箱根セミナ記録 9 2 (1992) 25-39.

Spatial Graph Theory
Topological symmetry group of spatial graphs

§1

この論文では有限グラフ G の空间表現(空间グラフ) $\tilde{G}$ の位相的対称群 (Topological symmetry group) $TSG(\tilde{G})$ について述べる.

定義. G を有限グラフとし $f: G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (又は S^3) を埋め込みとする. $\tilde{G} = f(G)$ を G の空间表現(空间グラフ)という. $\tilde{G}$ の位相的対称群 $TSG(\tilde{G})$ は次のように定義する

$TSG_+(\tilde{G}) = \{ \tau \in Aut(G) \mid \mathbb{R}^3$ の向きを保つ同相写像 ϕ があって $\phi \circ f = f \circ \tau \}$

$TSG_-(\tilde{G}) = \{ \tau \in Aut(G) \mid \mathbb{R}^3$ の向きを逆にする同相写像 $*f$ があって $*f \circ \tau = f \circ \tau \}$.

$TSG(\tilde{G}) = TSG_+(\tilde{G}) \cup TSG_-(\tilde{G})$

$TSG(\tilde{G})$ は $Aut(G) \times \mathbb{Z}_2$ の部分群とみることも出来る

定理1 G の任意の空间表現 $\tilde{G}$ に対し

(1) $TSG_+(\tilde{G}) = TSG_-(\tilde{G})$ 又は

(2) $TSG_+(\tilde{G}) \cap TSG_-(\tilde{G}) = \phi$ が成り立つ.

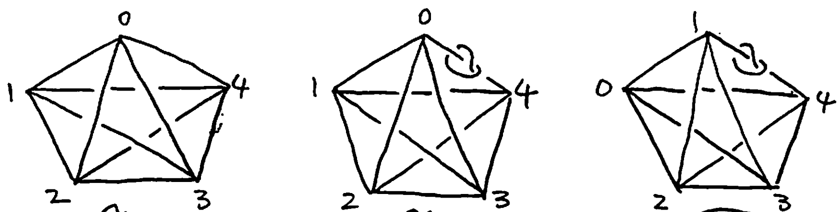
系. $\tilde{G}$ が非平面的グラフ(非平面グラフではない) G の任意の空间表現なら $TSG_+(\tilde{G}) \cap TSG_-(\tilde{G}) = \phi$

定義. $f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を G の2つの空间表現とし, $I = [0,1]$ を単位閉区间とする 次の2つの概念を導入する.

(1) f と g (又は $f(G)$ と $g(G)$) が <u>cobordant</u> とは $\Phi(G,0) = (f(G),0)$, $\Phi(G,1) = (g(G),1)$ となる locally flat embedding $\Phi: G \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ があるときをいう.

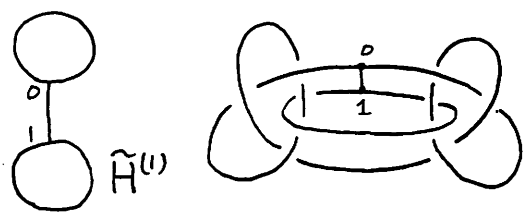
(2) f と g が <u>isotopic</u> とは $\Phi(G,0) = (f(G),0)$, $\Phi(G,1) = (g(G),1)$ となるレベルを保つ埋め込み $\Phi: G \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ があるときをいう.

注. $TSG(\tilde{G})$ は定義より $\mathbb{R}^3$ の同相写像に関する不変量であるが、グラフの isotopy 及び cobordism に関する不変量ではない. 例えば下図の5頂点完全グラフ K_5 の2つの空間表現 $\tilde{K}_5^{(1)}$, $\tilde{K}_5^{(2)}$ は isotopic ではあるが $\tau=(01)\notin TSG(\tilde{K}_5^{(2)})$ だから $TSG(\tilde{K}_5^{(2)}) \subsetneqq TSG(\tilde{K}_5^{(1)}) \cong Aut(K_5) = S_5$ である



$\tilde{K}_5^{(1)}$ $\tilde{K}_5^{(2)}$ $\widetilde{\tau(K_5^{(2)})}$

ここで S_5 は5次の対称群で $\{0,1,2,3,4\}$ の置換全体です
また下図の handcuff graph H の2つの空間表現 $\tilde{H}^{(1)}$, $\tilde{H}^{(2)}$ とすると $\tilde{H}^{(1)}$ と $\tilde{H}^{(2)}$ は cobordant であるが $TSG(\tilde{H}^{(1)}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ だが $TSG(\tilde{H}^{(2)}) \cong \{1\} \times \{0\} \subset Aut(H) \times \mathbb{Z}_2$ である.

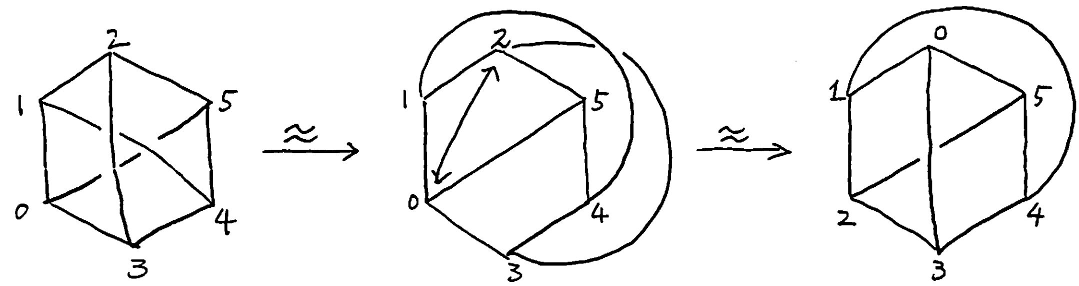


$\tilde{H}^{(1)}$ $\tilde{H}^{(2)}$

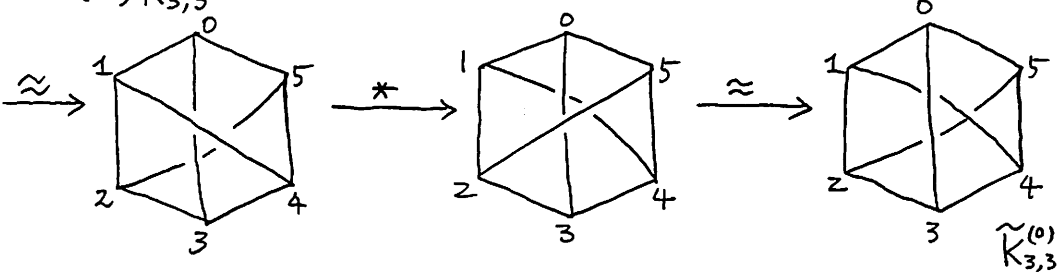
また下図のように2つの空間表現 $\tilde{K}_5^{(1)}$, $\tilde{K}_5^{(2)}$ は $\mathbb{R}^3$ の同相写像で互いに移らないが後に示すように $TSG(\tilde{K}_5^{(1)}) \cong TSG(\tilde{K}_5^{(2)}) \cong D_5$ (位数10の2面体群) となり $TSG(\tilde{G})$ が $\mathbb{R}^3$ の同相写像に関する完全不変量でないことを示している

