

Reduced degree of Yamada polynomial

東大・文理 小林一章

30. Introduction

慶應大の山田氏は spatial graph (3次元ユークリッド空間内に3次元球面に埋め込まれたグラフ)に対する新しい多項式型の不变量 $R(\tilde{G})(A, B)$ を定義した。この論文ではその多項式 $R(\tilde{G})(A, B)$ の reduced degree, $\text{rdg}_A R(\tilde{G})(A, B)$ の性質を研究する。 G, S^3, \mathbb{R}^3 を各々グラフ, 3次元球面, 3次元ユークリッド空間とし $f: G \rightarrow S^3$ (\mathbb{R}^3 は \mathbb{R}^3) を埋め込みとする。このとき $\tilde{G} = f(G)$ をグラフ G の空間グラフ (spatial graph) という。(結び目の図 (knot diagram) と同様に) \tilde{G}_Δ を \tilde{G} の図 (diagram) とする。グラフ G に対し $v(G)$, $e(G)$, $w(G)$ を各々頂点の集合, 辺の集合, 連結成分の集合とする。グラフの図 \tilde{G}_Δ に対し $c(\tilde{G}_\Delta)$ を交叉点 (頂点ではない) の集合とする。また \bar{G} を平面グラフとするとき $\text{r}(\bar{G})$ を $\mathbb{R}^2 - \bar{G}$ ($S^2 - \bar{G}$) の連結成分の集合とする。集合 S に対し $|S|$ をその濃度とは元の頂点数とする。 $\beta_i(G)$ を G の i -th Betti 数とし $\beta(G) = |e(G)| - |\text{r}(G)| + |w(G)|$ と定義する ($\beta(G)$ は G の Betti 数或いは cycle rank とも呼ばれる)。

命題 1. 平面グラフ \bar{G} に対するオイラーの公式.

$$|\text{r}(\bar{G})| - |e(\bar{G})| + |\text{r}(\bar{G})| = |w(\bar{G})| + 1.$$

この論文ではグラフは有限グラフとする。即ち $v(G), e(G)$ が共に有限集合であるようなグラフとする。

31. Yamada polynomial $([Y_1], [Y_2])$.

F を $e(G)$ の部分集合とする ($F = \emptyset$ のときもある)。グラフ G に対し 多項式 $P(G)(w, x, y)$, $Q(x, y)$ を

$$P(G)(w, x, y) = \sum_{F \subseteq e(G)} w^{|F|} x^{\beta_0(G-F)} y^{\beta_1(G-F)},$$

$$Q(G)(x, y) = P(G)(-x^{-1}, x, y) \quad \text{で定義する.} \quad (1)$$

(30)

命題2. $([N], [Y_1])$ グラフ G に対して $P(G)(w, x, y)$ は G の 2-isomorphism invariant である。

命題3. $([Y_1], [Y_2])$ グラフ G に対して, $Q(G)(x, y)$ は G の topological invariant である。

\tilde{G}_Δ を spatial graph \tilde{G} の図とし, c を \tilde{G}_Δ の 1 つの交叉点とする。交叉点 c を 図 1 のように変化させた時を positive spin (+), negative spin (-), zero spin (0) と定義する。

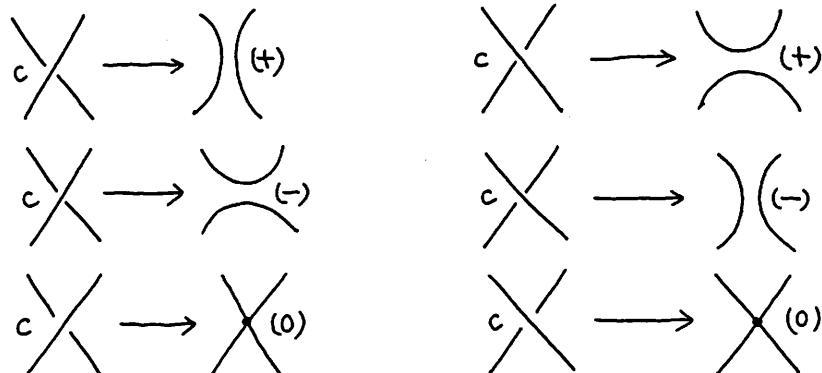


図 1.

