

Standard Spatial Graph

小林一章 (東京女子大学)

§0. Introduction

この論文では standard spatial graph をどのように定義するかを論ずる 例えは cycle graph, cycle graph の和, planar graph 等に際してはこれらの standard spatial graph は各々 trivial knot, trivial link, plane graph であると定義してやれば良い しかしながら一般の有限グラフに於いては図1のようにその正則直線の内部の補空間はハンドル体になっているか それ自身は明らかに

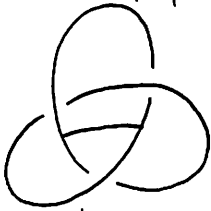


図1

かに“標準的”でないものや 完全グラフ K_n のように n が大きくなるとどんな spatial graph \tilde{K}_n も 自明でない 絡み目や 結び目を含んでしまうものがあって 何を“標準的”なものにしたら良いかは 仲々難しい問題である グラフ理論の方から

グラフの最小種数, 最大種数, thickness 等の概念があるか これらは knot theory の立場からはあまり有効な概念とは思えない knot theory の立場から “standard embedding” (すなわち “standard spatial graph”) が満足すべき性質は次のようなものであると考えられます G を有限グラフ, \tilde{G} をその “standard” spatial graph としたとき

- (I) $\pi_1(S^3 - \tilde{G})$ は階数が $\text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$ に等しい自由群
- (II) 任意の有限グラフ G は “standard” spatial graph を持つ.
- (III) G の2つの “standard” spatial graph \tilde{G}_1, \tilde{G}_2 は何らかの意味で同値である

例えは G が cycle graph (= 円周に同相) 又は cycle graph の和集合, planar graph の時は “standard” spatial graph は trivial knot, trivial link, plane graph であり 次のような定理がある

- (1) 結び目 K が自明である $\iff \pi_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ ([5])
- (2) 絡み目 L が自明である $\iff \pi_1(S^3 - L) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_n$ ここで $n = L$ の成分の数

- (3) G が planar graph の時 その spatial graph \tilde{G} が plane

$\Leftrightarrow \tilde{G}$ の全ての spatial subgraph \tilde{H} に対し $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$ が free ([6]).
 この場合, 上の (III) の「何らかの意味で同値」は ambient isotopy
 に等して同値と言える.

上の (3) の場合の必要条件を一般の "standard embedding" に採用
 する事は出来る. 何故なら n が大きい完全グラフ K_n ではその全ての
 spatial graph が自明でない結ぶ目や絡み目を含まからである.
 standard spatial graph の候補に我々は次の3つの概念を上げる

- ① well-situated base に等して locally unknotted
 - ② triangle base に等して locally unknotted
 - ③ book presentation with minimal sheets
- ③ の概念が standard spatial graph として最も適当と思われる

§1 Local unknottedness and global unknottedness

この論文では断片的に限り degree 1 または 2 の頂点を持つグラフ
 を考える. 又 "standard" spatial graph を考えるので cut edges を
 持たない simple graph のみを考えて置く. G をグラフとし $\chi = \text{rank } H_1$
 $(K; \mathbb{Z})$ とする. また $H_1(K; \mathbb{Z})$ の基として単純閉曲線で表現出来る
 元から成る $\{x_1, \dots, x_\chi\}$ のみを考える. $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ (or S^3) は各辺
 毎に微分可能に埋め込みとする. このとき $\tilde{G} = f(G)$ を G の spatial
 graph という.

定義 1. spatial graph \tilde{G} に対し次の条件を満足する $H_1(G; \mathbb{Z})$ の基
 $\{x_1, \dots, x_\chi\}$ と写像 $\psi: \bigcup_{i=1}^{\chi} D_i^2 \rightarrow S^3$ があるとき \tilde{G} を locally
 unknotted という.

