箱根セミナ記録 ９４(1994)39-48.

A proposal for standardness of spatial graphs

東女大文理　小林一章

この論文で我々は有限グラフの標準的な空間表現(空間グラフ)の候補になり得るものを2つ提案する しかしその定義が「標準的」であるにふさわしいか否かを示す諸性質については未だ殆んど証明されていない．いわば「標準的」であろうという直観に基づいたものであることを最初にお断わりしておく．その直観を支えているものは円周，円周塵，平面的グラフ，半ハミルトングラフ等に対して定義された「標準的」空間表現の定義を拡張しているかということと，それらの持っている諸性質を引継いでいるかということである．

以下特に断わらない限りグラフは有限，単純，連結とし次数2以下の頂点も持たないものとする(これらの条件は標準的空間グラフを考える場合に本質的でないグラフを排除するためのものである)．

定義1　Gを半ハミルトングラフとし，B_pをp枚のシートをもつ本とする．ΞをB_pをバインダーとし，ΔをGの1つのハミルトル道とする．埋め込み$\varphi: G \longrightarrow B_p$が$\Delta$に関する本表現(B.P.H.$\Delta$)であるとは次の条件をみたすときをいう．

(1) $\varphi(\Delta) \subset \Xi$

(2) ${}^{\forall}e \in E(G)$に対し${}^{\exists_1}S_i \in B_p$ (シート) $\ni \varphi(e) \subset S_i$

定義2.　Gをグラフとし，B_pをp枚のシートをもつ本とする ΞをB_pのバインダーとする　埋め込み$\psi: G \longrightarrow B_p$が本表であるとは次の条件をみたすときをいう

(1) $\psi(V(G)) \subset \Xi$

(2) $^{\forall} e \in E(G)$ に対し $^{\exists 1} S_i \in \mathcal{B}_p$ (シート) $\ni \psi(e) \subset S_i$.
(ハミルトン道に関する条件がないことに注意).

定義3. 空間グラフ $\tilde{G}^*$ がグラフ G の 0-standard 空間グラフであるとは，最小シート数をもつ G の本表現 $\psi: G \longrightarrow \mathcal{B}_p$ があって $\tilde{G}^*$ と $\psi(G)$ がアンビエント・イソトピックになることである.

命題1. 任意の単純，連結な有限グラフ G に対し G の 0-standard 空間グラフ $\tilde{G}^*$ がある

問題1. G が半ハミルトングラフで $\tilde{G}^*$ が G の 0-standard 空間グラフのとき G のあるハミルトン道 Δ に関する本表現 φ があって $\tilde{G}^*$ と $\varphi(G)$ がアンビエント・イソトピックとなるか.

問題2. $\tilde{G}^*$ がグラフ G の 0-standard 空間グラフのとき $\pi_1(S^3 - \tilde{G}^*)$ は自由群となるか.

命題2. 完全グラフ K_n に対し上の問題1は正しい. 従って完全グラフに関しては問題2も成り立つ.

証明. $\psi: K_n \longrightarrow \mathcal{B}_p$ を最小シート数をもつ本表現とする. $\psi(K_n)$ をバインダー β 上左から順に番号をつける. 任意の辺 e に対し $\psi(e)$ を含むシートは唯一枚だから完全グラフ K_n の特長より β 上で隣接している頂点 v_i と v_{i+1} を結ぶ辺 e_i が必らず存在し，$\psi(e_i)$ を含むシート S_j の中でバインダー β に対し $\psi(e_i)$ は innermost である. そこで $\psi(e_i)$ をアンビエント・イソトピーで動かして β 上に移すことが出来る. すると道 $v_1 v_2 \cdots v_n$ はハミルトン道 Δ であり ψ は Δ に関する本表現でありシート数が最小の $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ であることは明らか □

注. 上の命題2を一般の半ハミルトングラフ G におきかえたとき，$\psi: G \longrightarrow \mathcal{B}_p$ が最小シート数をもつ本表現でバインダー

$\ominus$上で$\psi(V(G))$を左側から番号づけたとき（それを$v_1, v_2, \cdots, v_n$とおく）ハミルトン道$\Delta = v_1 v_2 \cdots v_n$があれば上と同じ議論が出来る

