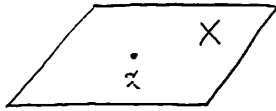
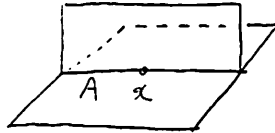


DS-diagram の応用 (Knot complement の fiber structure)

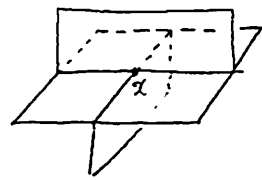
M を 3次元閉多様体とし, B^3 を M 内の 3次元球体として $\hat{M} = M - B^3$ とおく. \hat{M} は 2次元複体 P にカラフスする, $\hat{M} \searrow P$. P はその任意の点 $x \in P$ の近傍で次のうちのいずれかの状況になっている (Carler). P を fake surface といい



type I の美



type II の美



type III の美

$\tilde{\mathcal{G}}_i(P)$: type i の美の集合. $\mathcal{G}_i(P) = \alpha(\tilde{\mathcal{G}}_i(P))$ とおく.

P は \hat{M} によって一意には決まらないがホモトピー型は一意に決まる. また $\mathcal{G}_1(P) - \mathcal{G}_2(P)$ の各成分が 2次元閉胞体となるように出来るカラフシングの性質から次の事が言える.

$\hat{M} \cap N(P, \hat{M}) = \emptyset$ のとき (この条件は \hat{M} の部分を開くすれば常に成立する) $\hat{M} - N(P, \hat{M}) \cong S^2 \times I$ ここで $N(P, \hat{M})$ は P の \hat{M} に於ける正則近傍

従って \hat{M} は S^2 から P への mapping cylinder (写像柱) の構造を持っている (即ち $\tilde{\varphi}$ を写像 $\tilde{\varphi}: S^2 \rightarrow P$ としたとき

$$\hat{M} = (S^2 \times [0, 1]) \cup P / (x, 0) \sim \tilde{\varphi}(x)) \quad \text{ここで } P \text{ の面を 2枚に}$$

引きはがすと (即ち写像柱を作る時の逆操作) S^2 上にグラフが描かれる. このグラフ (すはグラフによる S^2 上の diagram) を M (すは P) の DS-diagram といい.

これは次の様にも言い換えられる. 任意の 3次元閉多様体 M は 3次元球 B^3 の境界 ∂B^3 を適当に張り合わせる事に依って得られ. 従って次の様な写像 φ が存在する.

$$\varphi: B^3 \rightarrow M = B^3 / \sim \supset P = \varphi(\partial B^3), \quad \varphi|_{\partial B^3} \text{ は同相写像}$$

$\varphi^{-1}(P)$ が M の DS-diagram Σ を決定する. Σ の faces, edges, vertices は二箇の $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(A), \varphi^{-1}(x)$ (正しく x は type II の美) 等

(8)

であり、次の性質を待っている。 $F(\Sigma), E(\Sigma), V(\Sigma)$ を Σ の face edges の集合とすると

- $$(*) \begin{cases} (1) \varphi|_{F(\Sigma)} \text{ は 2 対 1} \\ (2) \varphi|_{E(\Sigma)} \text{ は 3 対 1} \\ (3) \varphi|_{V(\Sigma)} \text{ は 4 対 1} \end{cases}$$

更に k を 3次元1項多様体 M 内の結び目とすると $\hat{k} = \varphi^{-1}(k)$ は B^3 内の複数列の単純弧であるか Yamashita に依り 次の条件を満たすように φ (又は P) を選べる。

- $$(**) \begin{cases} (1) k \cap P = \{ \text{某 } p \} \text{ で } p \text{ は type I の某} \\ (2) \hat{k} \text{ は } B^3 \text{ に proper に埋め込まれた唯一本の単純弧} \\ (3) (B^3, \hat{k}) \text{ は 自明な球対 (ball pair)} \end{cases}$$

以下で $M = S^3$ とする k を S^3 内の結び目で P, φ は上の条件 $(**)$ を満足するように取れているとする。

微分可能写像 $\tilde{\omega}: S^3 - \hat{U}(k) \longrightarrow S^1 = \{ e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ が存在し、 $\omega \equiv \tilde{\omega} \varphi: B^3 - \hat{U}(k) \longrightarrow S^3 - \hat{U}(k) \longrightarrow S^1$ とおく $\text{grad arg } \omega$ は $B^3 - \hat{U}(k)$ に flow を定義する事になり、特異に DS -diagram Σ の $\text{grad arg } \omega|_{B^3}$ を調べる事により knot complement が調べられる $\tilde{\omega}$ が non-singular (i.e. $\forall x \in S^3 - k$ で $\text{rank}(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}) = 1$) の時 $S^3 - k$ は S^1 上の surface (= F) bundle となり F は minimal Seifert surface である 一般には ω は特異点をもつので knot complement は S^1 上の singular fiber bdl となり θ が $\text{arg } \tilde{\omega}$ の regular value の時 $\tilde{\omega}^{-1}(\theta)$ は k の Seifert surface であり $\omega^{-1}(\theta)$ は Σ 上の曲線となりこれは Seifert surface $\tilde{\omega}^{-1}(\theta)$ を fake surface P で切り抜いたものとなっている。

Ishii による具体的な ω の構成のアルゴリズムは次のようになる。

- (1) 上の性質 $(**)$ をみたす "knot k に属する" DS -diagram Σ を見つける
- (2) その DS -diagram の多角形のラベルから導かれる連立一次方程式を解く
- (3) (2) の方程式の解に対する Σ 上の flow を作る
- (4) (3) の flow の level curves が knot complement の (singular) fiber structure を与えている

以下 3.1, 4.1 knot を例に取って解説するがその前に現在迄の

分析結果を述べておく

- non-singular level curve は φ で同一視する事に依り non-singular orientable surface (= Seifert surface) を与えるが singular level curve も φ で同一視する事により non-singular orientable surface (= Seifert surface) を与える事がある.
- 上のようにして得られた surface (non-singular or singular) のオイラー標数を計算する事に依り Seifert surface の種数が計算出来る (surface が特異点をもつ場合には level curve の特異点のまわりの状況を調べる事に依り surface の特異点の状況も調べられる).
- level curve を実際に isotopy で動かす事に依り Seifert surface が isotopic であるか否かがわかる (現在の所 level curve が non-singular の場合のみ check 出来るが, level curve が特異点をもつ場合にも通用出来ると思われる)
- level curve が 1本の simple arc の時はそれを φ によって同一視して出来る Seifert surface は incompressible である (従ってもし level curve が 1本の simple arc で genus の異なるものが見つかれば incompressible Seifert surface で genus の異なるものが見つかった事になるが 残念ながら今の所この方法では見つかっていない). この結果も level curve がもっと複雑な場合に拡張出来ると思う.

