

Book presentation and Local unknottedness of spatial graphs.

小林一章 (東京女子大学)

以下ではグラフ G は特に断われない限り有限, 2-連結, 単純グラフとする. また埋め込みは *piecewise linear* とします. この論文では $[K1]$ で導入された *book presentation* と *local unknottedness* について更に述べる事にします. 定義を省略してあるものについては $[K1]$ または $[K2]$ を参照して下さい.

§1. Book presentation

定義1. $B_p = \square \cup \bigcup_{i=1}^p P_i$ を バインダー \square , シート数 p の本とし, G を *pseudo Hamilton graph* (*pseudo H-graph*) とする. Δ を G の一つの *Hamilton path* (*H-path*) とする. 埋め込み $\psi: G \rightarrow B_p$ は次の (1) - (3) を満足するとする.

$$(1) \psi(\Delta) \subset \square$$

$$(2) \forall e \in E(G) - E(\Delta) \text{ に対し } \psi(\text{Int}e) \subset P_i$$

$$(3) \forall P_i \text{ に対し } \exists e \in E(G) - E(\Delta) \text{ 7 } \psi(e) \subset P_i$$

このとき ψ を *H-path Δ に関する G の本表現 (B.P.H. Δ)* と定義する.

定義2. G を *pseudo H-graph* とし, Δ を G の一つの *H-path* とする. $e \in E(G) - E(\Delta)$ に対し, e の両端点を Δ 上で結んだ道 d とする. $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を埋め込みとし, $\tilde{G} = f(G)$, $\tilde{d} = f(d)$, $\tilde{e} = f(e)$, $\tilde{\Delta} = f(\Delta)$ とする. *cycle $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ が $\tilde{\Delta}$ に対し twining cycle であるとは $\partial \tilde{D}^2 = \tilde{d} \cup \tilde{e}$, $\tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \partial \tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \tilde{d} \cup \tilde{e}$ となるような *disk \tilde{D}^2 が \mathbb{R}^3 内に存在しない事* である.*

定理1. G を *pseudo H-graph* とし, \tilde{G} を G の *spatial graph* とする.

- (1) \tilde{d}, \tilde{e} を上で定義したものとするとき $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ が $\tilde{\Delta}$ に対し *twining cycle* なら $\tilde{G} \approx \psi(G)$ となるような B.P.H. Δ $\psi: G \rightarrow B_p$ は存在しない.

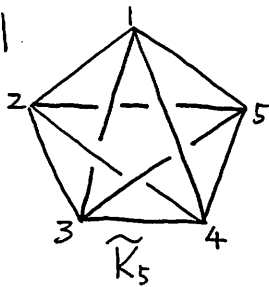
(2)

(2) $\forall e \in E(G) - E(\Delta)$ に対し $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ が $\tilde{\Delta}$ に対する *twining cycle* になっていなければ $\tilde{G} \approx \psi(G)$ とはならない B.P.H. $\Delta: G \rightarrow B_p$ が存在する

証明 (1) 背理法. $\tilde{G} \approx \psi(G)$ とはならない B.P.H. $\Delta: G \rightarrow B_p$ が存在したとすると. $\forall e \in E(G) - E(\Delta)$ に対し $\psi(e)$ はあるシート P_i に含まれるに含まれ, $\psi(d) \subset \square$ だから $\psi(d \cup e)$ は $\square \cup P_i$ 上で *disk* を張り, その *disk* は P_i に含まれる他の *edges* と交わるかも知れないが P_i から外れは必ずすることにより *disk* と $\psi(G)$ との交わりは $\psi(d \cup e)$ のみと決まる $\tilde{G} \approx \psi(G)$ だから従って \forall cycle $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ は *twining cycle* にならぬ.

(2) 必ず \tilde{G} を *ambient isotopy* で動かして $\tilde{\Delta}$ を "バンダ" - \square 上に乗せる $\{e_1, \dots, e_r\} = E(G) - E(\Delta)$, $r = \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$ とし, $\tilde{e}_1 \cup \tilde{d}_1$ は *twining cycle* ではないから $\partial \tilde{D}_1^2 = \tilde{d}_1 \cup \tilde{e}_1$, $\tilde{D}_1^2 \cap \tilde{G} = \partial \tilde{D}_1^2 \cap \tilde{G} = \tilde{d}_1 \cup \tilde{e}_1$ とは *disk* が存在する. 従って \square を動かす事は *ambient isotopy* によって $\tilde{d}_1 \cup \tilde{e}_1$ をシートに乗せることが出来る $\tilde{d}_2 \cup \tilde{e}_2$ 以下も同様にしてシートに乗せらぬ $\tilde{G} \approx \psi(G)$ とはならない B.P.H. $\Delta: G \rightarrow B_p$ が作れる