\tilde{G}_Δ の各交叉点をいずれかの spin で置き換える事により交叉点の個数が n のとき 3^n 個の平面グラフが得られる。その各々の平面グラフを state という。state は一般に p, q, r 個もつ state を $S(p, q, r)$ とかく。 $S(p, q, r)$ は 図 2 のような hoop をもつことがあるが多項式 $P(G)$, $Q(G)$ や以下の $R(G)$ を計算するときは hoop を loop と考えて計算する。

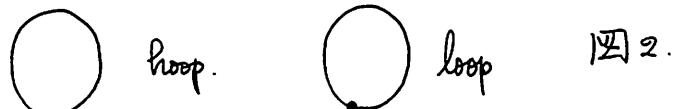


図 2.

$$\{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, r)\} = A^{p-q} B^r \text{ とおき}$$

$$R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = \sum_S \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, r)\} Q(S)(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1})$$

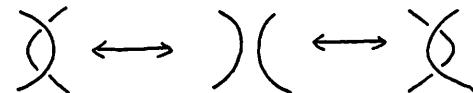
と定義する。

定義. spatial graph \Rightarrow Reidemeister moves

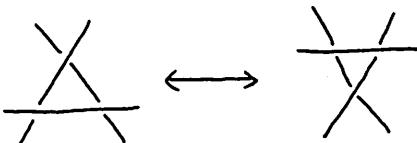
(I)



(II)



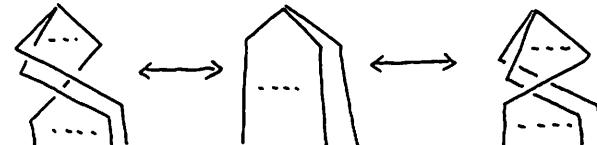
(III)



(IV)



(V)



(VI)



図 3.

2つの spatial graph の図 \tilde{G}_Δ と \tilde{G}'_Δ が (I) ~ (V) の Reidemeister moves の有限列で移り得るとき \tilde{G}_Δ と \tilde{G}'_Δ は firm isotopic と \cdots , (I) ~ (VI) の Reidemeister moves の有限列で移り得るなら \tilde{G}_Δ と \tilde{G}'_Δ は flexible isotopic (ambient isotopic) である.

命題4 ([Y₂]) $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) \neq (-A)^n$ (n : some) 倍を除いて \tilde{G}_Δ の firm isotopy invariant である.

命題5 ([Y₂]) G の頂点の次数が高々 3 の時 $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B)$ は $(-A)^n$ (some n) 倍を除いて \tilde{G}_Δ の flexible isotopy invariant である.

定義. $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B)$ の ($A = 1$ または 3) reduced degree $r\text{-deg}_A R(\tilde{G}_\Delta)$ を $r\text{-deg}_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = \max \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) - \min \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B)$

(32)

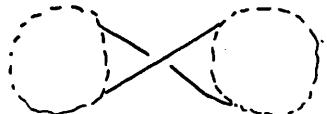
で定義する.

注 ([Y₁]) によって $R(\tilde{G}_\alpha)(A, B) = B^{x(G)} R(\tilde{G}_\alpha)(A, -(A+2+A^{-1}))$ が成立する. ここで $x(G)$ は G のオイラー標数. 従って変数 B は G の S^3 (又は \mathbb{R}^3) への埋め込み方に依らない事がわかる.

系 ([Y₂]) $R(\tilde{G}_\alpha)(A, B)$ の reduced degree, $\text{E-deg}_A R(\tilde{G}_\alpha)(A, B)$, は firm isotopy invariant である. また G の頂点の次数が高々 3 のときは $\text{E-deg}_A R(\tilde{G}_\alpha)(A, B)$ は \tilde{G}_α の flexible isotopy invariant である.

§ 2.

以下の補助定理, 命題, 定理等において最初に与えられる空間グラフの図は reduced であるとする. 即ち図 4 のような交叉点はもたないとする



不是



図 4.