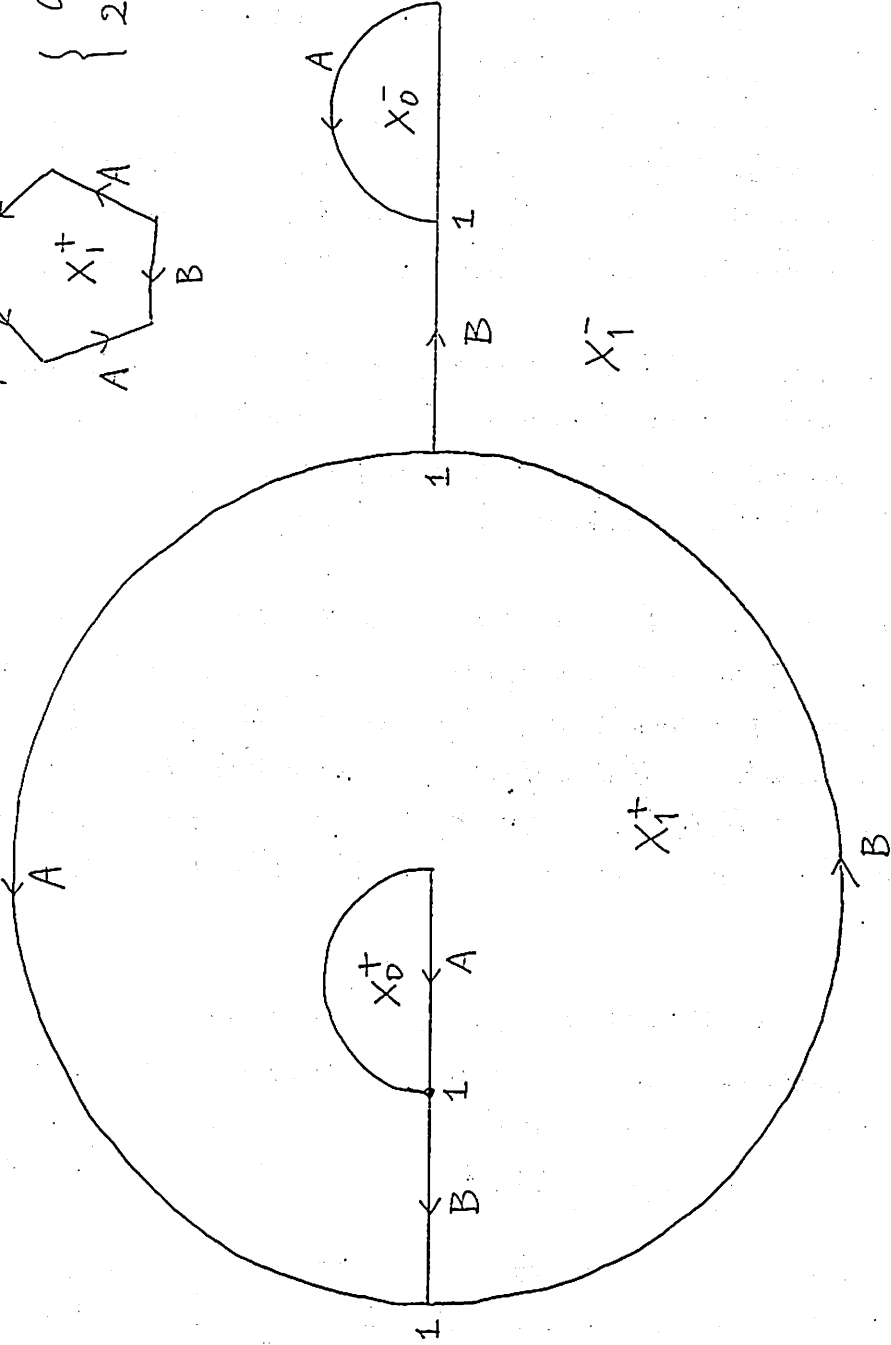
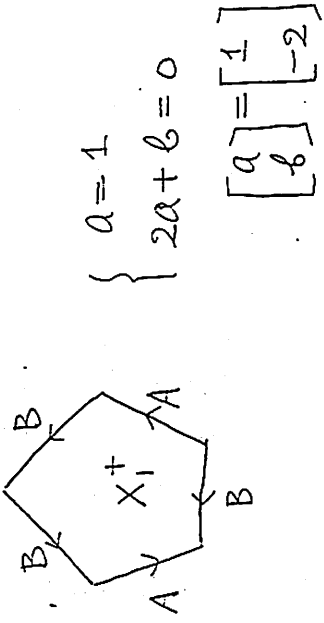
Ishii による w の構成法を 3.1, 4.1 knot についての解説

DS-diagram による S^2 上の face (=多角形) を取り出し, そのまわりのある辺のラベルを Y とした時

$$\Delta_Y \arg w / 2\pi = y(u_1, u_2, \dots) \quad \text{として連立方程式を解く.}$$

ここで Δ_Y は Y についての変分であり, y は Y に対応する連立方程式の解であり, u_1, u_2, \dots はこの連立方程式系の解空間を表示するパラメータ また多角形の内部を "knot" 糸が通ってこれば方程式の右辺は 1, 糸が通っていない場合は 0 とする事に注意
 以下の定義をする.

(10)



31-knot o DS-diagram

定義 $\alpha_j(u_1, u_2, \dots) \equiv \#\{ \arg w(u_1, u_2, \dots) \mid_{\partial X_j} \text{の極大値} \} - 1$

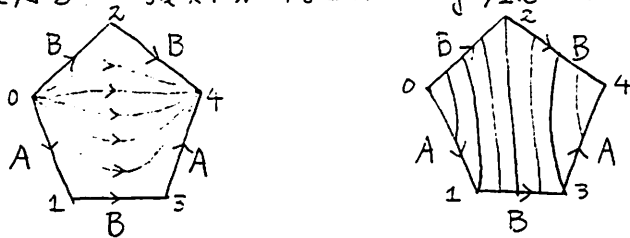
ここで X_j は DS-diagram の face (多角形), j は DS-diagram Σ の (+ (又は-)) 面の個数 - 1 だけ動く

$\alpha \equiv \sum \alpha_j$ とする α_j は多角形 X_j^+ (又は X_j^-) 上の flow の特異点の個数 \uparrow を表わし, α は + 領域 (又は - 領域) 全体の flow の特異点の個数 \uparrow を表わしている。

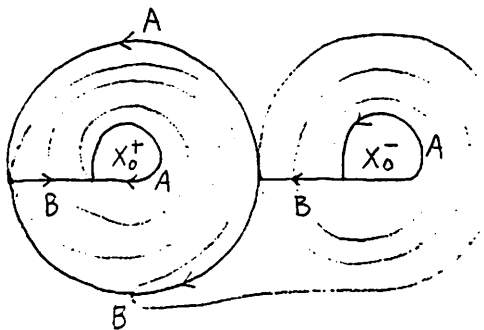
DS-diagram の 辺上で $\arg w$ は線形に変化するとする

$3_1, 4_1$ -knot の DS-diagram において "knot" 糸は - 辺形 X_0^+ と X_0^- 内を通るものとする DS-diagram 上の矢印は同一視する時同じラベル名の辺を矢印の向きが一致するように同一視することを示している (最初の図に於いては flow の向きと矢印の向きは逆関係)

3_1 -knot では方程式を解くと $a=1, b=-2$ となる。解が負の時は多角形の辺上の矢印の向きを逆にし多角形 X_1^+, X_1^- の中に flow を書き込むと下左図になりその flow の等高線を書くと下右図のようになる。頂角に於ける数字は $\arg w / \pi$ を示している