例



$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (12345) \\ \Delta_2 &= (13524) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{aligned}} \right\} \text{H-paths}$$

$$\equiv \text{B.P.H. } \Delta_1 \psi_1: K_5 \rightarrow B_p \nearrow \psi(K_5) \approx \tilde{K}_5 \quad (\text{F14})$$

$$\not\equiv \text{B.P.H. } \Delta_2 \psi_2: K_5 \rightarrow B_p \nearrow \psi(K_5) \approx \tilde{K}_5$$

⊙ $\tilde{e} = (14)$ とすると $\tilde{d} = (13524)$.

よって $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ は *trefoil knot* だから $\partial \tilde{D}^2 = \tilde{d} \cup \tilde{e}$ とは *disk* \tilde{D}^2 は無い. 即ち \tilde{e} は $\tilde{\Delta}_2$ に対す *twining cycle* 従って定理1

(1) より $\psi(K_5) \approx \tilde{K}_5$ とはならない B.P.H. $\Delta_2 \psi_2:$

$K_5 \rightarrow B_p$ は存在しない

定義3. G を pseudo H -graph とする. G が completely H -path book presentable とは 次の条件(*) を満足する G の spatial graph \tilde{G} があるときを言う

(*) \tilde{G} 上の全ての H -path Δ に対し $\tilde{G} \approx \Psi(G)$ とする B.P. $H \cdot \Delta \Psi: G \rightarrow B_p$ がある.

定義4. (Böhme). G を 連続グラフ とする. G が strongly discatenable とは 次の条件(**) を満足する G の spatial graph \tilde{G} があるときを言う

(**) \tilde{G} 上の 任意の cycle \tilde{C} に対し $\partial \tilde{D}^2 = \tilde{C}$, $\tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \partial \tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \tilde{C}$ とする disk \tilde{D}^2 がある

例 (Böhme) $\tilde{G} = v * \tilde{K}$, \tilde{K} は plane graph とする spatial graph \tilde{G} をもつ グラフ G は strongly discatenable.

従って 完全グラフ K_n ($n \leq 5$) は strongly discatenable である. また K_n ($n \geq 6$) は Conway-Gordon の定理 ([C-G]) によって 任意の spatial graph \tilde{K}_n が non-trivial link を含むから strongly discatenable ではない.

命題1. G を pseudo H -graph とする. G が strongly discatenable ならば completely H -path book presentable である.

証明. G が strongly discatenable だから (**) を満足する G の spatial graph \tilde{G} がある. 任意の辺 $e \in E(G) - E(\Delta)$ とその両端を Δ 上で結んだ path d を取ると cycle $\tilde{d} \cup \tilde{e}$ は (**) より twining cycle である. 従って 定理1(2) より $\tilde{G} \approx \Psi(G)$ とする B.P. $H \cdot \Delta \Psi: G \rightarrow B_p$ がある. 即ち G は completely H -path book presentable である.

定義5. pseudo H -graph G が H -path extendable とは G 内の 任意の path d に対し d を含む H -path Δ があるときを言う.

(4)

例 完全グラフ K_n は H -path extendable である

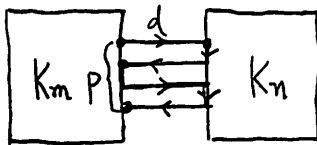
命題 2. pseudo H -graph G が H -extendable であるとする.
このとき G が completely H -path book presentable なら
 G は strongly discatenable である

証明. 背理法で証明する G が strongly discatenable ではない
なら G の \tilde{G} は spatial graph \tilde{G} に対して \tilde{G} 上の cycle \tilde{C} で
 $\tilde{C} = \partial \tilde{D}^2$, $\tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \partial \tilde{D}^2 \cap \tilde{G} = \tilde{C}$ となる disk \tilde{D}^2 をまたはいち
がある \tilde{C} 上の 1 つの辺を \tilde{e} とし $\tilde{d} = \tilde{C} - \tilde{e}$ とおく. G は H -path
extendable だから \tilde{d} を含む H -path $\tilde{\Delta}$ がある $\tilde{C} = \tilde{d} \cup \tilde{e}$ は
 $\tilde{\Delta}$ に対し twining cycle になっているので定理 1 (1) より $\tilde{G} \approx \psi(G)$
となるような B. P. H. Δ $\psi: G \rightarrow B_p$ はない. G の任意の
spatial graph \tilde{G} についてこのようなことが言えるので G は
completely H -path book presentable ではない

