$\deg_v P_L(v,z)$ と Seifert circles の最小数

小林 一章

東京女子大学 文理学部

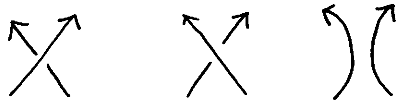
§0 Introduction

$P_L(v,z)$ を次の (i), (ii) によって定義される2変数 Jones 多項式とする

(i) L が trivial knot $\Rightarrow P_L(v,z)=1$

(ii) L_+, L_-, L_0 は1つの交叉点の近くで図1のようになっており他の部分では一致しているような3つの oriented link とする

$$\Rightarrow v^{-1}P_{L_+} - vP_{L_-} = zP_{L_0}$$



L_+ L_- L_0

図. 1.

Yamada [Y] は L の braid index, $b(L)$, と L の diagram $\tilde{L}$ の Seifert circles の数, $s(\tilde{L})$, に関して次のような定理を証明した

定理 (Yamada [Y]) L を oriented link とし $\tilde{L}$ を L の1つの oriented diagram とする　$b(L)$ を L の braid index, $s(\tilde{L})$ を $\tilde{L}$ の Seifert circles の個数とする

$$\Rightarrow \quad b(L) = \min_{\tilde{L}\in L} s(\tilde{L})$$

一方 H. Morton ([M]) は v に関する P_L の次数, $\deg_v P_L$, $\tilde{L}$ の代数的交叉数, $\tilde{c}(\tilde{L})$, そして $s(\tilde{L})$ 等の間の関係を示した.

定理 (Morton [M]) $h\text{-}\deg_v P_L$, $l\text{-}\deg_v P_L$ を各々 v に関する P_L の最高次数と最低次数とする

$$\Rightarrow \tilde{c}(\tilde{L})-(s(\tilde{L})-1) \leqq l\text{-}\deg_v P_L \leqq h\text{-}\deg_v P_L \leqq \tilde{c}(\tilde{L})+(s(\tilde{L})-1)$$

v に関する P_L の reduced degree, $r\text{-}\deg_v P_L$, を

$$r\text{-}\deg_v P_L \equiv (h\text{-}\deg_v P_L)-(l\text{-}\deg_v P_L)$$ で定義する

上の Morton の定理によって

$$r\text{-}\deg_v P_L \leqq 2(s(\tilde{L})-1)$$ が示される

そこで Yamada の定理より $b(L)$ を求めるには $\min_{\tilde{L}} s(\tilde{L})$

を求めればよい. 従って上の等号がいつ成立するかを調べればよい事になる

注. $r\text{-}\deg_v P_L = 2(s(\tilde{L})-1)$ が成立

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} l\text{-}\deg_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L})-(s(\tilde{L})-1) \quad \text{且つ} \\ h\text{-}\deg_v P_L = \tilde{c}(\tilde{L})+(s(\tilde{L})-1) \end{array}$$

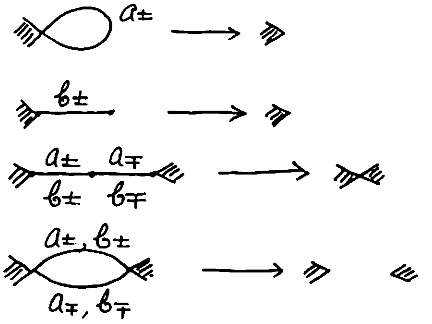
$\tilde{L}$ を oriented link diagram とし G (又は $G_{\tilde{L}}$) を $\tilde{L}$ から導かれる oriented coded graph とする. (oriented coded graph に関しては [K1], [K2] を参照) 以下で例えば $G = G_{a+}$, $G_{a+} \cup G_{b-}$ 等と書いた時は G の edges が全て $a+$ code, $a+$ code と $b-$ code である事を示す oriented link diagram から導かれた oriented coded graph を単に link の graph という事もある

定義 graph G の multi-edges を single edge に変えた graph を G の基本グラフといい F_G とかく

定義 graph G において下図の一方向の R-I, R-II moves 及び両方向の R-III moves が出来ない時 G は R-reduced であるという.（R-III moves については [K1], [K2] 参照）.