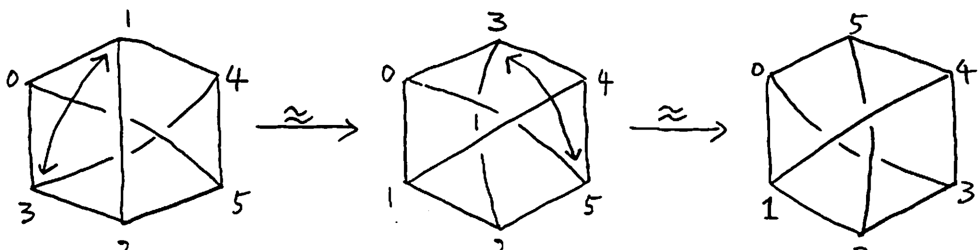
定理2. $G=K_5$ 又は $K_{3,3}$ とし $\tilde{G}_0$ を G の標準空間表現 (standard spatial presentation) とすると $TSG(\tilde{G}_0) \cong Aut(G)$

証明. $G=K_5$ の時は ([Y. Thm. 4.2]) に証明されている. $G=K_{3,3}$ のとき $Aut(K_{3,3}) = \langle (02), (04), (13), (15), (01)(23)(45) \rangle \subset S_6$ ($=\{0,1,2,3,4,5\}$ の置換全体) 生成元 (02) と $(01)(23)(45)$ は次の図 (a), (b) によって $TSG(\tilde{K}_{3,3}^{(0)})$ に含まれる

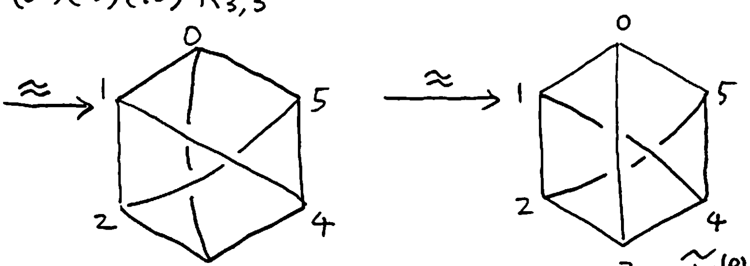


(02) $\tilde{K}^{(0)}_{3,3}$





(01)(23)(45) $K^{(0)}_{3,3}$



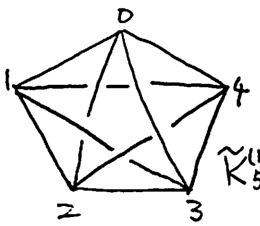
生成元 (04), (13) が TSG($\tilde{K}^{(0)}_{3,3}$) に含まれることは (02) と同じ方法で示される ∴ TSG($\tilde{K}^{(0)}_{3,3}$) $\cong$ Aut($K_{3,3}$)

定理3. $G = K_5$ 又は $K_{3,3}$ に対し 次をみたす G の空間表現 $\tilde{G}$ がある

(1) TSG($\tilde{G}$) $\subsetneqq$ TSG($\tilde{G}^{(0)}$) ここで $\tilde{G}^{(0)}$ は G の標準空間表現である. かつ

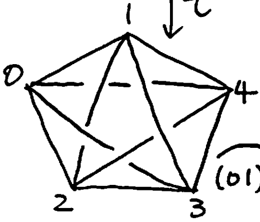
(2) $\tilde{G}$ は locally unknotted 従って $\pi_1(S^3 - \tilde{G})$ は自由群

証明) $G=K_5$ のとき $\tilde{K}_5^{(1)}$ を下図のような K_5 の空間表現とする. $\tilde{K}_5^{(1)}$ は left-handed trefoil であるような空間曲線 $[02413]$ を含む. $\tau=(01)$ を頂点の互換とすると $\widetilde{\tau(K_5)}^{(1)}$ は次の図になり空間曲線 $[02413]$ は trivial knot である. 従って $\tilde{K}_5^{(1)}$ を $\widetilde{\tau(K_5)}^{(1)}$ に移す S^3 の同相写像は無い. $\therefore\ \tau\notin TSG(\tilde{K}_5^{(1)})$. 定理2から $\tau\in TSG(\tilde{K}_5^{(0)})\cong Aut(K_5)\cong S_5$ だから $TSG(\tilde{K}_5^{(1)})\subsetneqq TSG(\tilde{K}_5^{(2)})$.



$\tilde{K}_5^{(1)}$

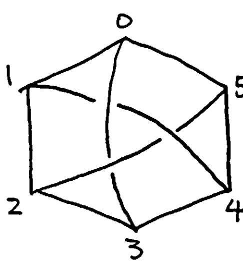
$\downarrow\tau$



$\widetilde{(01)K_5}^{(1)}$

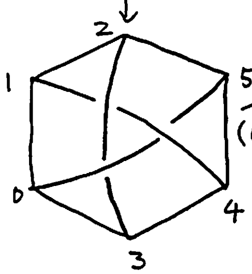
$G=K_{3,3}$ のとき. $\tilde{K}_{3,3}^{(1)}$ を下図のようにすると $\tilde{K}_{3,3}^{(1)}$ は left-handed trefoil knot であるような空間曲線 $[034125]$ を含む. $\tau=(02)$ を頂点の互換とすると $\widetilde{\tau(K_{3,3})}^{(1)}$ はその次の図となり $\widetilde{\tau(K_{3,3})}^{(1)}$ 上の空間曲線 $[034125]$ は trivial knot である. 従って $\tau\notin TSG(\tilde{K}_{3,3}^{(1)})$ であり, 定理2から $\tau\in TSG(\tilde{K}_{3,3}^{(0)})\cong Aut(K_{3,3})$ である. 故に $TSG(\tilde{K}_{3,3}^{(1)})\subsetneqq TSG(\tilde{K}_{3,3}^{(0)})$.

(2)については明らかである.