例 完全グラフ K_n は H -path extendable である 従って K_n に
1 を加えては

strongly discatenable である \iff completely H -path book
presentable である

例. G は下図の K_m と K_n の異なる p 個の
頂点を p 本の辺で結んだようなグラフとする. ただし $p < \min(m, n)$
かつ p は偶数とする



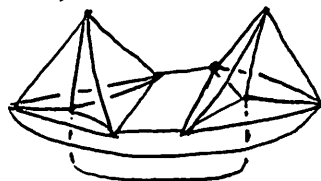
(1) G は Hamilton graph である.

(2) G は H -path extendable ではない

(3) $\max(m, n) \geq 6$ なら G は completely
 H -path book presentable ではない.

(何故なら K_6 を含んでいないから) $\max(m, n) \leq 5$ なら strongly
discatenable である

右図の diagram から strongly
discatenable であることが
わかる



(4)

§2. The sets of book presentations and locally unknottedness

定義6. G を pseudo H -graph とする.

\tilde{G} は G の spatial graph とする

$\tilde{E}(B_p(G)) \equiv \{ \tilde{G} \mid \tilde{G} \approx \psi(G), \psi: G \rightarrow B_p: B.P.H. \Delta \text{ for some } H\text{-path } \Delta \} / \approx$ amb. isotopy of S^3 .

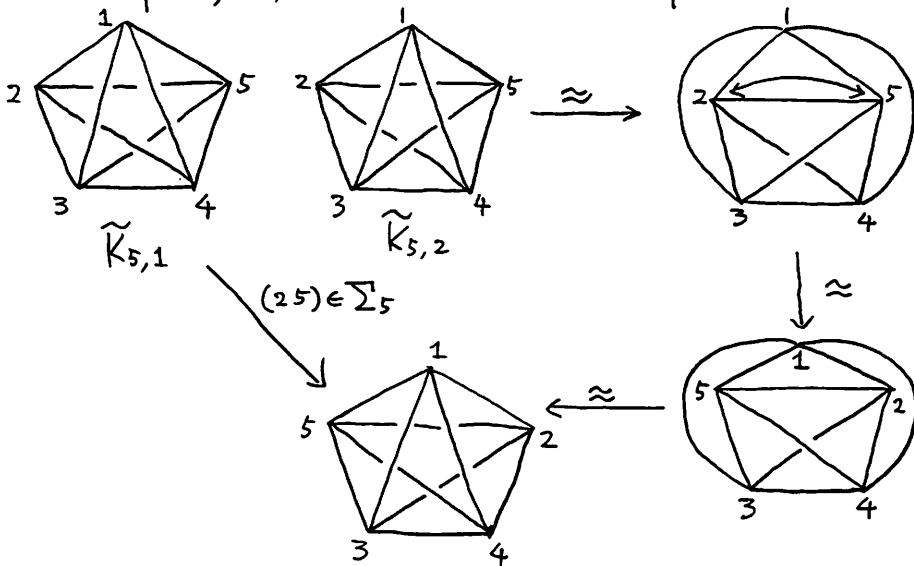
$E(B_p(G)) \equiv \tilde{E}(B_p(G)) / \text{Aut}(G)$ $\exists \exists \exists$ $\text{Aut}(G)$ は グラフ G の 同形の作る群

(例えは $G = K_n$ の時 $\text{Aut}(G) = \Sigma_n$ (n 次対称群).)

$E_0(B_p(G)) \equiv E(B_p(G)) / (*)$ $*$: $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$.

\tilde{E}, E, E_0 等は単なる集合で群ではない.

例. 次の K_5 の2つの spatial graphs $\tilde{K}_{5,1}$ と $\tilde{K}_{5,2}$ は $\tilde{E}(B_p(G))$ と $E(B_p(G))$ の差を示す例である $G = K_5$.



従って $\tilde{K}_{5,1}$ と $\tilde{K}_{5,2}$ は $E(B_p(K_5))$ では同じ class だが $\tilde{E}(B_p(K_5))$ では異なる class に属する (異なる class に属することを示すには Simon's invariant を計算する).