補助定理 1. G が cut edge をもたなければ $\deg_y Q(G)(x, y) = \beta(G)$

証明. $Q(G)(x, y) = \sum_{F \in e(G)} (-x^{-1})^{|F|} x^{\beta_0(G-F)} y^{\beta_1(G-F)}$ で G が cut edge

をもつてないので $\deg_y Q(G) = \deg_y x^{\beta_0(G)} y^{\beta_1(G)} = \beta_1(G)$ (即ち $F = \emptyset$ のときには y に $|F|$ する最高次数に到達する).

$$\beta_0(G) - \beta_1(G) = |v(G)| - |e(G)| \text{ だから}$$

$$\beta_1(G) = |e(G)| - |v(G)| + \beta_0(G) = |e(G)| - |v(G)| + |\omega(G)| = \beta(G) //$$

注. G が cut edge をもつてないときは $Q(G)(x, y) = 0$ ([Y₂]).

系 1. \bar{G} を平面グラフとする.もし \bar{G} が cut edge をもつてないかったら $\deg_y Q(\bar{G})(x, y) = |\text{e}(\bar{G})| - 1$.

(4)

証明. 命題1より $|v(\bar{G})| - |e(\bar{G})| + |r(\bar{G})| = |\omega(\bar{G})| + 1$. 従って
 $|\Gamma(\bar{G})| - 1 = \beta(\bar{G})$. 故にもし \bar{G} が cut edge をもたなければ"
補助定理1より $\deg_y Q(\bar{G})(x, y) = |\Gamma(\bar{G})| - 1$.

系2. \bar{G} を平面グラフとする. もし \bar{G} が cut edge をもたなければ"
 $\chi - \deg_A R(\bar{G})(A, B) = 2\beta(\bar{G}) = 2(|\Gamma(\bar{G})| - 1)$.

証明 \bar{G} が平面グラフなら $R(\bar{G})(A, B) = Q(\bar{G})(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1})$
従って結果は補助定理と系1から導かれる.

系3. ~~この問題~~ 任意のグラフ G に対して G が cut edge をもつ
必要十分条件は $Q(G)(x, y) = 0$

証明. G が cut edge をもつてば $Q(G)(x, y) = 0$ ([Y₂]).

また G が cut edge をもたなければ"補助定理1より $\deg_y Q(G)(x, y)$
 $= \beta(G) = \beta_1(G) (\geq 0)$ ここでもし $\beta_1(G) = 0$ なら G は tree (連結
とは限らない) となり G は cut edge をもつ事になり矛盾. よって
 $\beta_1(G) > 0$. 故に $Q(G)(x, y) \neq 0$. //

補助定理2. G をグラフ, \tilde{G} を G の空1回グラフとする. \tilde{G}_Δ が \tilde{G} の
1つの巡回 $S(p, q, t)$ は \tilde{G}_Δ から得られる1つの state とする $T = T^{\tilde{G}}$
 p, q, t は各々 positive spin, negative spin, zero spin の数.

$$\Rightarrow |\Gamma(S(p, q, t))| = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + \beta(G) + 1 + t.$$

証明. $|v(S(p, q, t))| = |v(\tilde{G}_\Delta)| + t + h = |v(G)| + t + h$ である. ここで
 h は loop から得られる loop の数. そして zero spin によって得られる
新しい頂点の次数は常に4だから

$$2|e(S(p, q, t))| = \sum_i val(v_i) + 4t + 2h \quad \text{かつ} \quad \sum_i val(v_i) = 2|e(G)|$$

$$\text{ただし } val(v_i) \text{ は } G \text{ の } T \text{ に関する } v_i \text{ の次数. そこで命題1によると}$$

$$|\Gamma(S(p, q, t))| = |\omega(S(p, q, t))| + 1 + |e(S(p, q, t))| - |v(S(p, q, t))|$$

$$= |\omega(S(p, q, t))| + 1 - (|v(G)| + t + h - |e(G)| - 2t - h)$$

$$= |\omega(S(p, q, t))| + 1 - |\omega(G)| + \beta(G) + 1 + t //$$

(34)