$\tilde{K}_{3,3}^{(1)}$

$\downarrow$



$\widetilde{(02)K}_{3,3}^{(1)}$

定理4. (T. Motohashi). 完全グラフ K_n の任意の空間表現 $\tilde{K}_n$ に対し $n\geqq 6$ の時 $TSG(\tilde{K}_n)\subsetneqq Aut(K_n)$ である.

証明. 先ず $n=6$ の場合に証明する. K_6 上には交わらない長さ3のサイクルの対が10組ある. Conway-Gordon の定理から ([C-G]). その10組の内絡み数 (linking number) が奇数のものが奇数組あり, 絡み数が偶数のものが奇数個ある. そこでもし $TSG(\tilde{K}_6)\cong Aut(K_6)$ なら $\gamma_i\ (i=1,2)$ を10組のサイクルの対のうちのもので $lk(\tilde{\gamma}_1)=$奇数, $lk(\tilde{\gamma}_2)=$偶数 となるものに対し $\tau(\gamma_1)=\gamma_2$ となる元 $\tau\in Aut(K_6)\cong S_6$ がある。しかし明らかに $\tau\notin TSG(\tilde{K}_6)$ であるから $TSG(\tilde{K}_6)\subsetneqq Aut(K_6)$ である.

$n\geqq 7$ のとき K_n の任意の空間表現 $\tilde{K}_n$ は $\tilde{K}_6$ を空間部分グラフ

として含む　従って $\widetilde{K_n}$ は2つの長さ3のサイクルから成る2成分リンクで絡み数が奇数のもの，$\widetilde{\gamma_1}$，と絡み数が偶数となるもの，$\widetilde{\gamma_2}$，を含む　$\tau(\gamma_1)=\gamma_2$ となる元 $\tau\in Aut(K_n)\cong S_n$ の元を取ると $n=6$ の場合と同様にして $\tau\notin TSG(\widetilde{K_n})$ である．

$\therefore\ TSG(\widetilde{K_n})\subsetneqq Aut(K_n)$．

定理5．$f: G\longrightarrow \mathbb{R}^3$ をグラフ G の空间表現とし，$\widetilde{G}=f(G)$ とする　もし G の交わらないサイクル達の2つの集合 $\{C_1,C_2,\ldots,C_p\}$ と $\{C_1',C_2',\ldots,C_p'\}$ と $\tau\in Aut(G)$ で

(1) $\tau(C_1\cup\cdots\cup C_p)=C_1'\cup\cdots\cup C_p'$ かつ

(2) $f(C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_p)$ と $f(C_1'\cup\cdots\cup C_p')$ は異なる link types をもつ（即ち $h\circ f(C_1\cup\cdots\cup C_p)=f(C_1'\cup\cdots\cup C_p')$ となるような同相写像 $h:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ が存在しない）なら $\tau\notin TSG(\widetilde{G})$ である

証明　$\tau\in TSG(\widetilde{G})$ ならアンビエント・イソトピー $h_t:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ で $h_1\circ f(C_1\cup\cdots\cup C_p)=f(C_1'\cup\cdots\cup C_p')$ 又は $*h_1\circ f(C_1\cup\cdots\cup C_p)=f(C_1'\cup\cdots\cup C_p')$ となるものがある（$*$ は $\mathbb{R}^3$ の折り返し）従って $f(C_1\cup\cdots\cup C_p)$ と $f(C_1'\cup\cdots\cup C_p')$ は同じ絡み目型をもつ．これは仮定に矛盾　$\therefore\ \tau\notin TSG(\widetilde{G})$．

§2. Semi-linear circular presentation と $TSG(\widetilde{G})$．

この節では G の空间表現 $\widetilde{G}$ の位相的対称群 $TSG(\widetilde{G})$ について述べますが任意の空间表現 $\widetilde{G}$ を相手にしたのでは $TSG(\widetilde{G})$ は難かしくてわかりません．そこで（[K]）で定義した本表現（Book presentation）より少し広い空间表現を考え，その範中で $TSG(\widetilde{G})$ を考えることにします．それが準線形円周表現（Semi-linear circular presentation）と呼ばれるものです．

定義　$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ を3次元ユークリッド空间とし，$\mathbb{R}^2=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ をその2次元部分空间とする．$p:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ を $p(x,y,z)=(x,y,0)$ で定義される射影とする

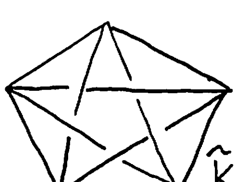
$D_r^2=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqq r^2\}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の半径 r の円板

とし，$S^1_r = \partial D^2_r = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ を円周とする
有限グラフ G に対し，$\eta : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を (1) $\eta(V(G)) \subset S^1_r$ かつ
(2) G の各辺 e に対し，$p \cdot \eta(e)$ が D^2_r 内の線分となっている，
という条件を満足する G の空間表現とする．このとき $\{p \cdot \eta(e)\}_e$
の全ての多重点は $\eta(v_i)$ $(v_i \in V(G))$ を適当に取ることにより
2重点のみと仮定する．このとき $\eta(G)$ を semi-linear diagram
といい，それに ambient isotopic な G の空間表現 $\tilde{G}$ を準線形円周表現 (semi-linear circular presentation) という．
$SLCP(G) = \{\tilde{G} \mid \tilde{G}$ は G の準線形円周表現$\}/\approx$ とおきます
($\approx$ はアンビエント・イソトピーによる同値関係) また準ハミルトングラフ (pseudo H-graph) G に対し
$\mathcal{E}(B_p(G)) = \{\tilde{G} \mid \tilde{G} \approx \psi(G),\ \psi : G \longrightarrow B_p$ は p シートをもつ本への表現$\}/\approx$ 　とします．

注．空間表現 $\tilde{G}$ が $SLCP(G)$ に含まれるなら $\pi_1(S^3 - \tilde{G})$ は
階数が $H_1(G ; \mathbb{Z})$ の階数に等しい自由群である．

命題1．準 H－グラフ G に対し $\bigcup_p \mathcal{E}(B_p(G)) \subset SLCP(G)$ であり
特に $n \geqq 5$ に対し $\bigcup_p \mathcal{E}(B_p(K_n)) \subsetneqq SLCP(K_n)$ である．ここで
K_n は n 頂点完全グラフ．

