箱根セミナ記録 9 3 (1993)79-84.

Standard spatial graph.

小林一章（東京女子大）

この論文は全ての有限グラフの空間グラフに対し，その標準形を定義しようと試みたものである。提言1は結び目，絡み目に関する谷山氏のアイデア[T1]，[T2]を空間グラフに応用したものであり，提言2，3は半ハミルトングラフの標準的空間グラフの定義を一般化したものである。今迄空間グラフの妥当な標準形が定義されているものは次のようなグラフ達に対してである。

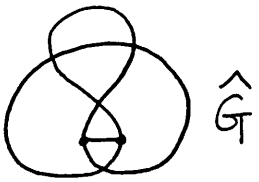
グラフ	空間グラフの標準形
サイクルグラフ	自明な結び目
サイクルグラフ達	自明な絡み目
平面的グラフ	平面グラフ
半ハミルトングラフ	最小シート数をもつ本表現

以下特にことわらない限り有限グラフGは2-連結，単純であると仮定しても空間グラフの標準形を考えるときは一般性を失なわない。また次数1の頂点はないと仮定する。

提言1.

定義1. Gをグラフとし$\tilde{G}^{(1)}$, $\tilde{G}^{(2)}$をGの3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$（又は3次元球面S^3）内の2つの空間グラフとする。$\tilde{G}^{(1)}$と$\tilde{G}^{(2)}$が同値（$\tilde{G}^{(1)} \cong \tilde{G}^{(2)}$）とは$\mathbb{R}^3$の同相写像$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$で$h(\tilde{G}^{(1)}) = \tilde{G}^{(2)}$となるものがある時をいう。（$h$は$\mathbb{R}^3$の向きを保つという条件を要求しない。）この同値類を空間（グラフ）タイプという。

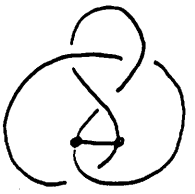
空間グラフの射影図（図1）と空間グラフの図（図2）とを図1，2のように区別する。即ち図の方は交差点での上下の情報をもち，射影図は上下の情報をもたない。交差点は横断的（transversal）に交わる2重点のみとする。記号はグラフGの射影図を$\hat{G}$，空間グラフの図を$\tilde{G}$で表わす。$\tilde{G}$で空間タイプを表すこともある。



$\hat{G}$

射影図

図1



$\tilde{G}$

図

図2

$\hat{G}$がn個の2重点をもつ射影図なら$\hat{G}$から高々2^{n-1}個の空間グラフの空間タイプが得られる。$\hat{G}$から得られるこの全ての空間タイプの集合をTYPE($\hat{G}$)とかく
また$\tilde{G}$をGの1つの空間タイプとしたとき$\tilde{G}$から得られる全ての射影図の集合をPROJ($\tilde{G}$)とかく

定義2. $\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}$をグラフ$G$の2つの空間タイプとする
PROJ($\tilde{G}^{(1)}$) $\supset$ PROJ($\tilde{G}^{(2)}$) のとき $\tilde{G}^{(1)}$は$\tilde{G}^{(2)}$よりマイナー(minor)であるといい, $\tilde{G}^{(1)} \leqq \tilde{G}^{(2)}$ とかく. また$\tilde{G}^{(2)}$は$\tilde{G}^{(1)}$よりスーパー(super)であるともいう.

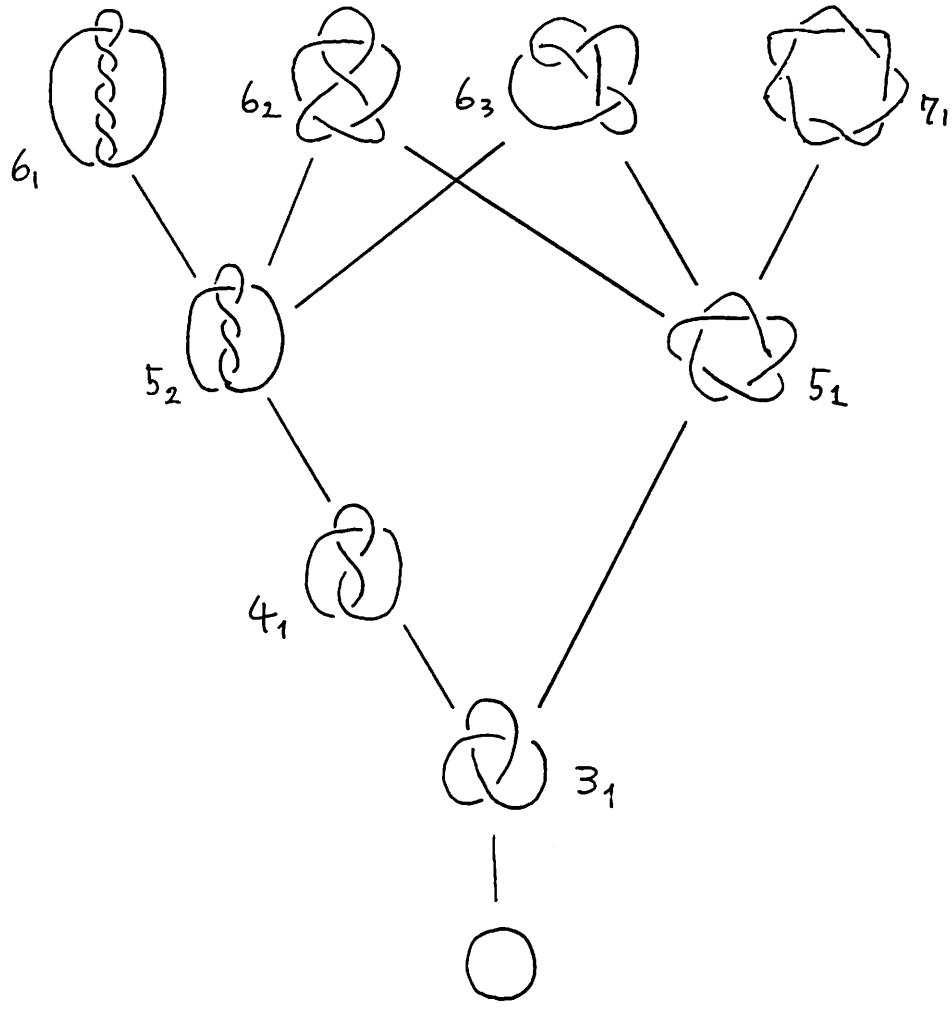
上の定義2は射影像または正則表示の言葉で言いかえると次のようになる　$\tilde{G}^{(1)} \leqq \tilde{G}^{(2)}$ のとき
(1) $\tilde{G}^{(2)}$のどんな射影図でもその2重点に適当に上下を指定すると$\tilde{G}^{(1)}$の正則表示となる.
(2) $\tilde{G}^{(2)}$のどんな正則図でも適当に交差点を並んで交差交換すれば$\tilde{G}^{(1)}$の正則表示となる.