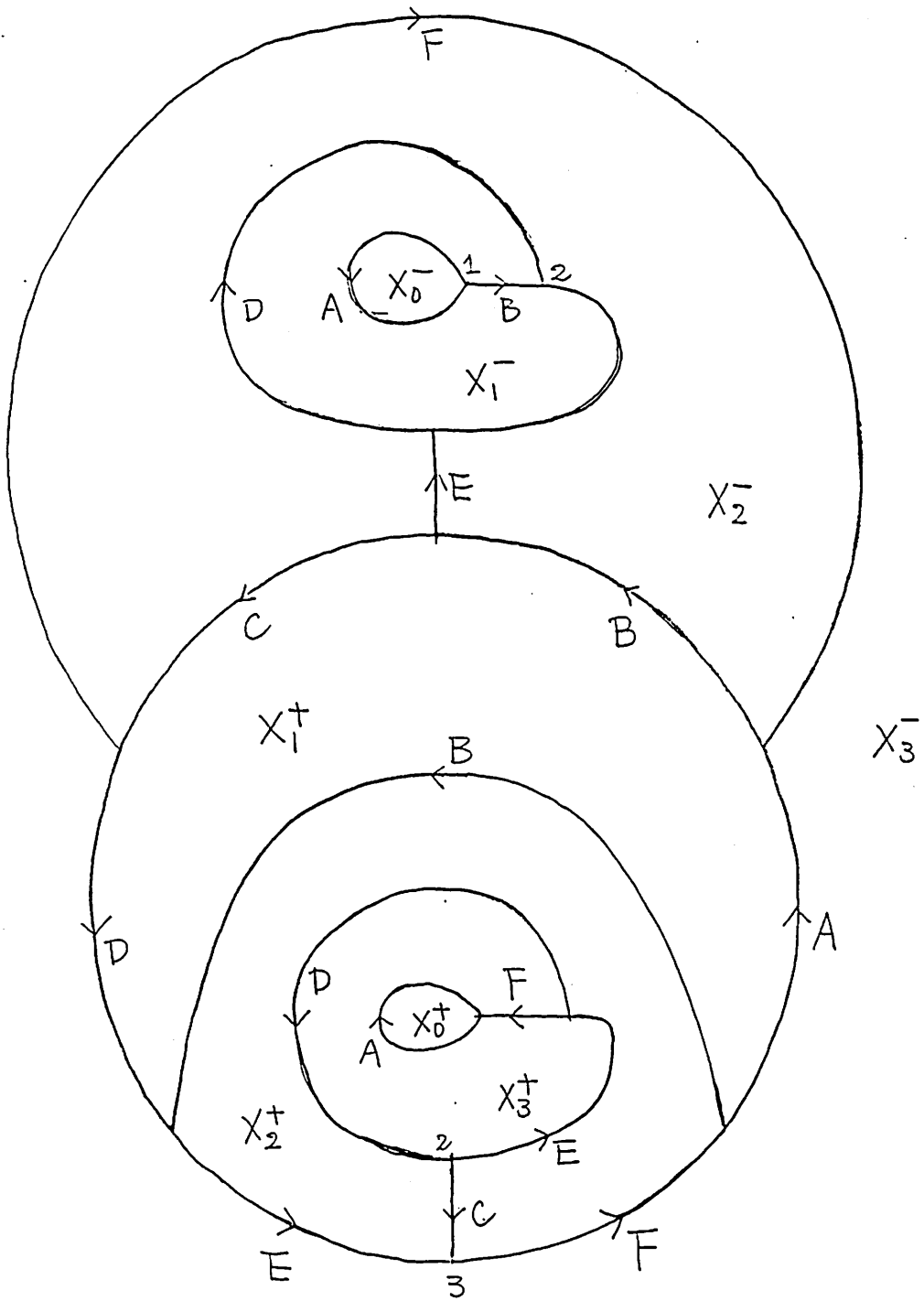


この level arcs のうち $\arg w / \pi = 0 \pmod 1$ を示す level arc を Σ - k_0 の DS-diagram に書き込むと下図のようになる。最初の DS-diagram の辺上の矢印の向きに比べ辺 B 上の矢印の向きが逆となっている事に注意。

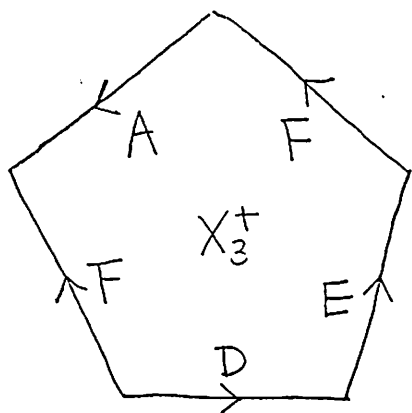
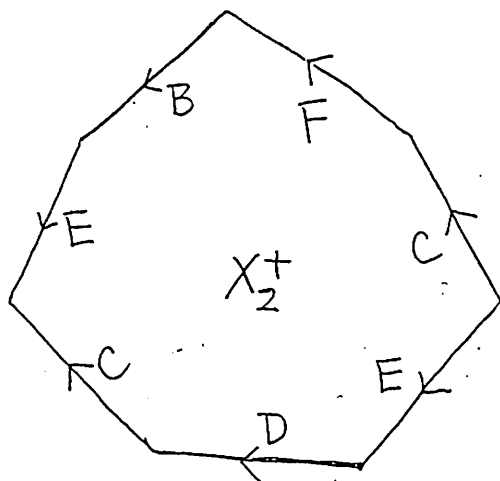
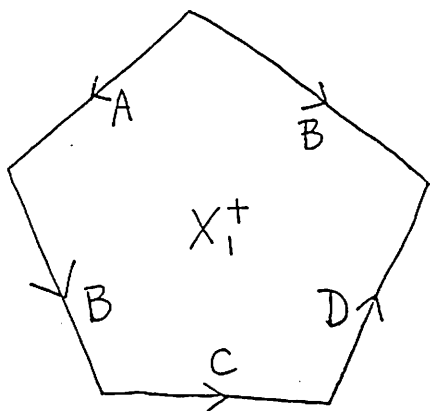


この level arc を同一視して得られる Seifert 曲面 F のオイラー標数 $\chi(F) = 2 - 4 + 1 = -1$ 従って F の種数は 1 である

(12)



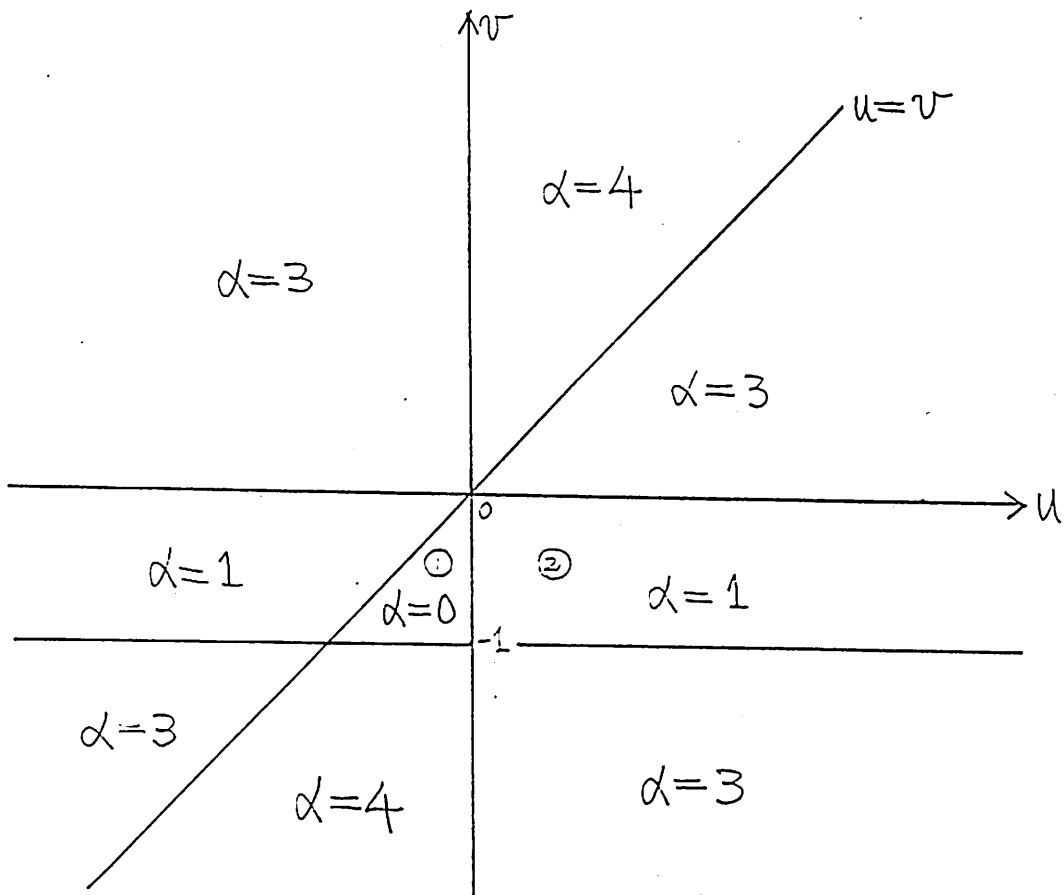
4₁-knot の DS-diagram



$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ a + c + d = c \\ b - d + f = c \\ a + d + e = c \end{array} \right.$$