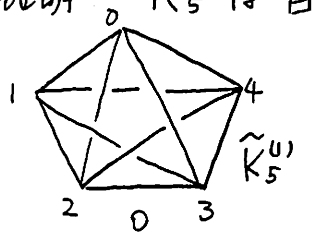
証明．本表現 B.P.H.Δ を ([I]) の蕾表現 (bud presentation)
とみなすことにする．そこで蕾を上から下へみると G の準線形円周表現となっている．従って前半が証明出来た．$\tilde{K}^{(良)}_5$ を下図
で与えられる5頂点完全グラフの空間表現とすると [K, Pro.10]
により $\tilde{K}^{(良)}_5$ は $SLCP(K_5)$ には含まれるが
$\bigcup_p \mathcal{E}(B_p(K_5))$ には含まれないことがわかる．
次に $\tilde{K}^{(良)}_5$ を空間部分グラフとして含んでいる
$SLCP(K_n)$ の元 $\tilde{K}_n$ を取ると $\tilde{K}_n \notin \bigcup_p \mathcal{E}(B_p(K_n))$


$\tilde{K}^{(良)}_5$

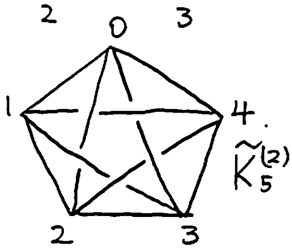
である．何故なら もし $\tilde{K}_n \in \bigcup_p \mathcal{E}(B_p(K_n))$ なら $\tilde{K}^{良}_5$ だけ残る
ように $\tilde{K}_n$ から頂点と辺を除くと $\tilde{K}^{(良)}_5$ が本表現されてしまう
ことになり矛盾だからである．故に後半も証明された．

命題2 下図のような K_5 の2つの空間表現 $\widetilde{K}_5^{(1)}$, $\widetilde{K}_5^{(2)}$ に対し $TSG(\widetilde{K}_5^{(1)}) \cong TSG(\widetilde{K}_5^{(2)}) \cong D_5$ (位数10の2面体群)である.

証明 $\widetilde{K}_5^{(1)}$ は自明でない結び目又は絡み目として left-handed trefoil knot $\widetilde{[02413]}$ のみを含む. それは $\widetilde{K}_5^{(1)}$ 上の長さ5のサイクルである そこでもし $\tau \in TSG(\widetilde{K}_5^{(1)})$ なら $\phi\circ f = f\circ\tau$ であり集合として $\widetilde{\tau([02413])}$ である ここで $f: K_5 \to \mathbb{R}^3$ は $f(K_5)=\widetilde{K}_5^{(1)}$ となる埋め込みであり, ϕ は $\mathbb{R}^3$ の同相写像 そこで $TSG(\widetilde{K}_5^{(1)})$ は位数10の2面体群 D_5 に含まれ, D_5 は長さ5の cycle $[02413]$ の自己同形群になっている.

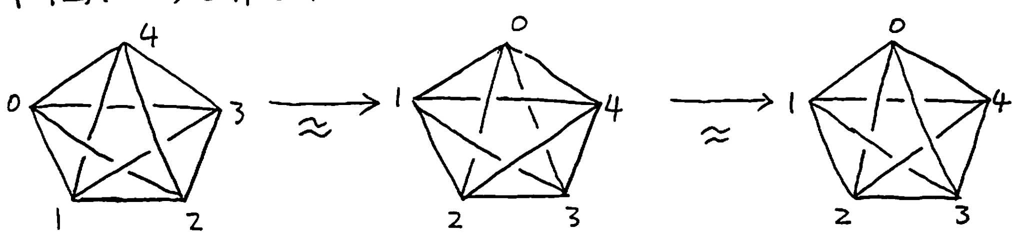


$\widetilde{K}_5^{(1)}$

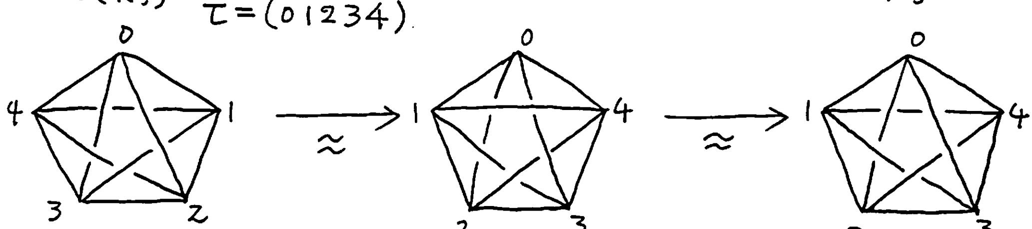


$\widetilde{K}_5^{(2)}$

D_5 は $\{0,1,2,3,4\}$ の置換群の部分群として $\{(01234), (14)(23)\}$ で生成されている そこであとは D_5 の各生成元が $TSG(\widetilde{K}_5^{(1)})$ に含まれることを示せば良い これは下図によって示される.

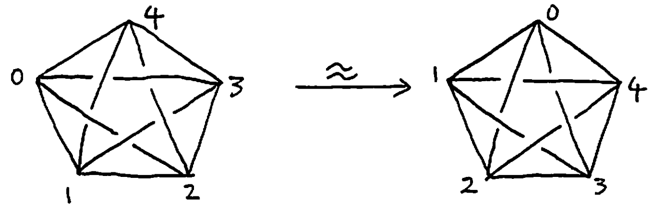


$\widetilde{\tau(K_5)}^{(1)}$ $\tau=(01234)$ $\widetilde{K}_5^{(1)}$

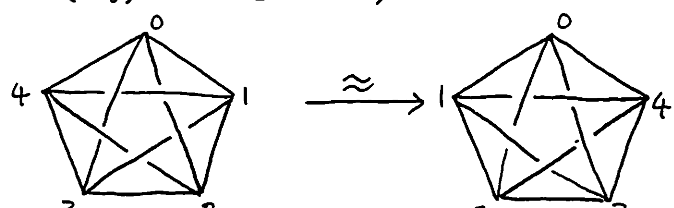


$\widetilde{\tau(K_5)}^{(1)}$ $\tau=(14)(23)$ $\widetilde{K}_5^{(1)}$

$\widetilde{K}_5^{(2)}$ は自明でない結び目又は絡み目として 5_1-knot $\widetilde{[02413]}$ のみを含み, $\widetilde{K}_5^{(1)}$ のときと同じ理由によって $TSG(\widetilde{K}_5^{(2)}) \subset D_5$ である そして生成元 (01234) と $(14)(23)$ が $TSG(\widetilde{K}_5^{(2)})$ に含まれることは次の図によって示される