系. G を平面的グラフ (planar graph) とし, \tilde{G} , \tilde{G}_Δ , $S(p, q, t)$ を補助定理2と同じとする. \bar{G} を G の平面グラフとする

$$\Rightarrow |\Sigma(S(p, q, t))| = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + |\Sigma(\bar{G})| + t.$$

証明. $|\epsilon(G)| - |\nu(G)| + |\omega(G)| = \beta(G)$ で 命題1より

$$|\nu(G)| - |\epsilon(G)| + |\Sigma(\bar{G})| = |\omega(G)| + 1 \text{ だから}$$

$\beta(G) = |\epsilon(G)| - |\nu(G)| + |\omega(G)| = |\Sigma(\bar{G})| - 1$ 従って 補助定理2から 結果が得られる. //

補助定理3. G , \tilde{G} , \tilde{G}_Δ は補助定理2と同じとする. $S(p, q, t)$ は \tilde{G}_Δ から得られる1つのstateで 平面グラフとて cut edge をもつてつなぐとする.

$$\Rightarrow \max_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t))(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + \beta(G) + p - q + t.$$

$$\min_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t))(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = |\omega(G)| - |\omega(S(p, q, t))| - \beta(G) + p - q - t.$$

証明. 補助定理1の系1より

$$\max_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S\} Q(S)(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = p - q + |\nu(S(p, q, t))| - 1 = p - q + |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + \beta(G) \\ + 1 + t - 1 \quad (\text{補助定理2}) \\ = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + \beta(G) + p - q + t.$$

同様に 補助定理1の系1と補助定理2より

$$\min_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S\} Q(S)(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = p - q + 1 - |\Sigma(S(p, q, t))| \\ = |\omega(G)| - |\omega(S(p, q, t))| - \beta(G) + p - q - t \quad //$$

系. G を平面的グラフ (planar graph) とし, \tilde{G} , \tilde{G}_Δ , $S(p, q, t)$ を補助定理3と同じとする. \bar{G} が G の平面グラフなら

$$\max_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t))(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(G)| + |\Sigma(\bar{G})| - 1 + p - q + t$$

$$\min_{A} \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t))(-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ = |\omega(G)| - |\omega(S(p, q, t))| + 1 - |\Sigma(\bar{G})| + p - q - t.$$

(6)

証明. 補助定理 2 の系の証明より. $\beta(G) = |\omega(\bar{G})| - 1$ だから.

3. Spatial graph with local knots.

定義. \bar{G} を (平面的) グラフ G の平面グラフとし \bar{G} の各辺 e_i の中央を中心とした小さな 3-球体 B_i を取る. ただし B_i は $(B_i, \bar{G} \cap B_i) = (B_i, e_i \cap B_i)$ であって且つこの球体が自明な結び目 $i \neq j$ に対して $B_i \cap B_j = \emptyset$ となるように取っておく. 次に部分弧 $(e_i \cap B_i)$ を勝手に埋め込んだ部分弧で置き代え $(B_i, B_i \cap \hat{e}_i)$ が knotted (自明でもよい) ball pair にする. このようにして G の空間グラフ \tilde{G} を得る. このような空間グラフ \tilde{G} を局所結び目をもつ G の空間グラフ (a spatial graph of G with local knots) といふ. そして 球体 $(B_i, \bar{G} \cap B_i) (= (B_i, \hat{e}_i \cap B_i))$ を \tilde{G} の局所結び目 (local knots) といふ.

定義. \tilde{G} の全ての局所結び目が自明なものを交代結び目 (alternating knots) とし \tilde{G} を交代局所結び目をもつ G の空間グラフ といふ.

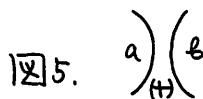
定義. \tilde{G} を局所結び目をもつ G の空間グラフとする. 上の作り方によて得られる \tilde{G} の図 \tilde{G}_Δ を \tilde{G} の自然な図 (natural diagram) といふ. 特に交代局所結び目をもつ空間グラフ \tilde{G} の自然な図 \tilde{G}_Δ は常に交代結び目の図をもつとしておく.