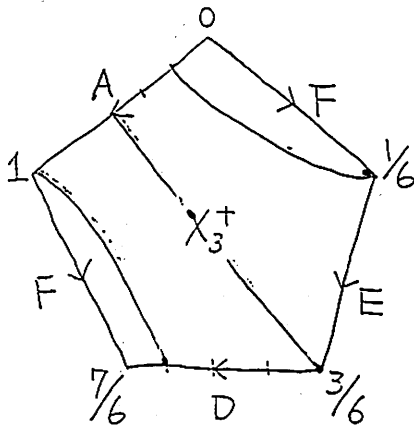
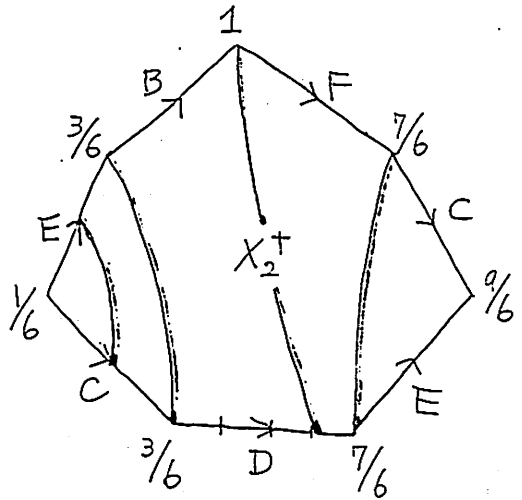
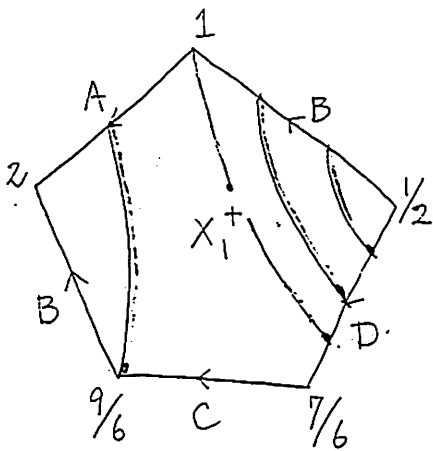
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ -u-1 \\ u \\ -u-1 \\ -u+u \end{bmatrix}$$

(14)



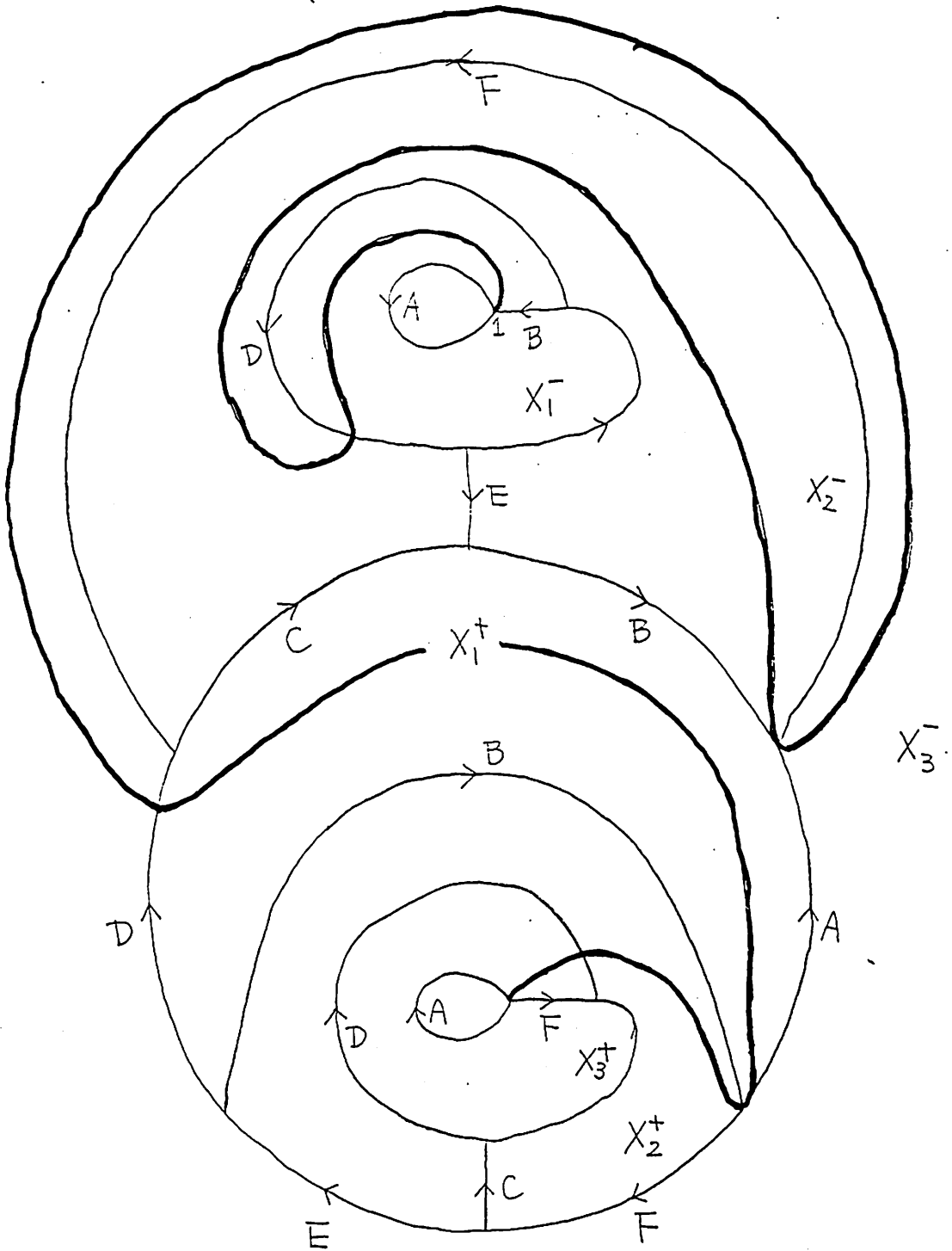
未知数 a, b, c, d, e, f の正負の符号は上の各領域内では一定になり、従って α の値も各領域内で一定で書き入れてあるような値となる。従ってこの各領域内の (u, v) の値に対して得られた flow (それは level arcs) は ambient isotopic になるので本質的には同じであると思われて良し。そこで例として領域 ① と ② 内のある (u, v) の値に対して a, b, c, d, e, f を決め、それらに従って flow を対応させ、その flow の level arcs を書き込んだものが次頁の図である (a, b, c, d, e, f の内値が負となるものはそれに対応する多角形の辺のラベル上の矢印の向きが最初の多角形のものに比べ逆になっている。) flow が non-singular (それは level arcs が特異点をもたない) 場合は $\arg w / 2\pi$ の任意の値に対して level arcs が flow に沿って ambient isotopic になり、従ってそれらから作られる Seifert surfaces は flow に沿って ambient isotopic。更に knot complement は S^1 上の surface bundle になっている事がわかる。(領域 ① の場合、 $\alpha=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \text{ ଅନ୍ତରାଳ } \left[\begin{array}{ll} a=1 & d=-\frac{2}{3} \\ b=-\frac{1}{2} & e=-\frac{1}{3} \\ c=-\frac{1}{3} & f=-\frac{1}{6} \end{array} \right] (\alpha=0)$$