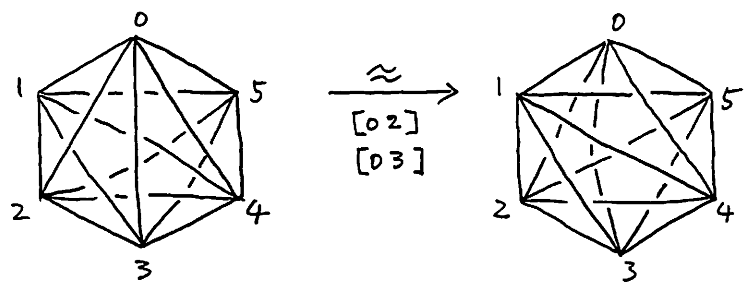


$\widetilde{\tau(K_5)}^{(2)}$　$\tau=(01234)$　　　　$\tilde{K}_5^{(2)}$



$\widetilde{\tau(K_5)}^{(2)}$　$\tau=(14)(23)$　　　　$\tilde{K}_5^{(2)}$

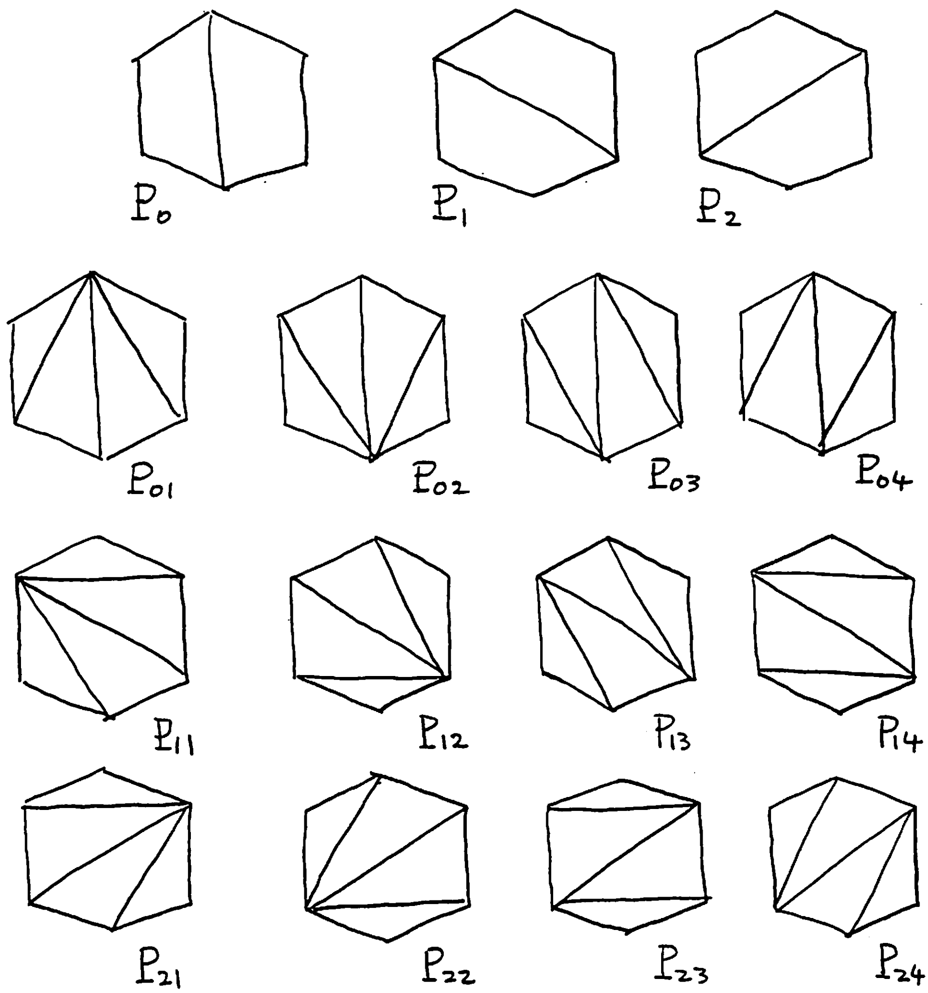
注　下図のK_6の空間表現$\tilde{K}_6^{(0)}$は一見4シートをもつB.P.H.Δにアンビエント・イソトピックのように見えるがアンビエント・イソトピーで3シートをもつB.P.H.Δに移せる　従って$\tilde{K}_6^{(0)}$はK_6の標準空間表現である.



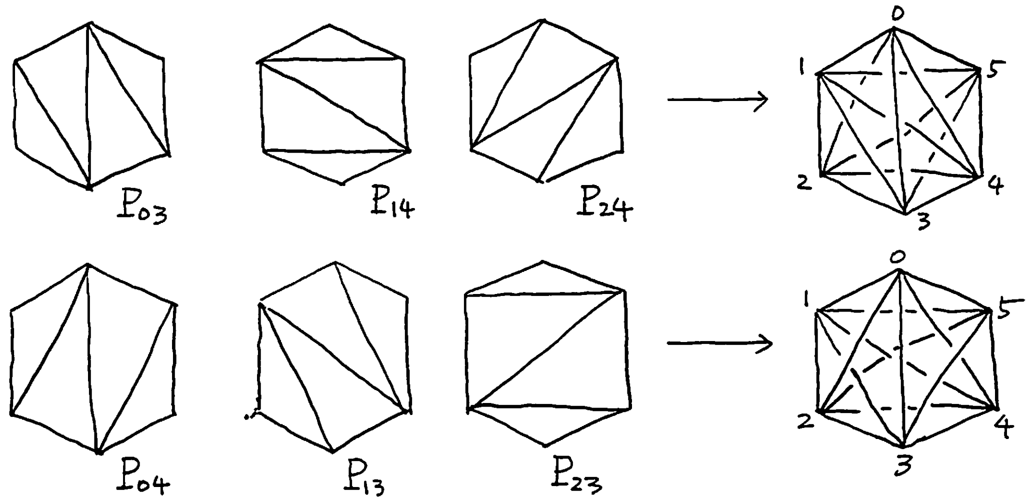
定理6. K_6の任意の標準空間表現は頂点のラベルを保つ同相写像で互いに移り得る. また頂点のラベルを保つとは限らないアンビエント・イソトピーで互いに移り得る.