[事実] \tilde{G} を局所結び目をもつ G の空間グラフとし \tilde{G}_Δ を \tilde{G} の自然な図とすると $|\omega(S(p, 0, 0))| = |\omega(G)| + h_p$
 $|\omega(S(0, q, 0))| = |\omega(G)| + h_q$
 $|\omega(S(0, 0, t))| = |\omega(G)|$ である. ここで h_p, h_q
 は平面グラフ $S(p, 0, 0), S(0, q, 0)$ に含まれる loops の数である.

(36)

補助定理4. state $S(p, g, t)$ 上の positive spin (+) に対する 図5 のように Δ_1 -変形, Δ_2 -変形を施し (+) spin を (-) spin と (0) spin に変える.
(図中の a, b は (+) spin 面の弧を示す).

(I) Δ_1 -変形. (i) もれ部分弧 a, b が $S(p, g, t)$ の異なる成分に含まれているときは Δ_1 -変形を行なうと $S(p, g, t)$ の連結成分の個数は丁度 1つ減る.



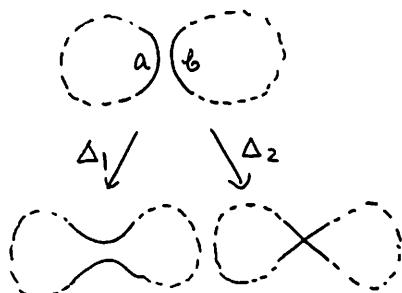
(ii) 部分弧 a, b が hoop から来る 1つの loop に含まれているときは Δ_1 -変形の結果連結成分の個数は丁度 1つ増える.
(iii). 部分弧 a, b が (ii) 以外の $S(p, g, t)$ の同じ連結成分に含まれているときは Δ_1 -変形の結果連結成分の個数は高々 1つ増え、減る事はない.

(II) Δ_2 -変形. (iv) 部分弧 a, b が $S(p, g, t)$ の異なる連結成分に含まれているときは Δ_2 -変形の結果 $S(p, g, t)$ の連結成分の個数は丁度 1つ減る.

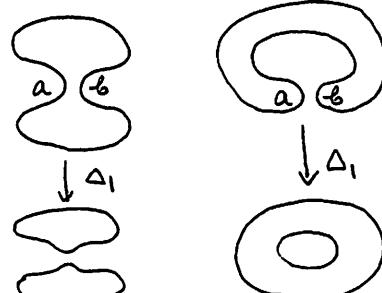
(v) 部分弧 a, b が $S(p, g, t)$ の同じ成分に含まれているときは Δ_2 -変形の結果連結成分の個数は不变.

証明. 次の図6から結果は明らかである.

(I) (i), (II) (iv)



(I) (ii)



(I) (iii)

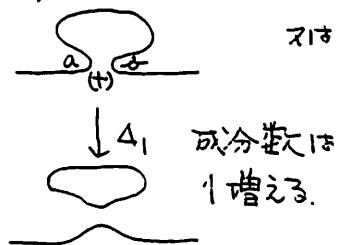
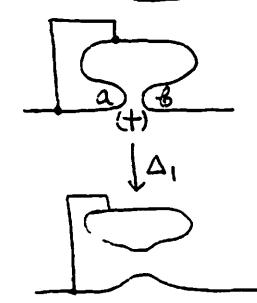


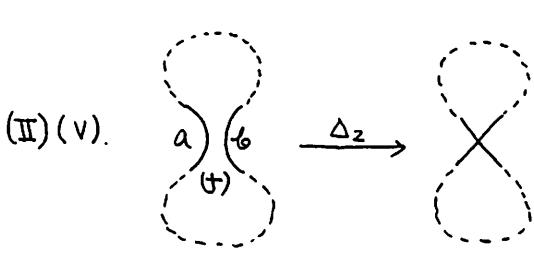
図6.

さて



成分数は
1増える.

成分数は不变.



命題 6. 空白] グラフ \tilde{G} の任意の図 \tilde{G}_Δ において.

$$\text{r-deg}_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) \leq |\omega(S(p, 0, 0))| + |\omega(S(0, q, 0))| - 2(|\omega(G)| - \beta(G) - |c(\tilde{G}_\Delta)|).$$

ここで $|c(\tilde{G}_\Delta)|$ は \tilde{G}_Δ の交叉点の数. そして図 \tilde{G}_Δ が state を得るの \Leftarrow Reidemeister moves で使わないうものとする.