定義4. $\mathcal{B}_p = \ominus \cup \bigcup_{i=1}^{p} S_i$ をp枚のシートをもつ本とし，同相写像

$h_\sigma : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ は次の条件を満足するとする

1) $h_\sigma|\ominus = id$

2) $h_\sigma(S_i) = S_{\sigma(i)}$　ここで$\sigma : \{1, 2, \cdots, p\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, p\}$
は集合$\{1, 2, \cdots, p\}$上の置換である。

このときh_σを$\mathcal{B}_p$のシート変換という。

問題3. $\tilde{G}^*$をグラフGのO-standard空間グラフとしたとき，$\tilde{G}^*$はシート変換と3次元球面内のアンビエント・イソトピーを除いて一意か。

次にもう一つの標準的な空間グラフの概念を導入する。

定義5. グラフGに対し次の性質をもつグラフHを考える。

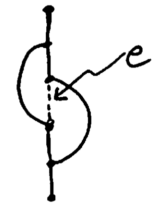
1) Hは半ハミルトングラフである。
2) HはGを部分グラフとして含む。
3) HとGの頂点集合は一致する。　$V(H) = V(G)$。
4). Hは上の(1)～(3)の性質をもっているグラフのうち
　　$|E(H)| - |E(G)|$が最小のものである。

このときHをGに対する極小半ハミルトングラフ（minimal pseudo H-graph with respect to G）という。

注. Gに対し極小半ハミルトングラフH_Gは同形の範囲内で一意には決まらない。またGが元来半ハミルトングラフなら$H = G$である

定義6. グラフGに対し，極小半ハミルトングラフを取り，それをH_Gとかく．Δ_HをH_Gのハミルトン道とする．このとき最小シート数をもつΔ_Hに関するH_Gの本表現 $\psi:(H,\Delta)\longrightarrow(B_p,\Xi)$を取り，$\psi(G)$とアンビエント・イソトピックな$G$の空間表現$\tilde{G}^*$を$G$のK-standard空間グラフという．

例.



注 Gが半ハミルトングラフでなくHがGの極小半ハミルトングラフで $H=G\cup\{e\}$ のときHに2つ以上のH-pathがあるときがある

注. 定義5及び6よりK-standardという概念は明らかに半ハミルトングラフの場合のstandard空間グラフの拡張になっている．一方O-standardの方は完全グラフ以外のグラフに対しては拡張になっているか否か今の所不明（問題1及び命題2参照）．

注. K-standard空間グラフに対しても命題1と同様のことが成り立つ．

問題4. K-standardとO-standardとは一致するか

命題3. 完全グラフK_nに対してはK-standardとO-standardは一致する

証明 命題2によって完全グラフK_nに対してはO-standardは今迄のstandardに一致する．一方半ハミルトングラフに対してはK-standardとstandardは一致するから結局完全グラフに関してはO-standard, K-standard,（半ハミルトングラフに対する）standardはアンビエント・イソトピーの範囲で一致する □

命題4. グラフGの極大木(maximal tree)をT_Gとすると

$$\mathrm{rank}\,H_1(G:\mathbb{Z})=|E(G)|-|E(T_G)|$$

証明 Gは連結だから $\mathrm{rank}\,H_1(G:\mathbb{Z})=1-|V(G)|+|E(G)|$

また　$1-\mathrm{rank}\,H_1(T_G;\mathbb{Z})=|V(T_G)|-|E(T_G)|$

で　$\mathrm{rank}\,H_1(T_G;\mathbb{Z})=0$　かつ　$V(T_G)=V(G)$

よって　$1=|V(T_G)|-|E(T_G)|=|V(G)|-|E(T_G)|$

$\therefore\ |V(G)|=1+|E(T_G)|$

$$\therefore\ \mathrm{rank}\,H_1(G;\mathbb{Z})=1-(1+|E(T_G)|)+|E(G)|$$
$$=|E(G)|-|E(T_G)|. \qquad \square$$

系．完全２部グラフ $K_{n,n-2}$ に対する極小半ハミルトングラフを H とすると

$$\mathrm{rank}\,H_1(H;\mathbb{Z})=\mathrm{rank}\,H_1(K_{n,n-2};\mathbb{Z})+1$$

証明．$K_{n,n-2}$ は半ハミルトングラフでないから

$|E(H)|-|E(K_{n,n-2})|\geqq 1$.

しかも $K_{n,n-2}$ に1本の辺を加えて半ハミルトングラフに出来るので

$|E(H)|-|E(K_{n,n-2})|=1$.