証明. まず準線形円周表現でK_6の標準空間表現の可能なものの全てを挙げることにする. K_6の標準表現は3シートをもつから3つの花弁P_0, P_1, P_2を用意し, 2つの"長さ"3の辺は1つの花弁には含まれないから"長さ"3の3つの辺をP_0, P_1, P_2の各々に1つづつ分配する. 残る辺は6本である. P_0, P_1, P_2において距離が2の2つの頂点を結ぶ. それは各P_i ($i=0, 1, 2$)で4通りある. 各集合$\{P_{0j}\}$, $\{P_{1j}\}$, $\{P_{2j}\}$から共通の辺を

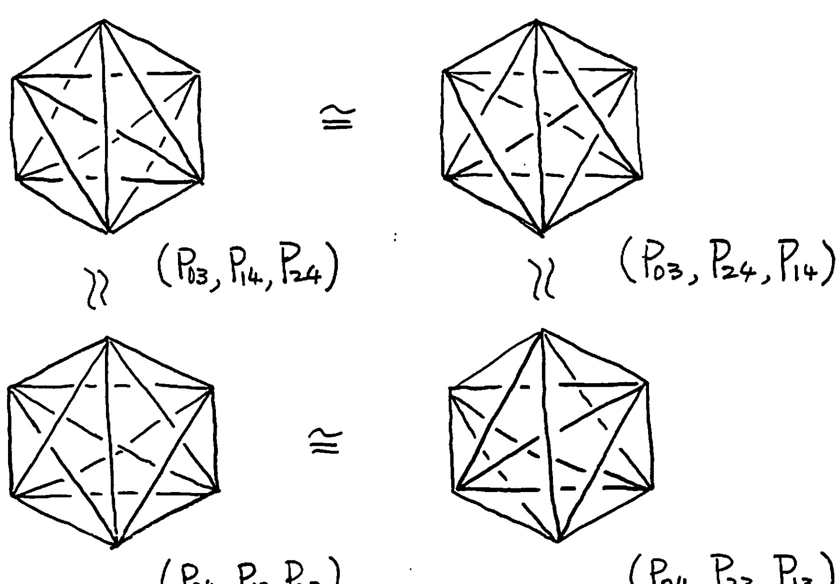
持たないようにして1つの図を取り出さねばならない　そこでもしP_{01}を取り出すならP_{11}又はP_{14}を取り出さねばならない　しかしどちらにしても集合$\{P_{2j}\}$から共通辺を持たないようにしては取り出せない．従って$\{P_{0j}\}$から最初にP_{01}を取り出せないことがわかる．



同様にして$\{P_{0j}\}$からP_{02}を取り出せないことがわかる．このようにして3つの図の可能な組み合わせは$[P_{03}, P_{14}, P_{24}]$又は$[P_{04}, P_{13}, P_{23}]$のみであることがわかる　3シートをもつ本の任意のシート変換はバインダーを固定するR^3の同相写像に拡張出来るので順序3対(P_{03}, P_{14}, P_{24})と(P_{03}, P_{24}, P_{14})は頂点のラベルを保存して同相である　(P_{03}, P_{14}, P_{24})において辺(02)，(35)をこちら側に移すと(P_{04}, P_{13}, P_{23})になる．従って

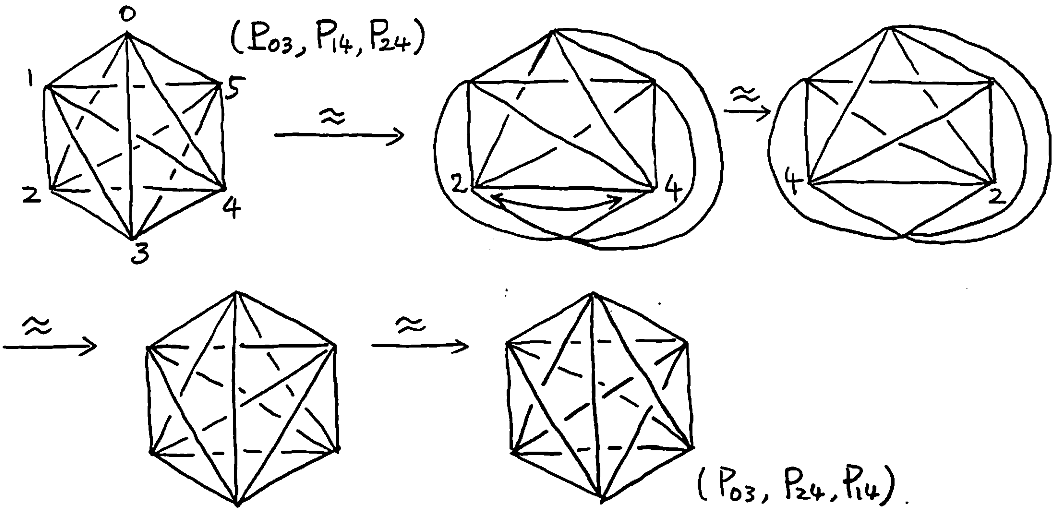


(P_{03}, P_{14}, P_{24}) はラベルを保存して (P_{04}, P_{13}, P_{23}) にアンビエント・イソトピックである。以上より K_6 の標準空間表現のラベルを保存する同相類は1つである。また (P_{03}, P_{24}, P_{14}) において辺(13),(04)を向う側に移すと (P_{04}, P_{23}, P_{13}) になる。従ってこれらはラベルを保存するアンビエント・イソトピーで移り得る

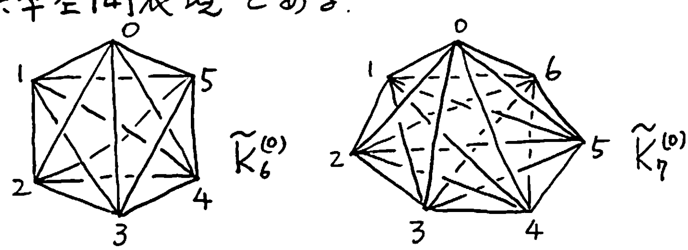


更に次の図によって (P_{03}, P_{14}, P_{24}) は頂点のラベルを保存しないアンビエント・イソトピーによって (P_{03}, P_{24}, P_{14}) に移る(頂点のラベルを保存するアンビエント・イソトピーで移り得ないことは谷山不変量によって示される) 従って K_6 の標準空間表現は頂点の

ラベルを保存するとは限らないアンビエント・イソトピーで互いに移り得る

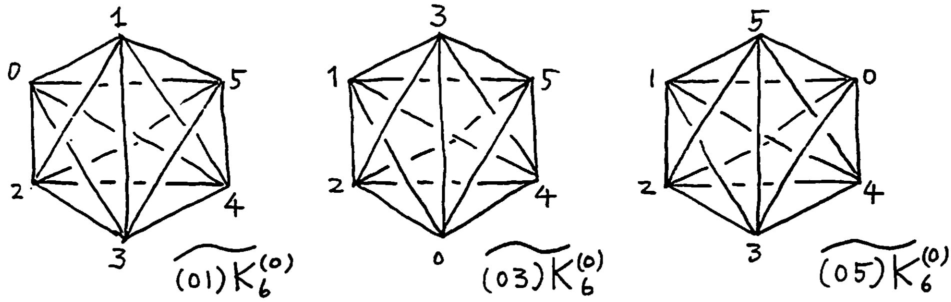


命題3　$Aut(K_6) \cong S_6 = \langle (01), (02), (03), (04), (05) \rangle$ とする　すると $(01), (03), (05) \notin TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ かつ $(02), (04), (13), (15), (01)(23)(45) \in TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ である　ここで $\tilde{K}_6^{(0)}$ は下図のような K_6 の1つの標準空間表現とする. そして $Aut(K_7) \cong S_7 = \langle (01), (02), \cdots, (06) \rangle$ とすると $(0i) \notin TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ であり, $(0123456) \in TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$ ただし $\tilde{K}_7^{(0)}$ は下図のような K_7 の1つの標準空間表現である.