証明. 補助定理 4 と 3 から

$$\begin{aligned} \max \deg_A R(\tilde{G}_\Delta) &\leq \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, 0, 0)\} Q(S(p, 0, 0)) \\ &= |\omega(S(p, 0, 0))| - |\omega(G)| + \beta(G) + p. \\ &= |\omega(S(p, 0, 0))| - |\omega(G)| + \beta(G) + |c(\tilde{G}_\Delta)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \deg_A R(\tilde{G}_\Delta) &\geq \min \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(0, q, 0)\} Q(S(0, q, 0)) \\ &= |\omega(G)| - |\omega(S(0, q, 0))| - \beta(G) - q \\ &= |\omega(G)| - |\omega(S(0, q, 0))| - \beta(G) - |c(\tilde{G}_\Delta)|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{従って } \text{r-deg}_A R(\tilde{G}_\Delta) &= \max \deg_A R(\tilde{G}_\Delta) - \min \deg_A R(\tilde{G}_\Delta) \\ &= |\omega(S(p, 0, 0))| + |\omega(S(0, q, 0))| - 2(|\omega(G)| - \beta(G) - |c(\tilde{G}_\Delta)|). \end{aligned}$$

補助定理 5. G を平面的グラフとし \tilde{G} , \tilde{G}_Δ を各々局所交代結び目をもつ G の空白] グラフとその 1 つの自然な図とする. すると state $S(p, 0, 0)$ (resp. $S(0, q, 0)$) は $(+)$ spin の両側の部分弧しか $S(p, 0, 0)$ (resp. $S(0, q, 0)$) の同じ連結成分に含まれるようなら $(+)$ spin (resp. $(-)$ spin) をもたない.

証明. $S(p, 0, 0)$ に 1 段] で証明する. ($S(0, q, 0)$ の証明も全く同じ) $S(p, 0, 0)$ 上の全ての spin は $(+)$ spin である. 1 つの局所交代結び目のサを考慮すればよい. 何故なら 2 つ以上の局所交代結び目の間に $(+)$ spin が出来ることはないから. 連結成分は边か loop から来る loop である (図 7). $(+)$ spin の両側にある部分弧が同じ边か同じ loop に含まれているような $(+)$ spin があるとす. 边又は loop 上の適当な向きに

(38)

1番して そのような (+) spin のうち最も内部になつているものを取る。

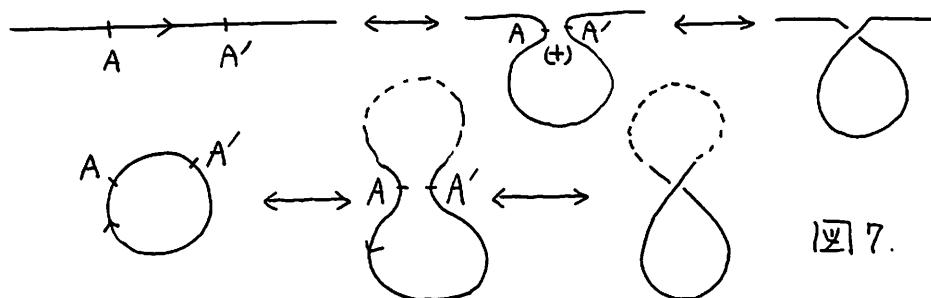


図 7.

従つてその部分弧の文字の間に上の方をせたすより下の方を部分弧の文字はないとしてよい。その各々の部分弧の上の点 A, A' を取る。 (+) spin の所で交叉点を復活させると $\widehat{AA'}$ は単純閉曲線（正確には交叉点での上下の差がある）になりその1閉曲線上に (+) spin の近くの2つの部分弧の1方のみが乗つてゐる。全ての交叉点は仮定によつて交代なのでこれらの交叉点を (+) spin の所で復活させると $S^2 - \widehat{AA'}$ の2つの連結成分のうち1方のみに交叉点から伸びる他の部分弧が属する（図8）。それ故図 \tilde{G}_α は A, A' に文字応する交差点の所で reduced でなくなる。これは矛盾。よつて結果が証明出来た。』