谷山の結果
まず $\mathcal{P}or\mathcal{L}^{\mu} = \{$all μ-comp. prime alternating link types$\}$ とする.
命題　対$(\mathcal{P}or\mathcal{L}^{\mu}, \leqq)$は半順序集合である.

命題　任意の自然数μに対しμ個の成分からなる自明

な結み目は大小関係 ≦ に関し最小元である. □

交差点数の少ない結び目における大小関係は次のようになっている([T1]).



定義2で定義した大小関係 ≦ は G の空間タイプの集合に前順序(preorder)を定義する. 即ち次が成り立つ.

命題1. (1) グラフ G の任意の空間タイプ $\tilde{G}$ に対し
$\tilde{G} \leqq \tilde{G}$ である.
(2) G の空間タイプ $\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \tilde{G}^{(3)}$ に対し
$\tilde{G}^{(1)} \leqq \tilde{G}^{(2)}, \ \tilde{G}^{(2)} \leqq \tilde{G}^{(3)} \Longrightarrow \tilde{G}^{(1)} \leqq \tilde{G}^{(3)}$
証明. 定義から明らかである.

定義3. 定義2で定義した大小関係 $\leqq$ に関し極小の空間タイプ $\tilde{G}^{\star}$ をグラフ G の空間グラフの標準形という.

上の標準形の定義が妥当なものであるためには少なくとも次のようなことを証明する必要がある.

① G がサイクルグラフ, サイクルグラフ達, 平面的グラフ, 半ハミルトングラフの時今までの標準形の定義と上の定義2による標準形が一致するか.

② $\tilde{G}^{\star}$ が上の定義3の意味での標準形なら基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \tilde{G}^{\star})$ は自由群か

③ $\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}$ が G の2つの標準形なら $\tilde{G}^{(1)} \cong \tilde{G}^{(2)}$ か

注. 恐らく③は成立しない. そのときは③の $\cong$ に代る同値関係を定義しなさい (例えば G が半ハミルトングラフのときの本表現のシート変換のようなものを定義する).

提言2. Gを有限，2-連結，単純グラフとする．Gを位相空間と考えたとき$|G|$とかくことにする。K_nをn頂点完全グラフとする．Gに対し$|G| \subset |K_n|$となる最小のnを取る．このようなnはGの頂点の個数以下で必らず取れる。たとえばGがサイクルグラフのときGの頂点の個数がいくつであっても$n=3$と出来る。前と同様Gが次数1の頂点は持たないとする。

定義4. 上のようにしてグラフGに対し$|G| \subset |K_n|$となる最小数nをもつ完全グラフK_nを取る。K_nはハミルトングラフだから最小シート数$p=\left[\frac{n+1}{2}\right]$をもつ本表現

$\psi : K_n \longrightarrow B_p$ がK_nの標準形として定義出来る．

このとき$\psi(G)$をGの空間グラフの標準形という．

この定義においても前に述べた標準形が持つべき性質①，②，③を満足していることを証明すべきである。

提言3. Gを有限，2連結，単純グラフとする．Hを次の条件(1)，(2)，(3)をみたすグラフとする．

(1) HはGを部分グラフとして含む

(2) Hは半ハミルトングラフである．

(3) Hは上の条件(1)，(2)をみたすグラフのうち辺の数が最小のもの

定義5. 有限，2連結，単純グラフGに対し上の条件(1)，(2)，(3)を満足するグラフHを取り，最小シート数をもつ本表現 $\psi : H \longrightarrow B_p$ を取る．このとき$\psi(G)$をGの標準空間グラフという

参考文献

[K] K. Kobayashi: Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. vol. XXI (1) (1992) 117–140.

[T1] K. Taniyama: A partial order of knots, Tokyo J. of Math. 12 (1989), 205–229

[T2] ——— : A partial order of links, Tokyo J. of Math. 12 (1989), 475–484