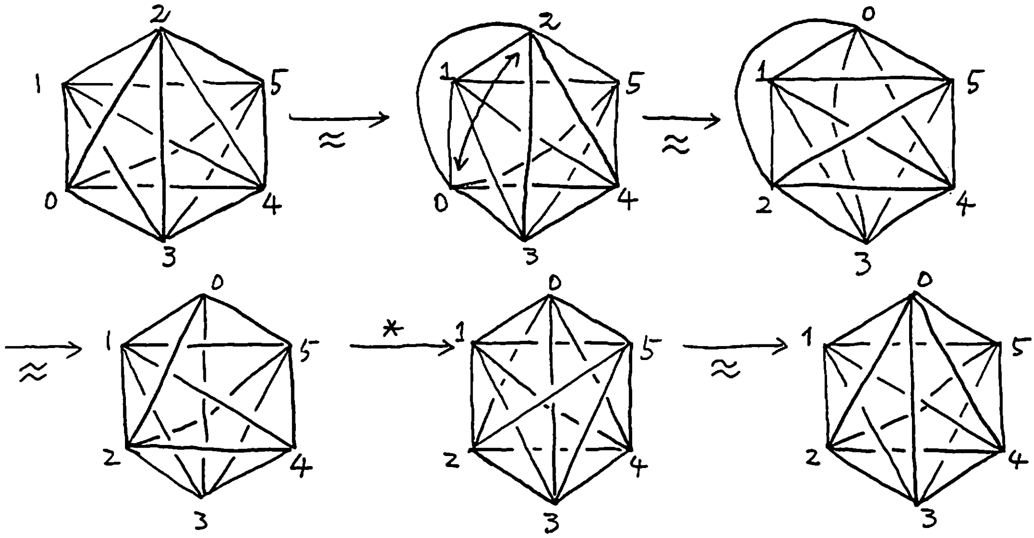


証明　$\tilde{K}_6^{(0)}$ 上の2つの交わらないサイクル $\tilde{C}_1 = [\widetilde{024}]$ と $\tilde{C}_2 = [\widetilde{135}]$ は Hopf link を表わしている. しかし $\widetilde{(01)K_6^{(0)}}$, $\widetilde{(03)K_6^{(0)}}$ かつ $\widetilde{(05)K_6^{(0)}}$ 上ではこれらのサイクルは自明な絡み目を表している　従って $(01), (03), (05) \notin TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ である　更に次の図によって $(02) \in TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$. 同様な方法によって $(04), (13), (15)$ $(01)(23)(45) \in TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ が示される.

に



$\widetilde{(01)K_6^{(0)}}$　$\widetilde{(03)K_6^{(0)}}$　$\widetilde{(05)K_6^{(0)}}$



$TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$ に対して空间サイクル $k=\widetilde{[024135]}$ は $\tilde{K}_7^{(0)}$ 上の唯一つの自明でない結び目である　従って $\tau\in TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$ なら集合として $\tau(\widetilde{[024135]})=k$ でなければならない．しかし $\tau=(0i)$，$(1\leqq i\leqq 6)$，に対し $\tau([024135])=[i2\cdots\overset{(i)}{0}\cdots 5]$ であり，その像 $\widetilde{\tau([024135])}$ は自明な結び目である．よって $\tau=(0i)\notin TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$．次に $(0123456)\in TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$ であることを示す　$\tilde{K}_7^{(0)}$ の図は先ず頂点 i $(i=1,2,\cdots,6)$ と頂点0を結び，次に頂点 i $(i=2,3,\cdots,6)$ と頂点1とを結び以下同様にする　1方 $\widetilde{(0123456)K_7^{(0)}}$ の図は先ず頂点 i $(i=0,1,\cdots,5)$ と頂点6とを結び，次に頂点 i $(i=1,2,\cdots,5)$ と頂点0とを結び，以下同様にする　そこで $\widetilde{(0123456)K_7^{(0)}}$ の図で頂点6と結んでいる全ての辺を向う側に移すと $\tilde{K}_7^{(0)}$ の図になる　よって $(0123456)\in TSG(\tilde{K}_7^{(0)})$．

定義　X, Y を各々 m, n 個の元から成る集合とし，S_m, S_n

を各々 X, Y に作用する m次, n次対称群とする このとき S_m と S_n の結合 $S_m[S_n]$ は $X\times Y$ に次のように作用する. 各 $a\in S_m$ と各列 $b_1,\dots,b_m\in S_n$ に対し $S_m[S_n]$ の元 $(a;b_1,\dots,b_m)$ が存在して $(a;b_1,\dots,b_m)(x_i,y_j)=(ax_i,b_iy_j)$ と定義する. 群 $S_m[S_n]$ の位数は $m!(n!)^m$ である.

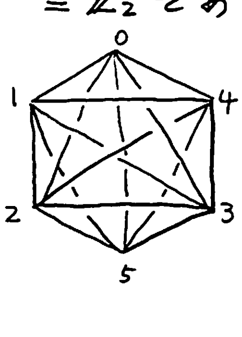
定理7 $\tilde{K}_6^{(0)}$ を完全グラフ K_6 の標準空間表現とすると
$TSG(\tilde{K}_6^{(0)})\cong S_2[S_3]$.

証明 先ず $S_2[S_3]$ は $\{0,1,2,3,4,5\}$ の置換群の部分群として生成元の集合 $\{(02),(04),(13),(15),(01)(23)(45)\}$ をもつ. $\tilde{K}_6^{(0)}$ は自明でない結び目又は絡み目として唯一つの Hopf link $\widetilde{[024]}\cup\widetilde{[135]}:=\tilde{\gamma}_1\cup\tilde{\gamma}_2$ をもつ. $TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ の全ての元は Hopf link $\tilde{\gamma}_1\cup\tilde{\gamma}_2$ を集合として保存するから $TSG(\tilde{K}_6^{(0)})\subset Aut(\gamma_1\cup\gamma_2)\cong S_2[S_3]$. そこで次に $S_2[S_3]$ の全ての元が $TSG(\tilde{K}_6^{(0)})$ に含まれることを示すのだが命題3によって $S_2[S_3]$ の全ての生成元に対しそのことが示されている. $\therefore\ TSG(\tilde{K}_6^{(0)})\cong S_2[S_3]$.