例. $G = K_4$ のとき $E(B_p(K_4))$ に対して $2 \leq p \leq 3$ であり

$$|E(B_2(K_4))| = |E(B_3(K_4))| = 1 \quad ([K_1]).$$

$G = K_5$ のとき $E(B_p(K_5))$ に対して $3 \leq p \leq 6$ であり

$$|E(B_3(K_5))| = 1 \quad ([K_1]).$$

また B. P. H. $\Delta \psi: K_5 \rightarrow B_5$ に対して任意の cycle が自明な knot のものと right handed trefoil を含むものと left handed trefoil を含むものがあるので $|E(B_5(K_5))| \geq 3$.

実際 $|E(B_3(K_5))| = |E(B_4(K_5))| = 1$,

$$|E(B_5(K_5))| = |E(B_6(K_5))| = 3 \text{ が後に示される.}$$

$G = K_6$ のとき $E(B_p(K_6))$ に対して $3 \leq p \leq 10$ であり.

$$|E(B_3(K_6))| \geq 1.$$

$G = K_7$ のとき $E(B_p(K_7))$ に対して $4 \leq p \leq 15$ であり.

$|E(B_4(K_7))| \geq 2$. (r-trefoil を含むものと l-trefoil を含むものがある).

命題 3 (1) G を pseudo H-graph とすると $p \leq |E(G)| - |V(G)|$ に対し $E(B_p(G)) \subset E(B_{p+1}(G))$ が成り立つ.

(2) G を H-graph とし, Δ を H-cycle に含まれる H-path とする. $p = |E(G)| - |V(G)|$ に対し $E_c(B_p(G)) = E_c(B_{p+1}(G))$ が成り立つ. 従って $E_c(B_p(G))$ は $\tilde{E}(B_p(G))$ の定義の H-path Δ を H-cycle に含まれる H-path に制限したものである.

証. (1) $\tilde{G} \in E(B_p(G))$ とするとある H-path Δ に対し $\tilde{G} \approx \psi(G)$ とする B. P. H. $\Delta \psi: G \rightarrow B_p$ が存在する. 同じ Δ と ψ を利用して 1-sheet 増やし $\psi(G)$ の中の少くとも一つの辺をその新しい sheet に移すことに依り $\tilde{G} \approx \hat{\psi}(G)$ とする B. P. H. $\Delta \hat{\psi}: G \rightarrow B_{p+1}$ を得る. $\therefore \tilde{G} \in B_{p+1}(G)$

(2) $\tilde{G} \in E_c(B_{p+1}(G))$, $p = |E(G)| - |V(G)| = |E(G)| - (|V(G)| - 1) - 1$.

とするとある H-cycle C に含まれる H-path Δ に対し $\tilde{G} \approx \psi(G)$ とする B. P. H. $\Delta \psi: G \rightarrow B_{p+1}$ がある. p についての条件より

B_{p+1} の各シートは $E(G) - E(\Delta)$ に含まれる辺を唯一つのみ

含む. H-path Δ は H-cycle C に含まれているから $E(C) - E(\Delta)$

$= \{e_0\}$ となる辺 e_0 がある この $\psi(e_0)$ は ambient isotopy で B_{p+1} のどのシートにも移せる 従って Δ と ψ を利用して $\psi(e_0)$ を B_{p+1} の他のシートに ambient isotopy で移すことにより $\tilde{G} \approx \check{\psi}(G)$ となる B.P.H. $\check{\psi}: G \rightarrow B_p$ が存在する
 $\therefore E_c(B_{p+1}(G)) \subset E_c(B_p(G))$
 (1) の結果と合わせて $E_c(B_p(G)) = E_c(B_{p+1}(G))$ となる

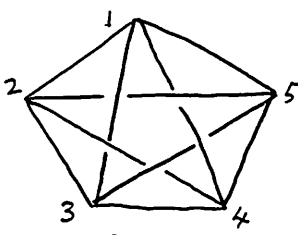
定理 (Endo [E]). 任意の有限グラフ G に対し
 $E(\mathcal{LU}(G)) \neq \emptyset$.

(任意の pseudo H-graph G に対し 適当に p を取ると)
 $E(B_p(G)) \neq \emptyset$ となることは [K1, Prop. 8'] に証明してある。

命題 4. (1) 任意の pseudo H-graph G と任意の p に対し
 $E(B_p(G)) \subset E(\mathcal{LU}(G))$.