- (1) $\psi(\partial D_i^2) = \tilde{C}_i$ $\therefore \tilde{C}_i$ は \tilde{G} 上の x_i を表現している単純閉曲線
- (2) $\psi(\bigcup_{i=1}^{\chi} \partial D_i^2) = \tilde{G}$
- (3) $\psi|_{D_i^2}$ は各 $i = 1, 2, \dots, \chi$ に対し埋め込みになっている.
- (4) $\psi(\text{Int } D_i^2) \cap \psi(\text{Int } D_j^2) = \emptyset$ ($i \neq j$)
- (5) $\psi(D_i^2) \cap \tilde{G} = \psi(\partial D_i^2) \cap \tilde{G} = \tilde{C}_i$.

定義 2. spatial graph \tilde{G} がある指定された基 $\{x_1, \dots, x_\chi\}$ に関し

locally unknotted であるとは その指定された基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ ($r=1$) に対し 定義1の (1) - (5) を満足する写像 $\psi: \bigcup_{i=1}^r D_i^2 \rightarrow S^3$ がある時をいう。

定義3. spatial graph \tilde{G} 上の全ての単純閉曲線 \tilde{C} が 自明な knot である時 \tilde{G} は globally unknotted であるという。

定義4. spatial graph \tilde{G} 上の交わりない単純閉曲線の任意の集合 $\{\tilde{C}_i\}$ に対し $\tilde{C}_1 \cup \dots \cup \tilde{C}_\mu$ が 自明な link の時 globally unlinked という。

命題1 spatial graph \tilde{G} の任意の spatial subgraph \tilde{H} に対し $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$ が 自由群ならば \tilde{G} は globally unknotted かつ globally unlinked 。

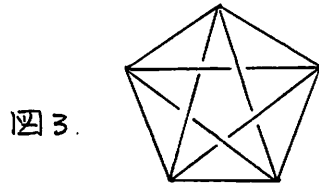
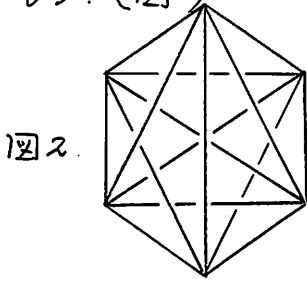
定義5. グラフ G の全ての spatial graph \tilde{G} が non-trivial knot を含む時 G は self-knotted という。又 G の全ての spatial graph \tilde{G} が non-trivial link を含むならば G は self-linked という。
([2]) によつて K_n ($n \geq 6$) は self-linked であり, K_n ($n \geq 7$) は self-knotted である。

命題2 G が self-knotted graph ならば G の全ての spatial graph は globally unknotted である。同様に G が self-linked graph ならば G の任意の spatial graph は globally unlinked である。

命題3 spatial graph \tilde{G} が 2次元球面 S^2 に含まれるならば locally unknotted, globally unknotted かつ globally unlinked 。

注. 命題3の逆は成立しない。完全グラフ K_5 は 自明な knot を含む spatial graph \tilde{K}_5 をもつが K_5 は planar であるのでこの \tilde{K}_5 は S^2 に含まれない。

定理1 全ての完全グラフは *locally unknotted spatial graph* をもつ. (図2)



例1. $n=3, 4, 5$ の時の *locally unknotted complete graph* \tilde{K}_n .

$n=3, 4$ の時

locally unknotted \iff *globally unknotted*

$n=5$ の時 *locally unknotted* だが *globally unknotted* ではない *spatial graph* \tilde{K}_5 がある (図3).

例2. 図4の *spatial graph* \tilde{K}_5 は *locally unknotted*, *globally unknotted* で $\pi_1(S^3 - \tilde{K}_5)$ は階数が6の自由群. 一方図3の \tilde{K}_5 は *locally unknotted*, *globally knotted* で $\pi_1(S^3 - \tilde{K}_5)$ は階数6の自由群. 図5の *spatial graph* $\tilde{\Theta}$ は (単純グラフではないが) *locally knotted*, *globally knotted* で $\pi_1(S^3 - \tilde{\Theta})$ は

図4. 階数2の自由群

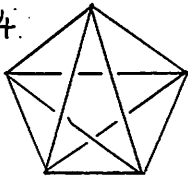


図3のような \tilde{K}_5 も *locally unknotted* になってしまっているので単純な *locally unknotted* は *standard spatial graph* としては条件が弱いのでもっと制限された *locally spatial graph* を次に導入する.

