipartite $K_{m,n}$'s and their constituent $K_{2,n}$'s, Kobe J. Math. 8 (1991) 41 – 46

[K-S] Kohara,T. and Suzuki,S : Some remarks on knots and links in spatial graphs, Knot 90, Walter de Gruiter & Co., (1992) 435 – 444

[S1] Suzuki,S. : 空間グラフ上の結び目と絡み目，早大教育学部学術研究（数学編） 37 (1988) 17 – 29

[S2] _______ : ____________________ II, 早大教育学術研究（数学編） 38 (1989) 21 – 28

[S3] _______ : 結び目理論入門， サイエンス社 (1991)

[T] Taniyama,K. : Edge homotopy and vertex homotopy of graphs in R^3, Art of Low Dimentional Topology (1995) 42 – 45

[Y] Yamamoto,M : Knots in spatial embeddings of the complete graph on four vertices, Topology and its appl. 36 (1990) 291 – 298

[YS] Yasuhara, A. :Adaptability of graphs and certain canonical representation of knots via delta-unknotting operation, preprint

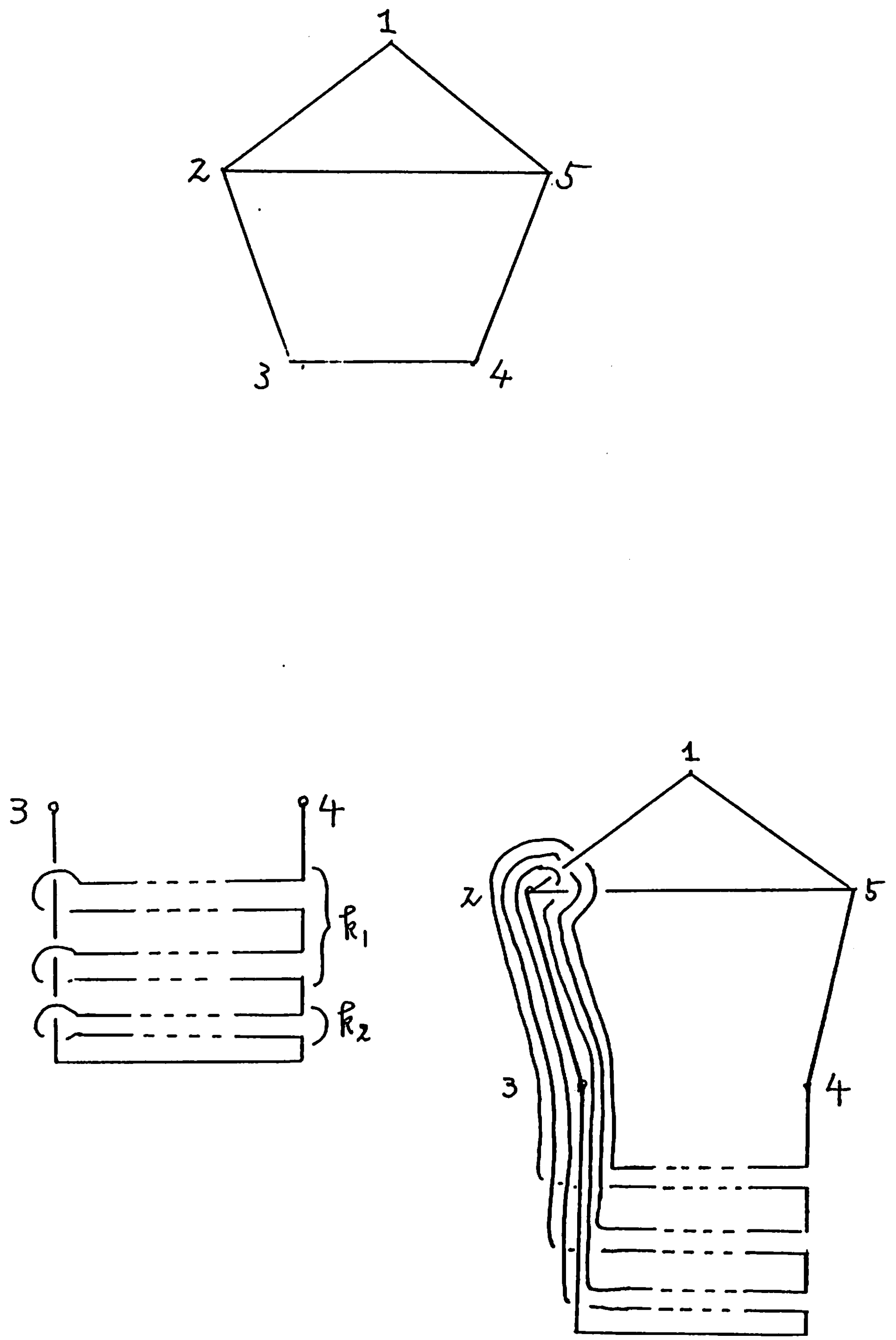

図 1

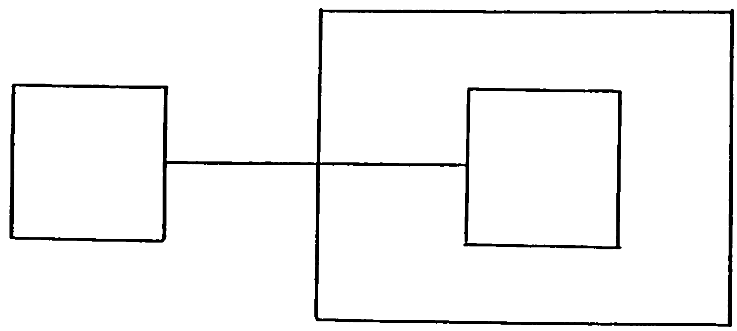

図 2

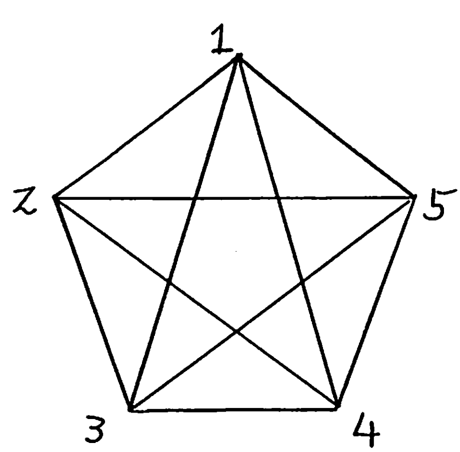

図 3

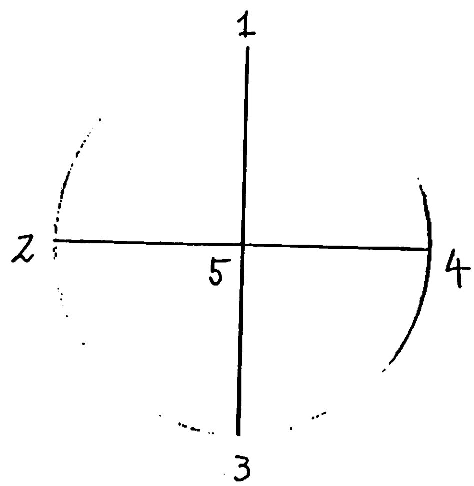

图 4

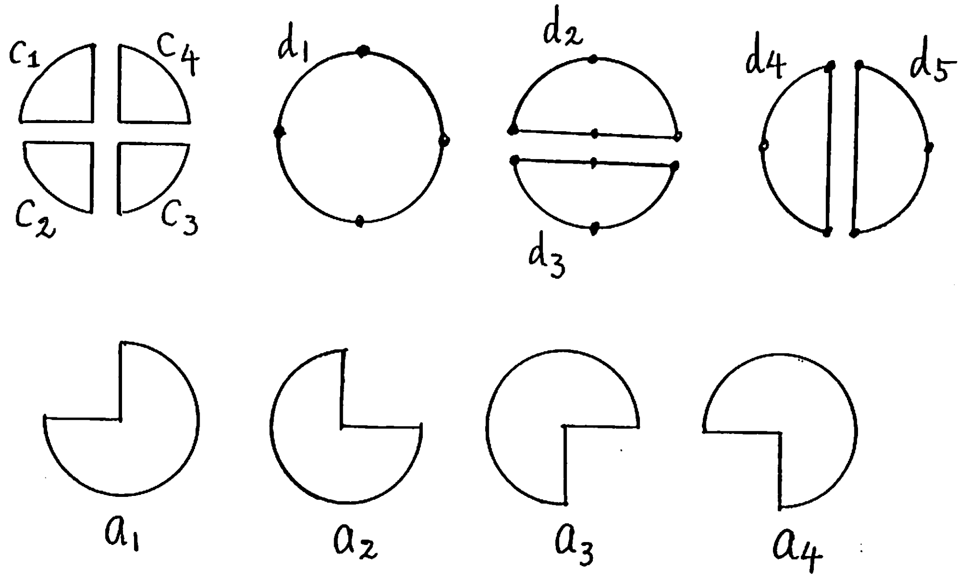

图 5

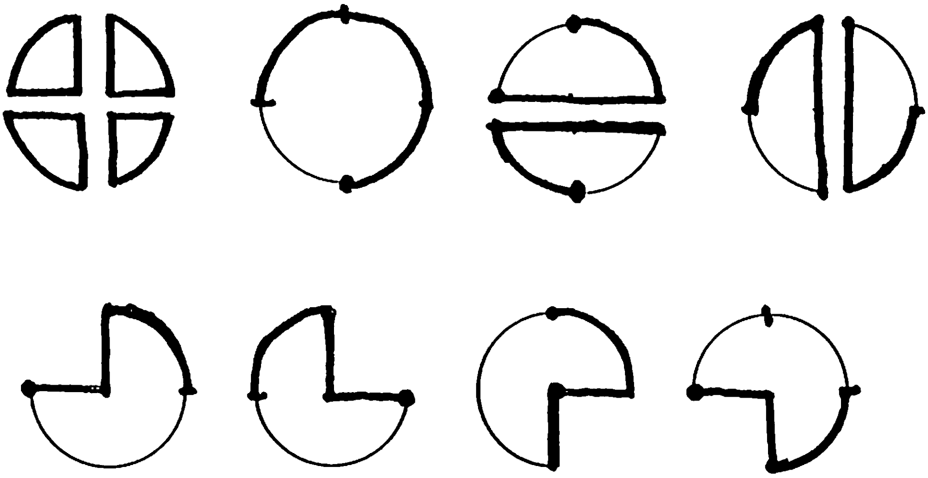

図 6

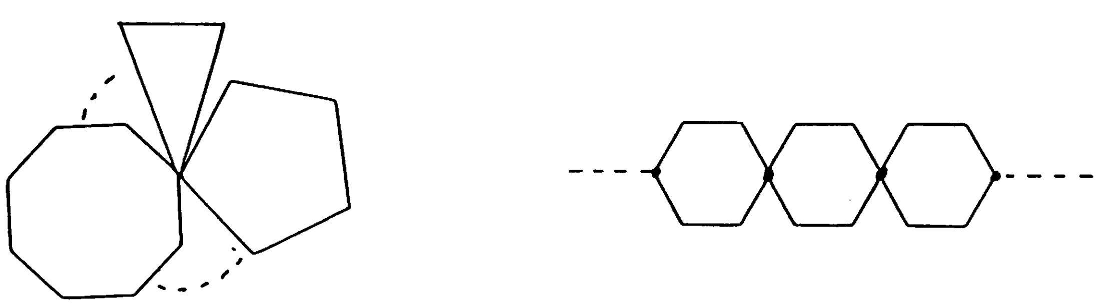

図 7