(2) K_n を n 頂点の完全グラフとする. $n \leq 4$ のとき $E(B_1(K_3)) = E(\mathcal{LU}(K_3))$, 又 $p = 2, 3$ に対し $E(B_p(K_4)) = E(\mathcal{LU}(K_4))$.
 $n \geq 5$ のとき 任意の p に対し $E(B_p(K_n)) \subsetneq E(\mathcal{LU}(K_n))$.

証明. (1) ([K1, Prop. 9. Cor. 1]) より $\psi: G \rightarrow B_p$ が B.P.H. Δ の時 $\psi(G)$ は locally unknotted であるから $E(B_p(G)) \subset E(\mathcal{LU}(G))$.
 (2) $n \leq 4$ の時 K_n が locally unknotted である ([K1, Example 1]) より $E(\mathcal{LU}(K_3)) \subset E(B_1(K_3))$ 又 $p = 2, 3$ に対し $E(\mathcal{LU}(K_4)) \subset E(B_p(K_4))$ となつてゐる事がわかる. そこで (1) の結果と合わせて等号が成立する. $n \leq 4$ のとき 上記以外のシート数 に対しては $E(B_p(K_n)) = \emptyset$ である. $n \geq 5$ のとき 左図の



$\tilde{K}_{5,k}$

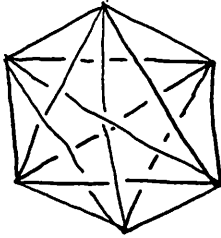
\tilde{K}_n の作り方

K_5 の spatial graph $\tilde{K}_{5,k}$ は 5_1 -knot を含みから ([K1, Prop. 10]) より $\tilde{K}_{5,k} \notin E(B_p(K_5))$, しかし $\tilde{K}_{5,k}$ は loc. unknotted である. 従つて $E(B_p(K_5)) \subsetneq E(\mathcal{LU}(K_5))$.

$n \geq 6$ のとき 上の $\tilde{K}_{5,k}$ を利用して 次のようにして

K_n の spatial graph \tilde{K}_n が作れる. 先ず最初 n の 5 つの頂点を利用して $\tilde{K}_{5,k}$ を

作っておく 次に6番目の頂点から他の1~5の頂点へ全ての辺の下を
 通って辺を引く. 更に7番目の頂点から他の1~6の頂点へ
 (もし今迄引いた辺に交わるなら) 全ての辺の下を
 通って辺を引く. 以下同様



このようにして作った \tilde{K}_n は $E(\mathcal{L}\mathcal{U}(K_n))$ に含まれる
 次にこの \tilde{K}_n は $\tilde{K}_n \notin E(B_p(K_n))$ である
 ことを示す 先ず $\tilde{K}_6 \in E(B_p(K_6))$ を示す.

K_6 のある H-path $\Delta = (i_1, i_2, \dots, i_6)$ に対する

B. P. H. Δ $\psi: K_6 \rightarrow B_p \int \psi(K_6) \approx \tilde{K}_6$ があつたとすると
 Δ を含む H-cycle C の任意の subpath になつてゐる H-path Δ'
 に対し B. P. H. Δ' $\psi': K_6 \rightarrow B_p \int \tilde{K}_6 \approx \psi'(K_6)$ がある.

Δ においてある j に対し $i_j = 6$ とつてゐる $\Delta' = (i_{j+1}, \dots,$
 $i_6, i_1, \dots, i_{j-1}, i_j)$ とおく. $\hat{\Delta} = (i_{j+1}, \dots, i_6, i_1, \dots, i_{j-1})$ とおくと

$\hat{\Delta}$ は K_6 の部分グラフ K_5 の H-path であり B. P. H. $\hat{\Delta}$ $\hat{\psi}$ を
 $\hat{\psi} = \psi' |_{K_6 - \{6\}}: K_5 \rightarrow B_p \subset B_p$ とおくと $\hat{\psi}(K_5) \approx \tilde{K}_{5,R}$

これは $\tilde{K}_{5,R} \notin E(B_p(K_5))$ に矛盾. 従つて Δ に対する

B. P. H. Δ $\psi: K_6 \rightarrow B_p \int \psi(K_6) \approx \tilde{K}_6$ 即ち $\tilde{K}_6 \in E(B_p(K_6))$

以下順次示せて最後に $\tilde{K}_n \in E(B_p(K_n))$ が示せる.
 故に $n \geq 5$ のとき $E(B_p(K_n)) \subsetneq E(\mathcal{L}\mathcal{U}(K_n))$ である.