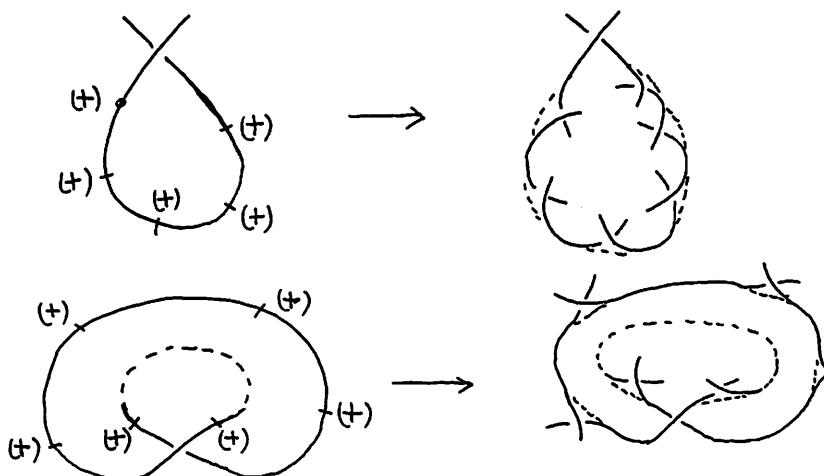


図 8.

定理1. G を cut edge のない平面的グラフとし, \bar{G} を G の平面グラフとする. \tilde{G}_Δ が交代局所結び目をもつ \bar{G} の空間グラフで \tilde{G}_Δ がその 1 つの自然な reduced であるような図とする.

$$\Rightarrow r-\deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = r-\deg_A R(\bar{G})(A, B) + 3|C(\tilde{G}_\Delta)|$$

証明. \tilde{G}_Δ を \bar{G} の自然な図とする. \tilde{G}_Δ は \bar{G} の各辺の折に局所結び目をもつので G の頂点を含む $S(p, 0, 0)$ と $S(0, q, 0)$ の各連結成分は G に同型である. そして任意の state $S(p, q, t)$ の連結成分で G の頂点を含むものは G を $S(p, q, t)$ の部分グラフとして含み (0) spin によって出来る新しい頂点の次数は常に 4 である. そして各 $S(p, q, t)$ は cut edge をもたない.

補助定理 3 によって

$$\begin{aligned} \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t)) & (-B, -(A+2+A^{-1})B^{-1}) \\ & = |\omega(S(p, q, t))| - |\omega(\bar{G})| + \beta(\bar{G}) + p - q + t \end{aligned}$$

もし state $S(p, q, t)$ が Δ_1 -変形によると state $S(p', q', t')$ に変わったとすると $p' = p-1$, $q' = q+1$, $t' = t$ である. 従って $p - q + t = p' - q' + t' + 2$ かつ 補助定理 4 (I) (i), (ii), (iii) から $S(p', q', t')$ の連結成分の数は $S(p, q, t)$ のそれに比べて高々 1 増える. 従って

$$\begin{aligned} \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t)) \\ \geq \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p', q', t')\} Q(S(p', q', t')) + 1 \end{aligned}$$

またもし state $S(p, q, t)$ が Δ_2 -変形によると state $S(p', q', t')$ に変わったとすると $p' = p-1$, $q' = q$, $t' = t+1$ だから $p - q + t = p' - q' + t'$ そして 補助定理 4 (II) (iv) の時

$$\begin{aligned} \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t)) \\ = \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p', q', t')\} Q(S(p', q', t')) + 1. \end{aligned}$$

補助定理 4 (II) (v) のとき

$\max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, q, t)\} Q(S(p, q, t)) = \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p', q', t')\} Q(S)$

しかし 補助定理 5 より 交代局所結び目をもつ 空間グラフの場合 state $S(p, 0, 0)$ (resp. $S(0, q, 0)$) は $S(p, 0, 0)$ (resp. $S(0, q, 0)$) の同じ連結成分に両側の部分弧が含まれるような (+) spin (resp. (-) spin) をもたないから $S(p, 0, 0)$ (resp. $S(0, q, 0)$) は 補助定理 4 (v) の場合には起らぬ.