系、 K_6 の全ての標準空間表現 $\tilde{K}_6^{(0)}$ に対し $TSG(\tilde{K}_6^{(0)})\cong S_2[S_3]$ である.

証. 定理6によって K_6 の全ての標準空間表現は $\mathbb{R}^3$ の同相写像によって移り得る TSG は $\mathbb{R}^3$ の同相写像に関する不変量だから結果が得られたことになる.

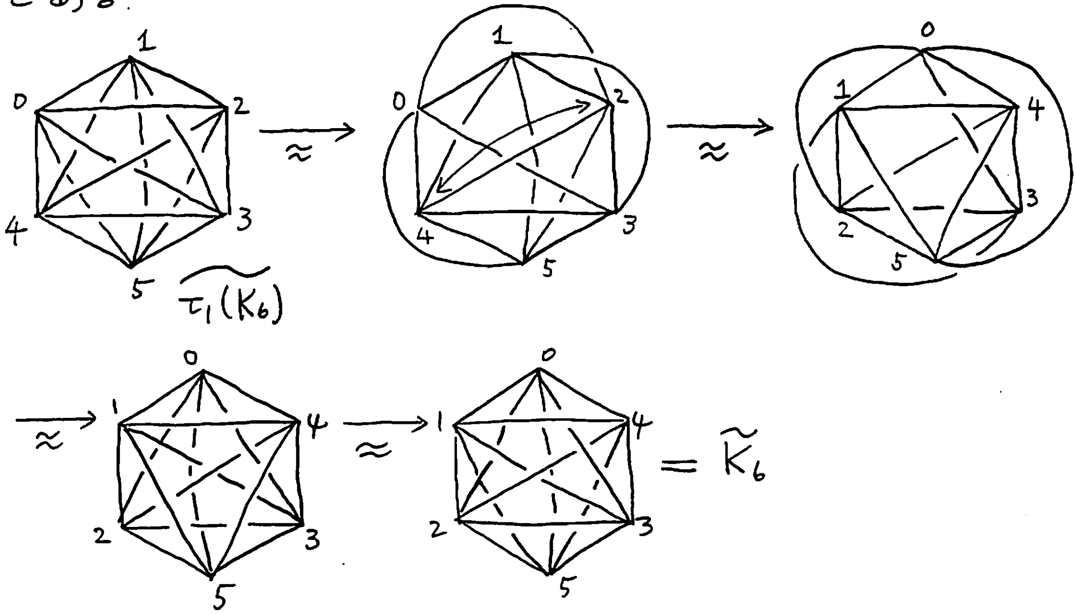
例. $\tilde{K}_6$ を下図のような K_6 の空間表現とする. すると $TSG(\tilde{K}_6)\cong\mathbb{Z}_2$ である. $\tilde{K}_5$ を頂点 $\{0,1,2,3,4\}$ をもつ $\tilde{K}_6$ の空間部分グラフとする すると $\tilde{K}_5$ は左手系 trefoil knot $\tilde{k}$ を含み, $\tilde{K}_6$ は自明でない結び目として $\tilde{k}$ のみをもち, 自明でない絡み目として次の3組の Hopf link を含む.



(1) サイクル $[013]\cup[245]:=H_1$ の像
(2) サイクル $[024]\cup[135]:=H_2$ の像

(3) サイクル $[124]\cup[035] := H_3$ の像

D_5 を位数10の二面体群とする 兄は $\tilde{K}_6$ 上の唯1つの自明でない結び目だから $\tau\in TSG(\tilde{K}_6)$ なら $\phi\circ f([02413]) = f\circ\tau([02413])$ である ここで $f: K_6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は $\tilde{K}_6 = f(K_6)$ となる埋め込みであり, ϕ は $\mathbb{R}^3$ の同相写像 従って $TSG(\tilde{K}_6) \subset D_5 \subset Aut(K_6) \cong S_6$.
ここで D_5 は長さ5のサイクル $[01234]$ の自己同形群になっている
$L = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ を K_6 の部分グラフとする $K_6 - L = \{[23],[34]\}$ (2辺). そこで $\tau\in TSG(\tilde{K}_6)$ なら $f\circ\tau(H_1\cup H_2\cup H_3) = \phi\circ f(H_1\cup H_2\cup H_3)$ 従って $f\circ\tau(K_6 - L) = \phi\circ f(K_6 - L)$. このことより頂点の順序3対 $(2,3,4)$ に対し もし $\tau_i \in TSG(\tilde{K}_6)$ $(i=0,1)$ で τ_i が $\{0,1,2,3,4,5\}$ の置換群の部分群として $\{(01234),(14)(23)\}$ で生成される D_5 の元でもあるなら $\tau_0((2,3,4)) = (2,3,4)$ 又は $\tau_1((2,3,4)) = (4,3,2)$ である. D_5 の元として $\tau_0 = id.$ であり $\tau_1 = (01234)^2 (14)(23)(01234)^{-2} = (01)(24)$ である. そのとき $\tau_1(H_1) = [103]\cup[425] = H_1$, $\tau_1(H_2) = [142]\cup[035] = H_3$, $\tau_1(H_3) = [042]\cup[135] = H_2$ (集合として). そして $\tau_1(\tilde{K}_6)$ は次の図によって $\tilde{K}_6$ にアンビエント・イソトピックであり, $\tau_1 \in TSG(\tilde{K}_6)$ となる. $TSG(\tilde{K}_6)$ は $\tau_0 = id.$ と τ_1 の2つの元のみを含み, $\tau_1^2 = id.$ だから $TSG(\tilde{K}_6) \cong \mathbb{Z}_2$ である.



参考文献

[C-G] Conway, J.H. & Gordon, C.McA. : Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory, 7 (1985) 445-453.

[K] Kobayashi, K : Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. vol. XXI (1) (1992) 117-140.

[T] Taniyama, K : Cobordism, homotopy and homology of graphs in $\mathbb{R}^3$, (preprint).

[W] White, A.T. : Graphs, Groups and Surfaces, North-Holland Math. Studies 8 (1984).

[Y] Yoshimatsu, Y : Topological symmetry group of standard spatial graph of K_5, Master Theses (Tokyo Woman's Christian Univ.) (in Japanese).