補助定理1. G を連結グラフとし T_G を G の *maximal tree* とする

$\gamma = \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$ とすると $\gamma = |E(G)| - |E(T_G)|$ である. $\therefore |E(G)| - |E(T_G)|$ は各々グラフ G, T_G の辺の個数

補助定理2 G を連結グラフとし T_G を G の maximal tree とする
 $E(G) - E(T_G) = \{e_1, \dots, e_r\}$ ($r = \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$) なら $H_1(G; \mathbb{Z})$ の
 基で次の (1), (2) を満足するものがある

- (1) x_i の表現曲線 C_i は e_i を1回だけ通る。
 (2) $\text{Int}(e_i) \cap C_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

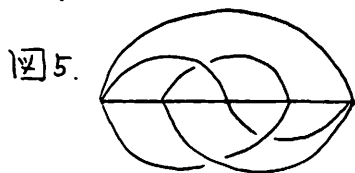
定義6. 上の補助定理2の条件(1), (2)を満足する $H_1(G; \mathbb{Z})$ の基を
 maximal tree T_G に対し well-situated base という。勿論この基は T_G
 の取り方に依存する。

そこで pseudo Hamilton graph の定義の後で次の命題4が証明
 される

命題4. G が pseudo Hamilton graph なら その maximal tree
 T_G に対する well-situated base $\{x_1, \dots, x_r\}$ に対し locally
 unknotted なら unknotted なら G の spatial graph \tilde{G} がある。

命題5 spatial graph \tilde{G} が G の maximal tree T_G に対する well-
 situated base $\{x_1, \dots, x_r\}$ に対し loc. unknotted なら $\pi_1(S^3 - \tilde{G})$
 は $\text{rank } r (= \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z}))$ の自由群である

例. ある maximal tree Δ に対する well-situated base に対し
 locally unknotted であるが globally unknotted ではない spatial
 graph \tilde{K}_5 がある。(図5)



次の定義は完全グラフに對するもう一つの制限された locally unknotted
 である。

定義7. $H_1(K_n; \mathbb{Z})$ のある基 $\{x_1, \dots, x_r\}$ の全ての元 x_i が長さ3の
 cycle で表現されるならこの基を triangle base という。

注. 図3の spatial graph \tilde{K}_5 は locally unknotted ではないか
 どの triangle base に [1] しても locally unknotted ではない

命題6. 全ての完全グラフ K_n はある triangle base に [1] し locally unknotted であるという spatial graph \tilde{K}_n をもつ.

例 ある triangle base に [1] し locally unknotted ではないが globally unknotted ではない spatial graph \tilde{K}_5 がある

§2 Book presentation.

定義8. $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, y \geq 0\}$ とし 以下帰納的に

$$P_2 = \{(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 = y \cos \theta - z \sin \theta, z_2 = y \sin \theta + z \cos \theta, \\ (x, y, z) \in P_1, \theta = 2\pi/n\}$$

.....

$$P_k = \{(x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid y_k = y \cos \theta - z \sin \theta, z_k = y \sin \theta + z \cos \theta, \\ (x, y, z) \in P_1, \theta = 2(k-1)\pi/n\}$$

.....

$$P_n = \{(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3 \mid y_n = y \cos \theta - z \sin \theta, z_n = y \sin \theta + z \cos \theta, \\ (x, y, z) \in P_1, \theta = 2(n-1)\pi/n\} \quad \text{とする}$$

$$B_n = \bigcup_{i=1}^n P_i \quad \text{を } n \text{ シートをもつ本という. } \square = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^n P_i \quad \text{を } B_n \text{ のバインダー (binder) いう.}$$

$\psi: G \rightarrow B_n$ を次をみたす埋め込みとする

(1) $\psi(V(G)) \subset \square \subset B_n$

(2) 任意の辺の像 $\tilde{e} = \psi(e)$ は唯一枚のシートに含まれる

(3) 全てのシート P_i は少なくとも1つの辺の像 $\psi(e)$ を含む

このとき $\tilde{G} = \psi(G)$ を G の n シートをもつ book presentation いう.