Level arc

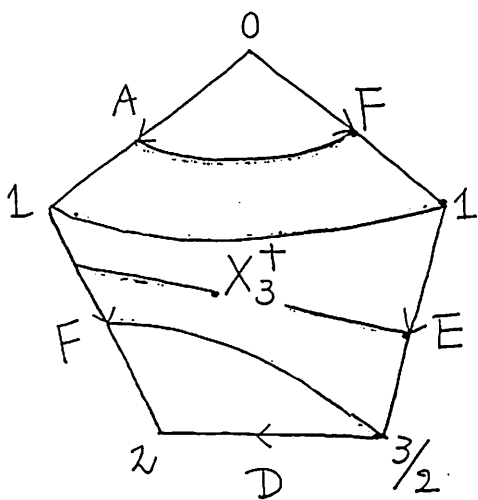
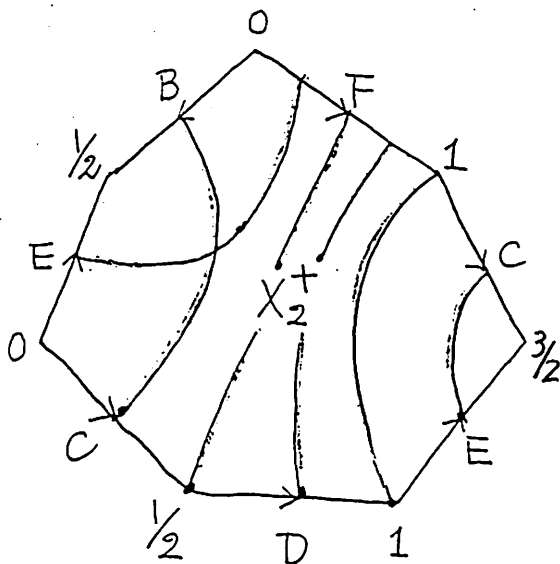
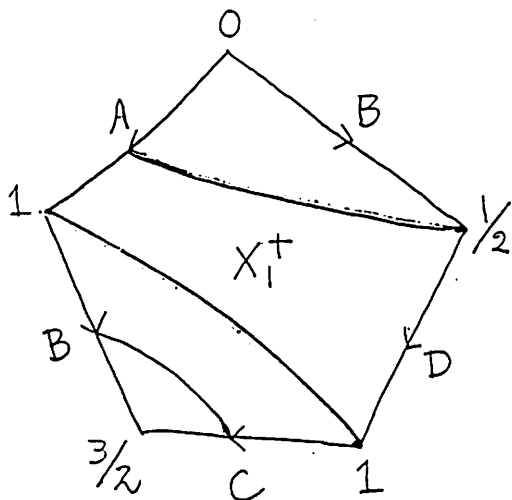
(16)



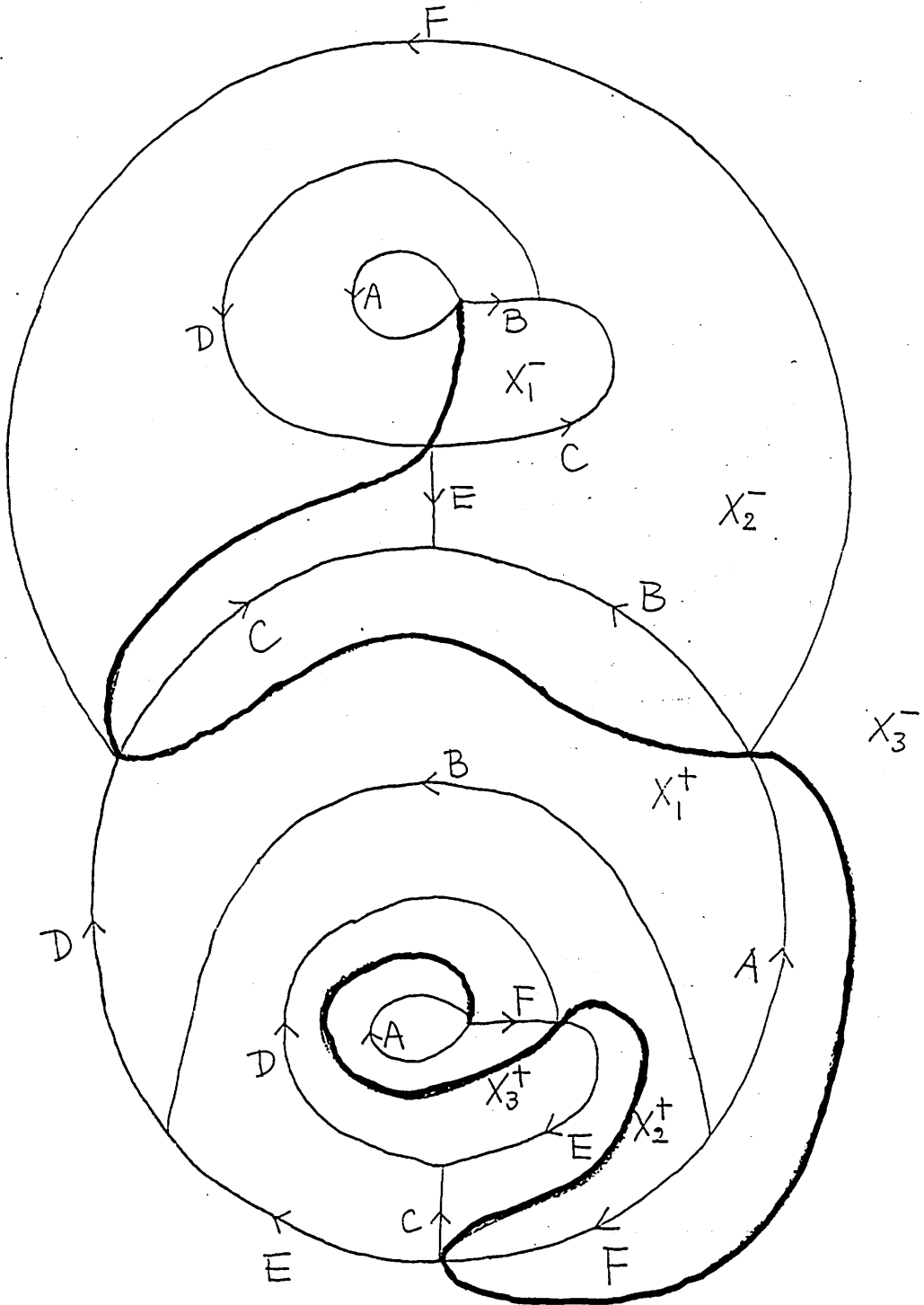
$$\arg w / 2\pi = 0 \pmod{1}$$

is level arc

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \\ V = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{と } \left\{ \begin{array}{ll} a=1 & d=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} & e=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} & f=-1 \end{array} \right\} (\alpha=1)$$