そこで　$H=K_{n,n-2}\cup\{e\}$　とおくと．$e\in E(H)$ で $e\notin T_{K_{n,n-2}}$ ($K_{n,n-2}$ の1つの極大木)であり　$V(K_{n,n-2})=V(H)$．だから $T_{K_{n,n-2}}$ を H の極大木と考えることが出来る　これを $T_H(=T_{K_{n,n-2}})$ とおく．　従って　$e\notin E(T_H)$.

そこで命題4より

$$\mathrm{rank}\,H_1(H;\mathbb{Z})=|E(H)|-|E(T_H)|$$
$$=(|E(K_{n,n-2})|+1)-|E(T_{K_{n,n-2}})|$$
$$=\mathrm{rank}\,H_1(K_{n,n-2};\mathbb{Z})+1 \qquad \square$$

上の系の拡張として次の命題5が証明出来る．

命題5．グラフ G の極小半ハミルトングラフを H とし

$H=G\cup\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$ とおくと．

$$\mathrm{rank}\,H_1(H;\mathbb{Z})=\mathrm{rank}\,H_1(G;\mathbb{Z})+p.$$

証明．G の1つの極大木を T_G とおくと $V(H)=V(G)$ より T_G は H の極大木でもある　そこでそれを $T_H(=T_G)$ とかくと $e_i\notin T_H$ であり，命題4より

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\, H_1(H:\mathbb{Z}) &= |E(H)| - |E(T_H)| = |E(G)| + p - |E(T_H)| \\ &= |E(G)| + p - |E(T_G)| = \mathrm{rank}\, H_1(G:\mathbb{Z}) + p \qquad \square\end{aligned}$$

定義7 グラフGの極大木をT_Gとおく
$E(G) - E(T_G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ とし各e_iの両頂点をT_Gの中で結んだ道をf_iとおく。 $c_i = e_i \cup f_i$ とおくと $\{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ は $H_1(G:\mathbb{Z})$ の基となっている。この基 $B = \{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ を極大木T_Gに関し適正に取られた基という 勿論この基は極大木T_Gの取り方に依存している

定義8. グラフGの極小半ハミルトングラフをHとする. Hの極大木として得られたハミルトン道Δ_Hを取り, $H_1(H:\mathbb{Z})$の基としてΔ_Hに関し適正に取られた基を取る. この基を $B_{\Delta_H} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\beta\}$ ($\beta = \mathrm{rank}\, H_1(H:\mathbb{Z})$) とおく 次に$H_1(G:\mathbb{Z})$の($B_{\Delta_H}$から導かれる)基として,次のような極大木$T_G$を定めてそれに関し適正に取られた基を取る
T_Gの定め方. $E(\Delta_H) \cap E(G)$に含まれる全ての辺はT_Gに含まれるとする. Δ_Hに関するHの最小シート数をもつ本表現 $\varphi: H \longrightarrow B_p$ を取ると $E(\Delta_H) \cap E(G)$に含まれる全ての辺のφによる像は全てB_pのバインダー上にある. これらの辺の集合 $\{\varphi(e)\}$ を $\{\varphi(e)\} = \square_1 \cup \square_2 \cup \cdots \cup \square_\ell$ (非交和) とおく. ここで$\square_j$は連結成分とする $E(G)$の元のφによる像が異なる$\square_i$と$\square_j$を結び且つB_pのあるシートにおいてinnermostなもの$\alpha_1, \cdots, \alpha_g$を取る. すると $\bigcup_i \square_i \cup \bigcup_j \alpha_j$ は $\varphi(G)$の極大木となるので これに対応するGの部分をT_Gとおく このT_GをφによるGの指定された極大木という

命題6. グラフGの辺集合$E(G)$の部分集合Fに対し, Fに含まれる全ての辺で構成されるGの部分グラフG_1(連結とは限らない)がサイクルを含まない(即ち$H_1(G_1:\mathbb{Z}) = 0$)ならG_1を含むGの極大木T_Gがある

証明 $E(G)-F$ の元を次々とFに加えていく. $e_i \in E(G)-F$ として
$F_1 = F\cup\{e_1\}$, $F_2 = F_1\cup\{e_2\}$, $\cdots$, $F_{k-1} = F_{k-2}\cup\{e_{k-1}\}$.
ただし e_i を加えることにより F_i がサイクルを含むことになるなら e_i は加えないこととする.
そこで $F_k = F_{k-1}\cup\{e_k\} = F\cup\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ はサイクルを含まず ${}^{\forall}e\in E(G)-F_k$ に対し $F_k\cup\{e\}$ はサイクルを含むなら F_k は極大木である. 即ち $F_k = T_G$. □