命題 5. G を有限 2-連結単純グラフとすると

$$|E(\mathcal{L}\mathcal{U}(G))| < \infty \text{ である.}$$

証明. G 上で simple closed curve で表現される cycles の数は
 有限個であり, その内 γ 個取り出して $H_1(G; \mathbb{Z})$ の基となる組み
 合わせが有限個ある \tilde{G} を G の locally unknotted spatial
 graph とすると loc. unknotted の定義より $\tilde{G} \cong \mathbb{R}^3 \setminus \gamma (= \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z}))$
 個の 2-cells $\bigcup_{i=1}^{\gamma} \tilde{D}_i^2$ が張れ, $\tilde{H} = \tilde{G} \cup \bigcup_{i=1}^{\gamma} \tilde{D}_i^2$ とすると \tilde{H} は
 2次元複体で \tilde{H} の正則近傍 $U(\tilde{H})$ の境界 $\partial U(\tilde{H})$ は 2次元
 球面 ($[K_1, \text{Prop. 4}]$) となる この \tilde{H} は $H_1(G; \mathbb{Z})$ の基を 1 つ取り
 出して 2-cells を張つて出来る 2次元複体 H の S^3 内での representation
 である. H に対して \tilde{H} は一意には無いか \tilde{H} を 2次元単体によつて

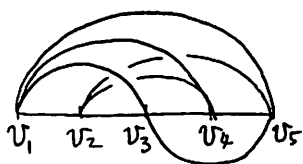
切り出しでいくと S^2 上の polygram $[Y]$ となるから. H を切り出し
て出来る 2次元複体の S^2 上への実現と見なせる. これは H に対し
て有限個しかない. 即ち H から出来る \hat{H} は有限個である
故に $|E(\mathcal{L}\mathcal{U}(G))| < \infty$

命題 6 $E(B_3(K_5)) = E(B_4(K_5))$ であって $|E(B_3(K_5))| = 1$.

$E(B_5(K_5)) = E(B_6(K_5))$ であって $|E(B_5(K_5))| = 3$.

証. 先ず $|E(B_3(K_5))| = 1$ は $([K_1, Prop. 13])$ よりわかる.

下図の ψ は $B, P, H, \Delta \psi: K_5 \rightarrow B_p$ (図上の交差実は無意).

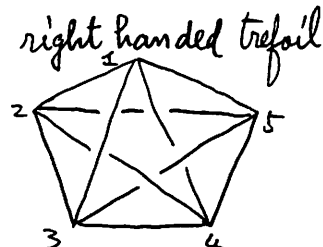
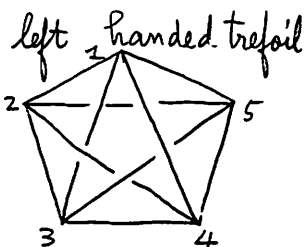
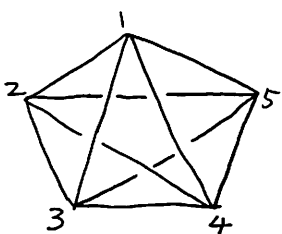
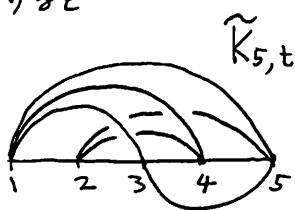


とすると 辺 $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1$ 上には
交差実はない. 残りの辺は $v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5,$
 v_3v_5 で交差実の出来るのは次の辺の対
である. $(v_1v_3, v_2v_4), (v_1v_3, v_2v_5), (v_1v_4, v_2v_5)$

$(v_1v_4, v_3v_5), (v_2v_4, v_3v_5)$. このうち一つの辺を下に移すと
交差実の数が減る

Case I. 辺 v_1v_3 を binder より下に移すと交差実の出来るのは次の
辺の対; $(v_1v_4, v_2v_5), (v_1v_4, v_3v_5), (v_2v_4, v_3v_5)$. (binder の
の上方にある辺は $v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5$).