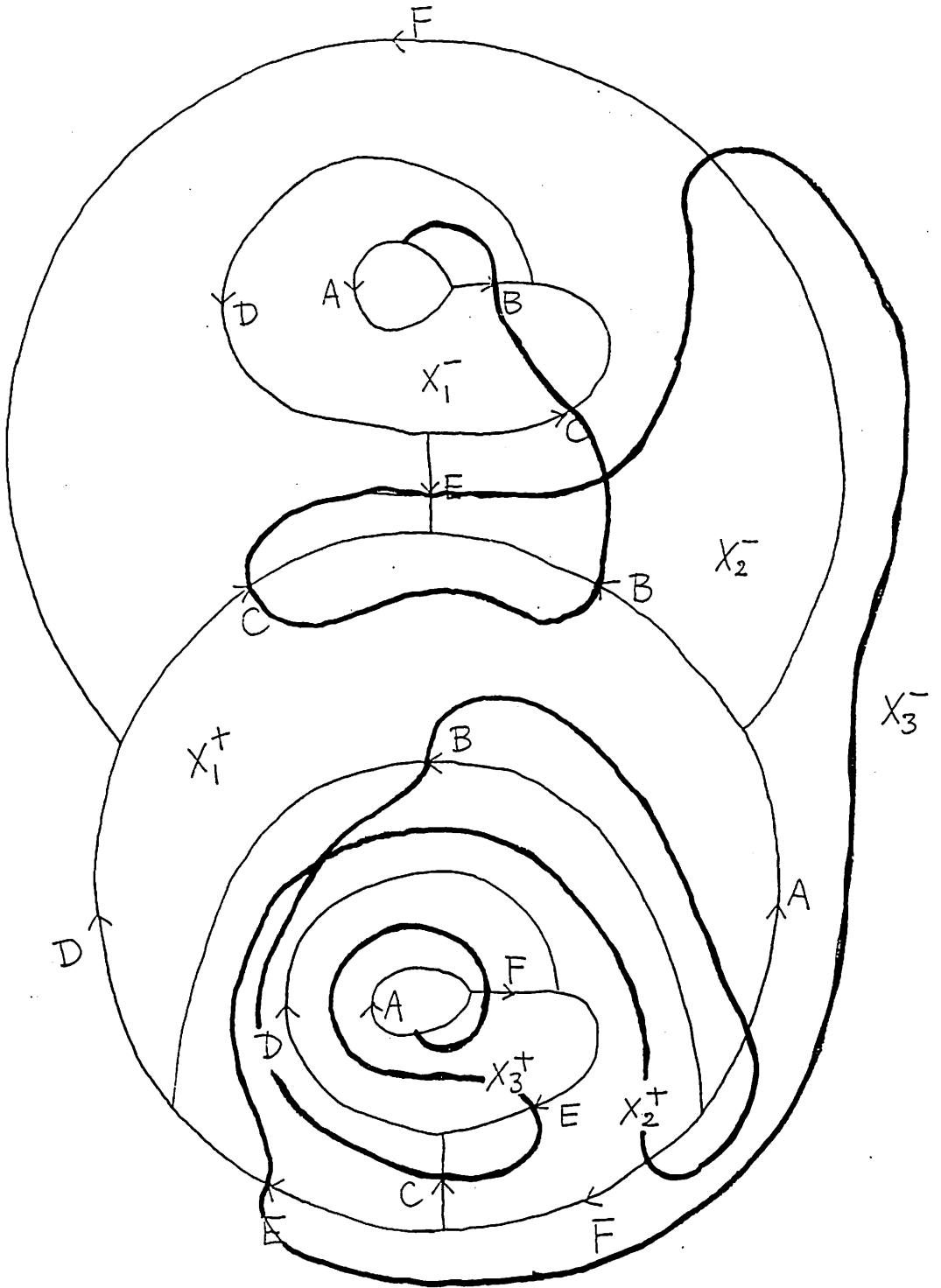


level arc



$$\arg w / 2\pi = 0 \pmod{1}$$

↪ level arc

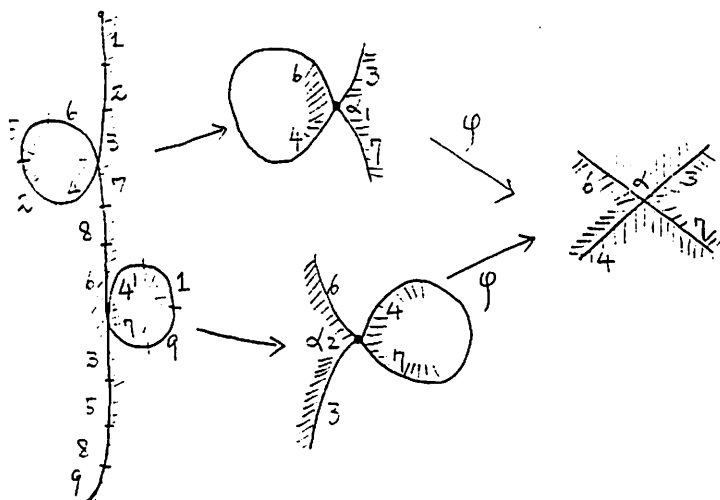


$$\arg w / 2\pi = 1/4 \pmod 1$$

↻ level arc

(20)

写像 $\arg w/\pi = 1/4 \pmod 1$ の新しい level arc は特異点を避けているが元の特異点の近傍の状況を見ると下図のようになる



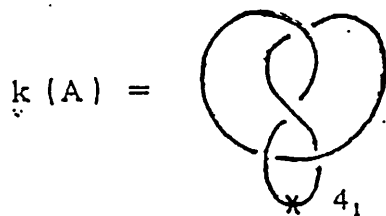
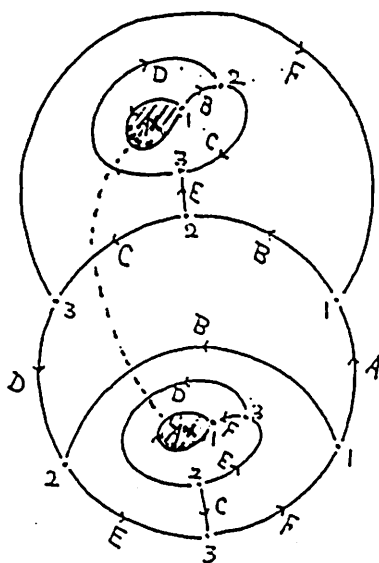
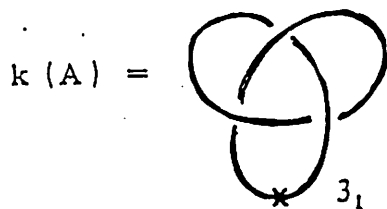
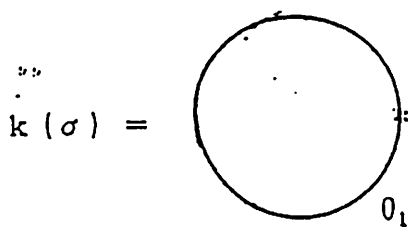
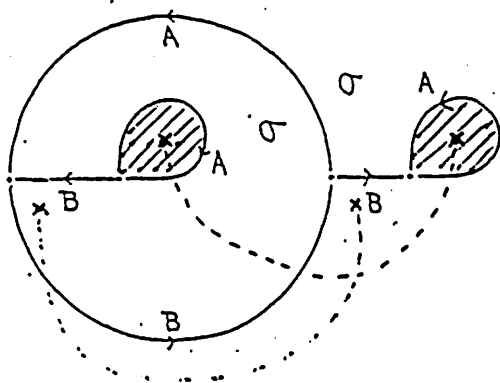
level arc 上の数字は、同じ数字を同一視する事を示している また level arc の近くの斜線はその部分に B^3 の中で "Seifert surface" $\varphi^{-1}(F)$ が張れている事を示し α_1, α_2 は level arc 上の特異点 α は φ によって α_1 と α_2 を同一視した事を示している 従って α の近くで F は non-singular である事がわかり結局 F は non-singular surface である F のオイラー標数は $\chi(F) = 6 - 10 + 3 = -1$ 従って F の種数は 1 である

勿論 level arc 上に特異点がありその level arc を同一視しても特異点をもつ曲面になる場合があり、この場合の方がむしろ一般的である。

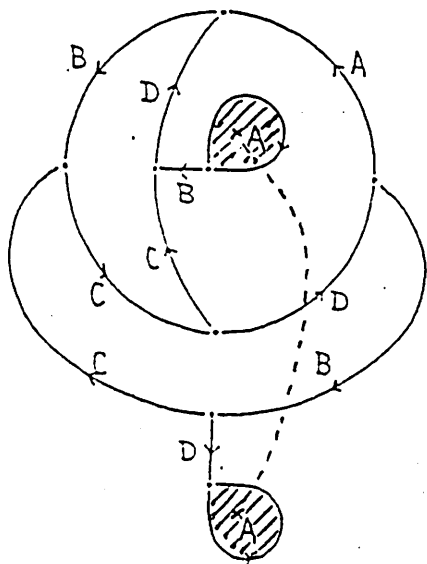
以下でいくつかの knot に対する DS-diagram (これは Yamashita による) と多角形の辺のラベルから得られる連立方程式系及びその解を示しておく。もしあるラベルに対する方程式の解が 0 の時はそのラベルに対する辺を分割し、方程式系を変える。こうすると diagram は DS-diagram の条件を満たさなくなるが flow を作るためには影響がない