§. 完全2部グラフ $K_{n,n-2}$ について

命題7 (高羽) 完全n部グラフ $K_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ $(m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n)$ が半ハミルトングラフである必要十分条件は

$$m_1 \leqq \sum_{i=2}^{n} m_i + 1 \quad \text{である}$$ ♩

上の命題により完全2部グラフ $K_{n,n-2}$ は半ハミルトングラフでないグラフのうち最も考えやすいグラフであろうと思われる.
Hを$K_{n,n-2}$の極小半ハミルトングラフとすると $|E(H)|-|E(K_{n,n-1})|=1$ である.
$V(K_{n,n-2}) = U\cup V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}\cup\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}\}$ とおく
$K_{n,n-2}$ の対称性から $u_1, u_2, \cdots, u_n$ のうちのどれかの2頂点 u_i, u_j を辺eで結べば $H := K_{n,n-2}\cup\{e\}$ は半ハミルトングラフになる.
そこで便宜上辺eは頂点 u_{n-1} と u_n を結んでいるとする. また $K_{n,n-2}$ の極大木 $T = \bigcup_{i=1}^{n-2} u_i v_i \cup \bigcup_{j=1}^{n-2} v_j u_{j+1} \cup v_{n-2}u_n$ を1つ固定

しておく. , $H = K_{n,n-2}\cup\{e\}$, $\partial u = \{u_{n-1}, u_n\}$

命題8. $n \geqq 5$ のとき $K_{n,n-2}$ は $K_{3,3}$ を含むので非平面的グラフであり, また $K_{4,2}$ は平面的グラフである

命題9. $n \geqq 6$ のとき $K_{n,n-2}$ は self-linked であり, $K_{5,3}$ は self-linked でない

証明　$n \geqq 6$ のとき $K_{n,n-2} \geqq K_{6,4} > K_{4,4}$ であり $K_{4,4}$ は self-linked だから $K_{n,n-2}$ は self-linked である.

一般に完全2部グラフに含まれるサイクルの長さは4以上だから $K_{5,3}$ の中には交わらない2つのサイクルは含まれていない. 従って $K_{5,3}$ は self-linked でない

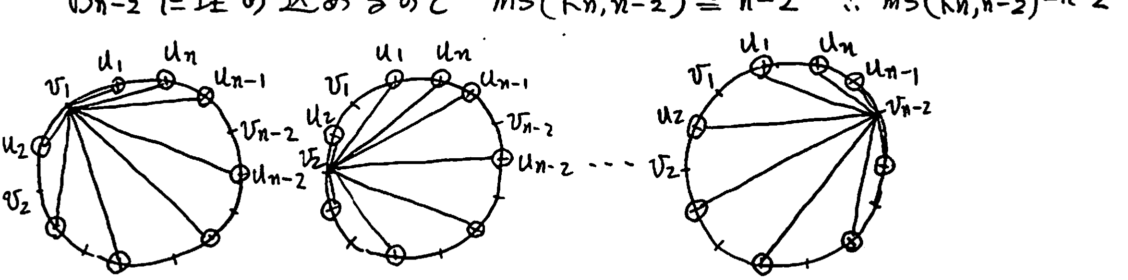
命題10. $n \geqq 7$ のとき $K_{n,n-2}$ は self-knotted であり, $K_{5,3}$ は self-knotted でない　$K_{6,4}$ は self-knotted に関し今の所不明.

証明　$n \geqq 7$ のとき $K_{n,n-2} \geqq K_{7,5} > K_{5,5}$ で $K_{5,5}$ は self-knotted (Shimabara) であるから $K_{n,n-2}$ は self-knotted

$K_{5,3}$ は 先ず $V(K_{5,3}) = U \cup V = \{u_1, u_2, \cdots, u_5\} \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ とおき $K_{5,2}$ ($< K_{5,3}$) を平面上に描き ($V(K_{5,2}) = U \cup \{v_1, v_2\}$ とする), 最後の頂点 v_3 から U へ結び (Join) を作ると $K_{5,3}$ が出来る 平面グラフと平面上にない1点からの結びで出来るグラフは結び目を含まないので $K_{5,3}$ は self-knotted ではない.