辺 $v_i v_j$ が辺 $v_k v_l$ の上を通っている時 $v_i v_j > v_k v_l$ と書くことに
すると



$$(1) \underbrace{v_1 v_4 > v_2 v_4 > v_2 v_5 > v_3 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$B_3 = \lambda \bar{3} \text{ かつ } \tilde{K}_{5,t} \text{ 是 ambient isotopic } ([K_1, \text{Prop. 13}])$

$$(2) \underbrace{v_1 v_4 > v_2 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$B_3 = \lambda \bar{3} \text{ かつ } \tilde{K}_{5,t} \text{ 是 amb. isotopic}$

$$(3) \underbrace{v_1 v_4 > v_2 v_5 > v_2 v_4 > v_3 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(4) \underbrace{v_1 v_4 > v_2 v_5 > v_3 v_5 > v_2 v_4 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(5) \underbrace{v_1 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_4 > v_2 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(6) \underbrace{v_1 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_5 > v_2 v_4 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(7) \underbrace{v_2 v_4 > v_1 v_4 > v_2 v_5 > v_3 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(8) \underbrace{v_2 v_4 > v_1 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(9) \underbrace{v_2 v_4 > v_2 v_5 > v_1 v_4 > v_3 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(10) \underbrace{v_2 v_4 > v_2 v_5 > v_3 v_5 > v_1 v_4 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(11) \underbrace{v_2 v_4 > v_3 v_5 > v_1 v_4 > v_2 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_5$$



$$(12) \underbrace{v_2 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_5 > v_1 v_4 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(13) \underbrace{v_2 v_5 > v_1 v_4 > v_2 v_4 > v_3 v_5 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(14) \underbrace{v_2 v_5 > v_1 v_4 > v_3 v_5 > v_2 v_4 > v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_5$$



$$(15) \quad v_2 v_5 > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_3 v_5} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3.$$

$$(16) \quad v_2 v_5 > \overbrace{v_2 v_4} > v_3 v_5 > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(17) \quad v_2 v_5 > \overbrace{v_3 v_5} > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3.$$

$$(18) \quad v_2 v_5 > \overbrace{v_3 v_5} > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3.$$

$$(19) \quad \overbrace{v_3 v_5 > v_1 v_4 > v_2 v_4} > v_2 v_5 > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(20) \quad \overbrace{v_3 v_5 > v_1 v_4 > v_2 v_5 > v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(21) \quad \overbrace{v_3 v_5 > v_2 v_4 > v_1 v_4} > v_2 v_5 > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(22) \quad v_3 v_5 > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_2 v_5} > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(23) \quad \overbrace{v_3 v_5 > v_2 v_5 > v_1 v_4} > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3$$

$$(24) \quad \overbrace{v_3 v_5 > v_2 v_5} > \overbrace{v_2 v_4} > \overbrace{v_1 v_4} > \overbrace{v_1 v_3} \approx \tilde{K}_{5,t} \subset B_3.$$

$v_3 v_5$ を binder の下方に移しても 頂点の番号を置換 (13524) に
 して変えることにより上と同じになる.

$v_2 v_4$	"	"	"	(12345) =
$v_1 v_4$	"	"	"	(14253) =
	"	"	"	

以上より $G = K_5$ に $\exists \Gamma \perp Z \Gamma$

$$\varepsilon(B_3(K_5)) = \varepsilon(B_4(K_5)) \text{ である } |\varepsilon(B_3(K_5))| = 1$$

$$\varepsilon(B_5(K_5)) = \varepsilon(B_6(K_5)) \text{ であって } |\varepsilon(B_5(K_5))| = 3.$$

注 上の (1) ~ (24) の分類は B. P. H. $\Delta \psi(K_5)$ が 3-シートの本 B_3 に含まれるから $\psi(K_5) \approx \tilde{K}_{5,t}$ となる結果 ([K₁, Prop. 13]) を使っている

参考文献

- [B] Böhme, T: On spatial representations of graphs, Contemporary methods in graph theory. 151-168
- [C-G] Conway, J. H. and Gordon, C. McA: Knots and links in spatial graphs, J. of graph theory vol. 7 (1983) 445-453
- [E] Endo, T: Master Theses, Waseda Univ.
- [K₁] Kobayashi, K.: Standard spatial graph (to appear in Hokkaido Journal of Mathematics)
- [K₂] Kobayashi, K.: Standard spatial graph (in Japanese) Hakone Seminar '90
- [Y] Yamashita, M.: Deformations of DS-diagrams, Topology and Computer Science, 81-138 (1987).