資料：結び目のDS表現

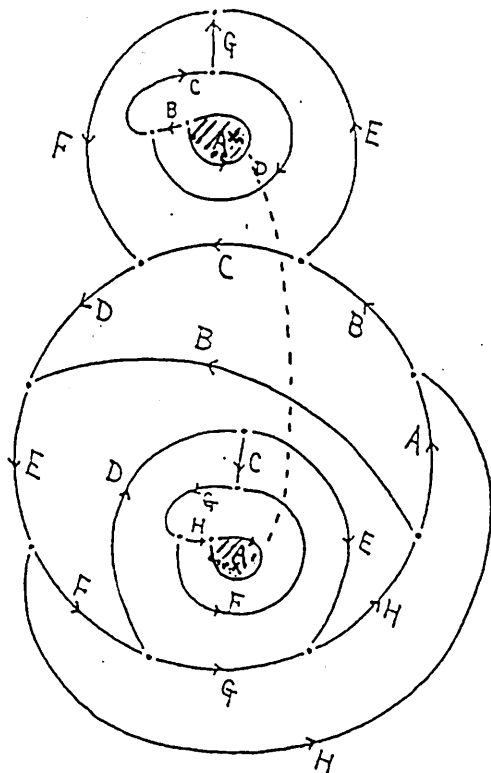
0_1 -結び目を除いては、Aというラベルで囲まれた一辺形（以下、この一辺形をもAと誤記する）が、指定された結び目を表わす2-cellである。




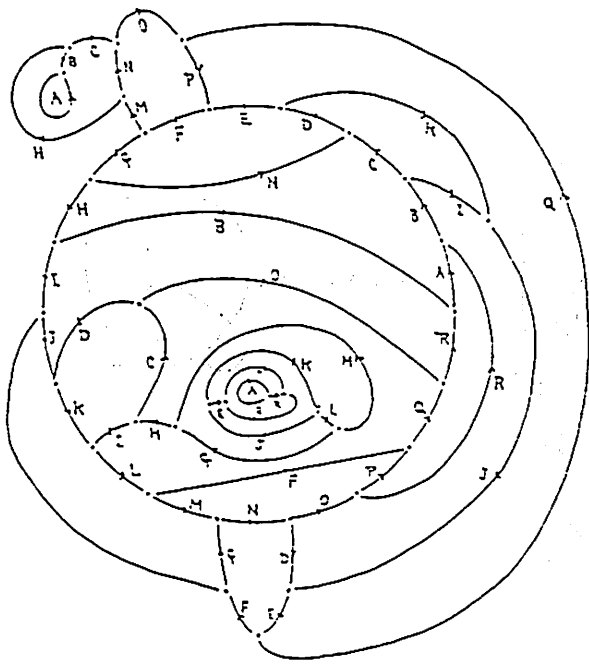
(22)



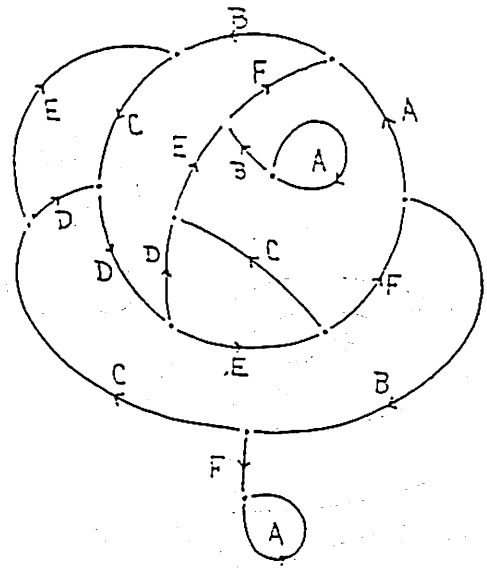
$k(A) =$  S_1



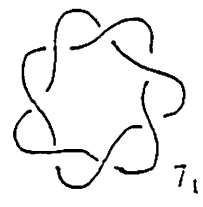
$k(A) =$  S_2



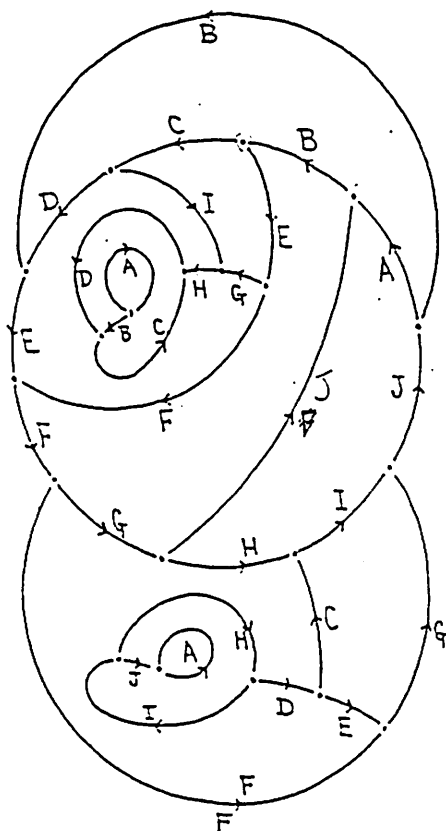
$k(A) =$



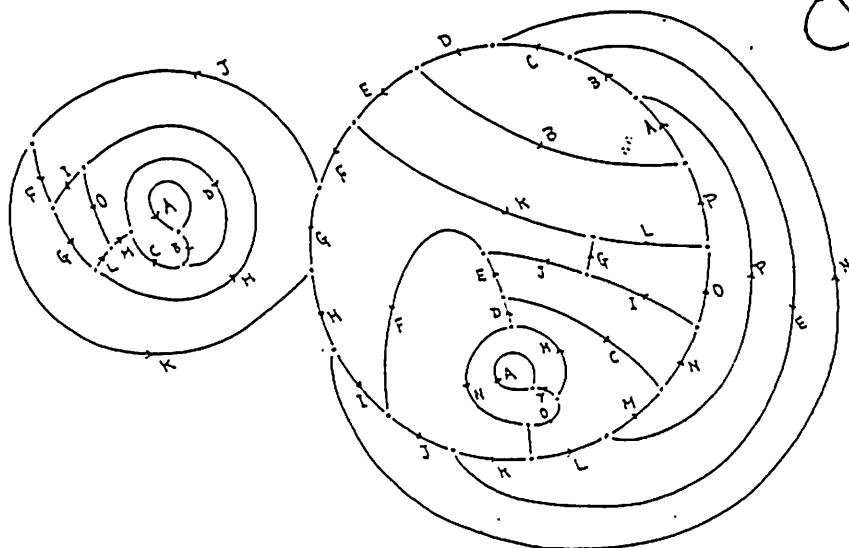
$k(A) =$



(24)