命題11　完全2部グラフを本表現(定義2)するのに必要な最小シート数 $\widetilde{ms}(K_{n,n-2}) = n-2$ である.

証明　$K_{n,n-2} > K_{n-2,n-2}$ であり $ms(K_{n-2,n-2}) = n-2$ (Ikeda) だから $\widetilde{ms}(K_{n,n-2}) \geqq n-2$ である.　一方下図のようにすると B_{n-2} に埋め込めるので $\widetilde{ms}(K_{n,n-2}) \leqq n-2$　$\therefore \widetilde{ms}(K_{n,n-2}) = n-2$



D_1　　D_2　　D_{n-2}

注　$ms(K_{n-2,n-2}) = n-2$ は定義1の意味での本表現の必要最小シート数であるが定義2の意味でも $\widetilde{ms}(K_{n-2,n-2}) = n-2$ は明らか.

命題12　完全2部グラフ $K_{n,n-2}$ の極小半ハミルトングラフを H とすると H の唯一つのハミルトン道 $\Delta = u_1v_1u_2v_2\cdots v_{n-2}u_{n-1}u_n$ に関する本表現(定義1)に必要な最小シート数 $ms(H)=n-2$ である.

証明　$H > K_{n-2,n-2}$ で $ms(K_{n-2,n-2})=n-2$ だから $ms(H)\geqq n-2$
一方命題11の作り方と同様にして辺 $e=\overline{u_{n-1}u_n}$ は最後のシート D_{n-2} に載せられるので $ms(H)\leqq n-2$.　　$\therefore ms(H)=n-2$.

命題13　$\mathrm{rank}\, H_1(K_{n,n-2};\mathbb{Z})=(n-1)(n-3)$.

証明　$H=K_{n,n-2}\cup\{e\}$, $\partial e=\{u_{n-1},u_n\}$, H の極大木 $\Delta=u_1v_1u_2v_2\cdots v_{n-2}u_{n-1}u_n$ とし $K_{n,n-2}$ の極大木 $T=\bigcup_{i=1}^{n-2}u_iv_i\cup\bigcup_{j=1}^{n-2}v_ju_{j+1}\cup v_{n-2}u_n$ とおくと $e\notin E(T)$.
そこで命題5, 命題4より

$$\mathrm{rank}\, H_1(K_{n,n-2};\mathbb{Z})=\mathrm{rank}\, H_1(H;\mathbb{Z})-1=|E(H)|-|E(T_H)|-1$$
$$=|E(K_{n,n-2})|+1-(2n-3)-1=n(n-2)-(2n-3)=(n-1)(n-3)\quad\square$$

命題14.　$K_{n,n-2}$ の命題11による埋め込みを $\tilde{K}^{(0)}_{n,n-2}$ とおくと $\tilde{K}^{(0)}_{n,n-2}$ は結び目に関し局所自明(*locally unknotted*)である
従って $\pi_1(S^3-\tilde{K}^{(0)}_{n,n-2})=\mathrm{free}$ である

証明　$K_{n,n-2}$ の極大木 $T=\bigcup_{i=1}^{n-2}u_iv_i\cup\bigcup_{j=1}^{n-2}v_ju_{j+1}\cup v_{n-2}u_n$ とする

$|E(T)|=2n-3$.　残りの $(n-1)(n-3)$ 本の辺は全て *disk* (又はシート)上にあり, その各々の辺を e_i $(i=1,2,\cdots,(n-1)(n-3))$ とする.　∂e_i を T 上で結んだ道を f_i とすると. サイクル $d_i=e_i\cup f_i$ は1枚の *disk* (又はシート)上にあり, 明らかに e_i を含んでいる *disk* (又はシート) D_i 上で 2-*cell* を張る. それらの 2-*cell* は適当に内部をシートから浮かせることにより互いに内部では交わらないように出来る　□

参考文献

[I] K. Ikeda : On minimum sheet numbers of graphs, preprint

[K] K. Kobayashi : Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. XXI (1992) 117–140

[O] T. Otsuki : Knots and links in certain spatial complete graphs, Master Thesis, Waseda Univ. (1994).

[E & O] T. Endo and T. Otsuki : Notes on spatial representation of graphs, Hokkaido Math. J. XXIII (1994) 383–398.