(40)

証明

$$\max \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = \max \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(p, 0, 0)\} Q(S(p, 0, 0)) \\ = \beta(G) + p + h_p = \beta(G) + |c(\tilde{G}_\Delta)| + h_p$$

ここで h_p は state $S(p, 0, 0)$ に含まれる loops の数.

同様に

$$\min \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = \min \deg_A \{\tilde{G}_\Delta / S(0, q, 0)\} Q(S(0, q, 0)) \\ = -\beta(G) - q - h_q = -\beta(G) - |c(\tilde{G}_\Delta)| - h_q.$$

ここで h_q は state $S(0, q, 0)$ に含まれる loops の数. また $|\omega(S(p, 0, 0))| - h_p = |\omega(G)|$, $|\omega(S(0, q, 0))| - h_q = |\omega(G)|$ は注意.

更に空のグラフの巡回 \tilde{G}_Δ に含まれる全ての局所結び目は交代であるから $h_p + h_q = |c(\tilde{G}_\Delta)|$ である.

$$\text{故に } r - \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = 2\beta(G) + 3|c(\tilde{G}_\Delta)| \geq 2\beta(G) \\ = r - \deg_A R(\bar{G})(A, B) \quad (\text{補助定理1, 系2}) //$$

系1. $G, \bar{G}, \tilde{G}_\Delta$ は定理1と同じとし \tilde{G} は少なくとも1つの自明でない交代局所結び目をもつとする.

\Rightarrow (i) \tilde{G}_Δ は \bar{G} は firm isotopic でない.

(ii) G が高々3の次数の頂点のみから成るならば \tilde{G}_Δ は \bar{G} は flexible isotopic (ambient isotopic) でない.

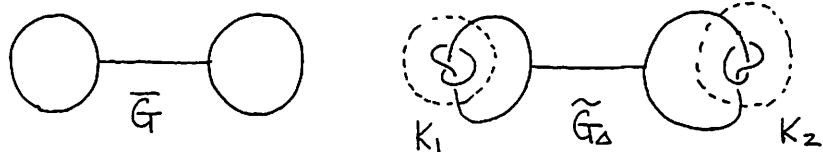
証明. $[Y_2]$ によると $r - \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B)$ は firm isotopy invariant である. また G が3-regular graph のとき $r - \deg_A R(\tilde{G}_\Delta)(A, B)$ は \tilde{G}_Δ の flexible isotopy invariant だから定理1から結果が得出る.

系2. 定理1のような空のグラフ \tilde{G} に対して $|c(\tilde{G}_\Delta)|$ は \tilde{G}_Δ の firm isotopy invariant であり, G の頂点の次数が3以下のときは $|c(\tilde{G}_\Delta)|$ は \tilde{G}_Δ の flexible isotopy invariant である ($[M]$ の結果と比較せよ).

例. $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = R(\bar{G})(A, B)$ とする例がある. G を有限グラフとし \bar{G}, \tilde{G} を各々 G の平面グラフ, G の空のグラフとする. \tilde{G}_Δ を \tilde{G} の1つの diagram とする. もし平面グラフ \bar{G} が cut edge

(41)

をもつたら $R(\bar{G}) = 0$ また \tilde{G}_Δ から得られる全ての state が cut edge をもつたら $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = 0$ であり. 次の例はその性質をもってるので $R(\tilde{G}_\Delta)(A, B) = R(\bar{G})(A, B) = 0$.



しかし \tilde{G}_Δ は \bar{G} は flexible isotopic だから. 局所結び目 K_1 , K_2 は自明でないものならどうのようだものでもよい.

参考文献

- [M] K. Murasugi : Jones polynomials and classical conjecture in knot theory. preprint
- [N] S. Negami : Polynomial invariants of graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987) 601-622
- [Y₁] S. Yamada : A regular isotopy invariant of graphs embedded in S^3 and an invariant of θ -curves. preprint
- [Y₂] _____ : An invariant of spatial graphs. preprint

東京女子大学文理学部数理学科
167 東京都杉並区善福寺 2-6-1.

(13)