明らかに $0 \leq n \leq |E(G)|$ である. n が最小の時 \tilde{G} は G の book presentation with minimum sheets いう.

命題7 任意の有限グラフは book presentation をもつ

定義9 ある有限グラフ G に対し G の全ての頂点を含む simple path があるとき その path を Hamilton path といい, G を pseudo Hamiltonian という. Δ をある Hamilton path とし $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$ を $\psi(\Delta) \subset \Sigma$ とする book presentation とする この時 $\tilde{G} = \psi(G)$ を Hamilton path Δ に1次元する book presentation と呼び, ψ を B.P.H. Δ とかく

命題7' 任意の pseudo Hamilton graph は B.P.H. Δ をもつ

定義10 G を pseudo Hamiltonian とし Δ を Hamilton path とする.

$\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$ を B.P.H. Δ とする H を Δ を含む G の部分グラフ とするとき $\tilde{H} = \psi(H)$ を G の B.P.H. Δ に1次元する spatial subgraph という.

命題8 G が pseudo Hamiltonian で $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}$ が B.P.H. Δ の時 G の B.P.H. Δ に1次元する任意の spatial subgraph \tilde{H} に対し $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$ は階数が $\text{rank } H_1(H; \mathbb{Z})$ に等しい自由群である (これは Scharleman-Thompson の定理のある種の拡張である)

注 命題8. に於いて \tilde{H} が G の B.P.H. Δ に1次元する spatial subgraph でなければ $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$ は必ずしも自由群でない 図6 に於いて

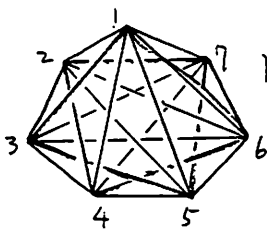


図6.

cycle 1-3-5-7-2-4-6-1 を \tilde{H} とすると \tilde{H} は trefoil knot なのて $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$ は free でない \tilde{H} は \tilde{G} の Hamilton subgraph ではないか B.P.H. Δ に1次元する spatial subgraph ではないか

定理2 G を pseudo Hamiltonian とし $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}$ を B.P.H. Δ とする このとき G の B.P.H. Δ に1次元する任意の spatial subgraph \tilde{H} は locally unknotted である

注 定理2の逆は成立しない 図3の \tilde{K}_5 は *locally unknotted* であるが 5_1 knot を含むために次の命題9によってこの \tilde{K}_5 はどんな B.P.H. Δ にも *ambient isotopic* でない.

命題7と定理2を組み合わせると次の様な定理1の拡張が得られる系 G が pseudo Hamiltonian なら G は *locally unknotted spatial graph* をもつ.

命題9 完全グラフ K_5 の任意の B.P.H. Δ は自明な knot または trefoil knot のみを含む.

次の命題10は命題4及び定理2より強い結果である.

命題10 G を Hamilton path Δ をもつ pseudo Hamiltonian とし $\psi: G \rightarrow \mathcal{B}_p$ を B.P.H. Δ とする. このとき G の B.P.H. Δ に属する任意の spatial subgraph \tilde{H} は H の maximal tree Δ に属する well-situated base $\{x_1, \dots, x_r\}$ に属し *locally unknotted* である

定理3. K_n を完全グラフとし $\psi: K_n \rightarrow \mathcal{B}_p$ を p -シート持つ B.P.H. Δ とすると $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \leq p \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ である ここで $\lfloor \ \rfloor$ はガウス記号

命題11. K_n を完全グラフとし $\psi: K_n \rightarrow \mathcal{B}_p$ を p -シート持つ B.P.H. Δ とすると 次が成立つ

- (1) $p \geq 2$ という事と spatial graph $\tilde{K}_n = \psi(K_n)$ が plane graph である事は同値である. これは任意の Hamilton graph G と B.P.H. Δ に属して同じ事が言える.
- (2) $n \geq 6$ で p が最小なら $p \leq n-3$ である

定義11. $\mathcal{B}_p = \bigcup_{i=1}^p P_i$ を p -シートもつ本とする $h: \mathcal{B}_p \rightarrow \mathcal{B}_p$ を次を満足する同相写像とする. (1) $h|_{\square} = \text{id}$.