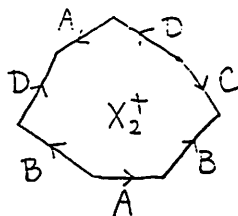
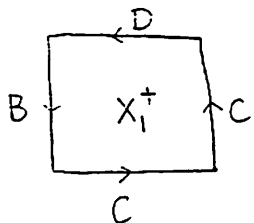


$$k(A) = \text{[Diagram of a knot labeled } \sigma_1 \text{]} \sigma_1$$

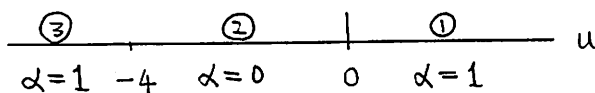


$$k(A) = \text{[Diagram of a knot labeled } \sigma_2 \text{]} \sigma_2$$

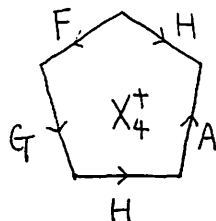
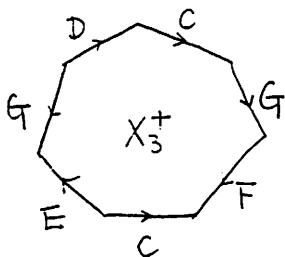
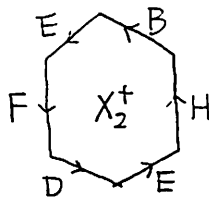
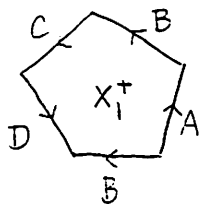
5₁-knot $\rightarrow \tau$



$$\begin{cases} a & = 1 \\ b+2c+d & = 0 \\ 2a-c & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ 2 \\ -u-4 \end{bmatrix}$$



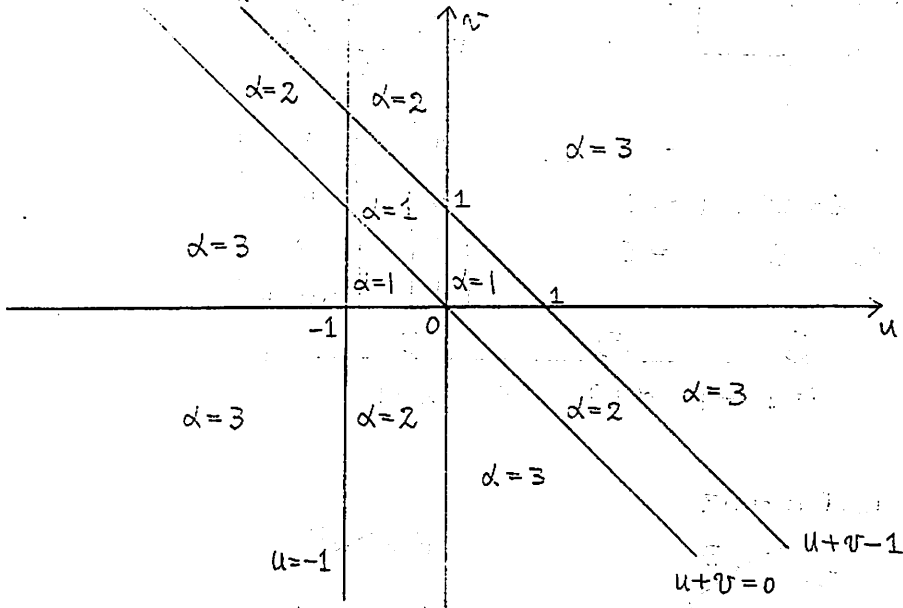
5₂-knot $\rightarrow \tau$



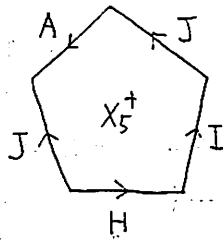
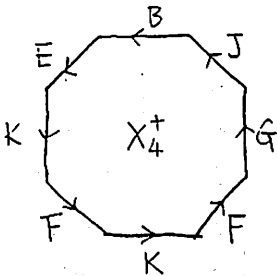
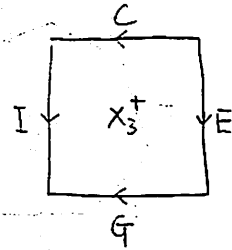
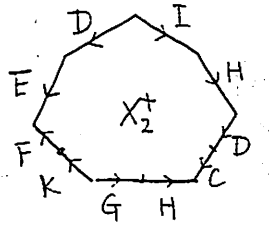
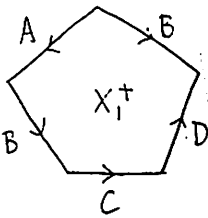
$$\begin{cases} a & = 1 \\ a+c+d & = 0 \\ b+d+2e+f+h & = 0 \\ d+e+f & = 0 \\ a+f+g & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ -1+u+v \\ -u-v \\ v \\ u \\ -1-u \\ -v-w \end{bmatrix}$$

(26)

以下の領域分割は (u, v) を以下の領域とし ω を動かしている α の値を動かした時の最小の値を示している



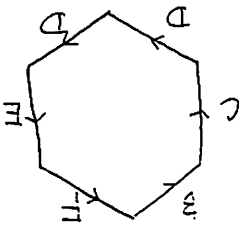
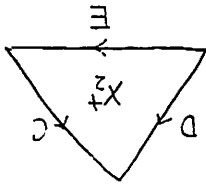
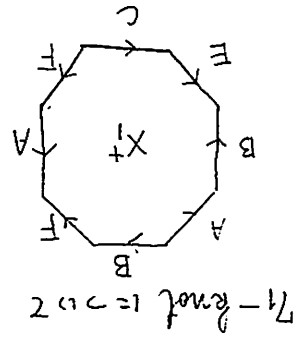
61-knot について



最初の DS-diagram では連立1次方程式で $f=0$ となってしまうので F を F と K に分けた

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ 2a &= 0 \\ -c &= 0 \\ -c-d+e &= 0 \\ b+c+d+e+f &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ 2 \\ 2 \\ 2-u \\ -u-6 \end{bmatrix}$$



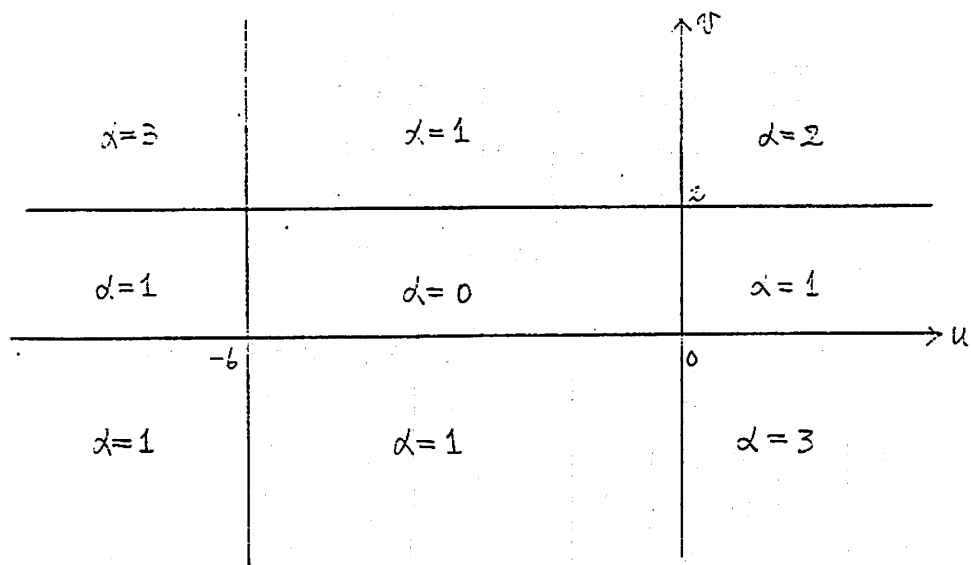
最少数の元 = 5

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ -u-v-y \\ u+v+y-1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ r \\ -2u-v-y-x \\ u \\ -u \\ y \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 \\ a+c+d &= 0 \\ -c &= 0 \\ -c-f+y &= 0 \\ c &= 0 \\ -e &= 0 \\ -e-g+i &= 0 \\ b &= 0 \\ b+e+2f+y &= 0 \\ a &= 0 \\ a+f+i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(28)



(22)