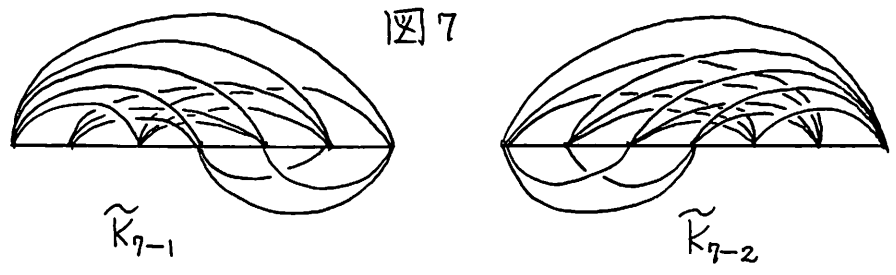
(2) $h(P_i) = P_{\sigma(i)}$ ただし σ は $(1, 2, \dots, p)$ の順列
このとき h をシート変換という

命題12 $\psi: K_n \rightarrow B_p$ を最小枚数 p をもつ B.P.H. Δ とし $\psi': K_n \rightarrow B_q$ を最大枚数 q をもつ B.P.H. Δ とする. このとき $h\psi'(K_n)$ が $\psi(K_n)$ に ambient isotopic とするようなシート変換 $h: B_q \rightarrow B_p$ がある.

命題13 $\psi: K_5 \rightarrow B_3$ を K_5 の最小シートをもつ B.P.H. Δ とする. $\psi(K_5)$ は S^3 の同相写像を除いて一意である. 更に $\psi(K_5)$ は S^3 の ambient isotopy を除いて一意である. 又この $\psi(K_5)$ は globally unknotted.

系. $\psi: K_5 \rightarrow B_3$ を B.P.H. Δ とする. すると $\psi(K_5)$ は maximal tree Δ に対し well-situated 基底に属し locally unknotted であり, triangle base に属しても locally unknotted である. 更に $\psi(K_5)$ は globally unknotted.

注. 一般に命題13の2番目の主張は成立しない. 例えは K_7 の book presentation $\psi: K_7 \rightarrow B_5$ は $\psi(K_7)$ が右手系 trefoil knot を含む \tilde{K}_{7-1} と左手系 trefoil knot を含む \tilde{K}_{7-2} の2種類があり(図7) これは S^3 の ambient isotopy では移り得ない. しかし \tilde{K}_{7-1} と \tilde{K}_{7-2} は $\sigma = (17)(26)(35)$ に対応するシート変換で移り合い, このシート変換は S^3 の同相写像に拡大出来る.



62.

参考文献

- [1] Bondy, J.A. & Murty, U.S. R. : Graph theory with application, North Holland, New York, Oxford
- [2] Conway, J. H. & Gordon, C. McA. : Knots and links in spatial graphs, J. Graph theory, 7 (1985) 445-453
- [3] Hempel, J. : 3-manifolds, Ann. of Math Studies 86, Princeton Univ. Press.
- [4] Kohara, T & Suzuki, S : Some remarks on knots and links in spatial graph, (preprint)
- [5]. Papakyriakopoulos, C. D. : On Dehn's lemma and asphericity of knots, Ann. of Math. 66 (1957) 1-26
- [6] Scharleman, M. & Thompson, A. : Detecting unknotted graphs in 3-space, (preprint).
- [7] Shimabara, M. : Knots in certain spatial graphs, Tokyo J. Math. 11 405-413.
- [8] Suzuki, S. : Constituent knots and links of spatial graphs, RIMS Kokyokoku 686 (1989) "Topological graph theory" Kyoto Univ. 55-86
- [9] White, A.T. : Graphs, Groups and Surface, Math. Studies 8, North Holland, New York.