R-I

R-II



注 $G = G_{a+}$ 又は G_{a-} のときは G に loop がなければ G は R-reduced 又 $G = G_{b+}$ 又は G_{b-} のときは degree 1 の頂点がなければ G は R-reduced, $G = G_{a\pm} \cup G_{b\mp}$（複号同順）の時は loop と degree 1 の頂点がなければ R-reduced.

定理1 G を oriented link diagram $\tilde{L}$ のグラフとする. $G = G_{b+}$ 又は G_{b-} で G の全ての edges が multi-edge である（従って G は R-reduced）
$\Rightarrow$ I-$\deg_v P_L = 2(s(\tilde{L}) - 1)$ ただし L は $\tilde{L}$ が属する oriented link type 従ってこの時 Seifert circles の数は最小.

定理2 G を oriented link diagram $\tilde{L}$ のグラフとする $G = G_{a+}$ (resp. G_{a-}) で R-reduced 且つ G の基本グラフ F_G が tree になっている
$\Rightarrow$ $s(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の属する link type L の positive (resp.

negative) diagram 中最小の Seifert circle 数を表わしている。

§1. 定理の証明

Lemma 1 次の条件を全てみたす平面グラフは存在しない
 (i) multi-edges はない
 (ii) 全ての頂点の degree が 4 以上
 (iii) R^2-G の全ての多辺形が 4 辺形以上
 (iv) cut edges がない

Proof. X を集合としたとき $\#X$ で X の要素の数を表わすとする また $V(G)$, $E(G)$, $R(G)$ で各々グラフ G の頂点の集合, 辺の集合, R^2-G の領域の集合とする

G が上の条件 (i)−(iv) を全て満足しているとする

(i), (ii) より $4\#V(G) \leqq 2\#E$

(iii), (iv) より $4\#R(G) \leqq 2\#E$

平面グラフに関するオイラーの定理より

$$2 = \#V(G) - \#E(G) + \#R(G) \leqq \frac{1}{2}\#E - \#E + \frac{1}{2}\#E = 0$$

これは矛盾 従って (i)−(iv) を全てみたす平面グラフ G はない

定理1の証明 (I) $G = G_{b+}$ で全ての edges は multi-edges とする (従って G は R-reduced)

G に対し次のような resolution を作る.

(a) multi-edges の部分を以下のように single edge 又は empty edge になる迄 crossing change と smoothing を行なう. ただし single edge の所の code は $b+$ の所で止めておく ($b-$ code にはしない) (図 2)

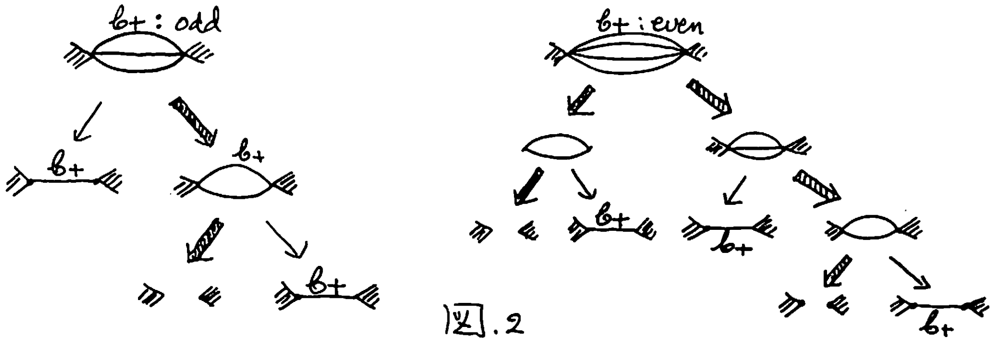


図.2

(太い矢印は r-$\deg_v P_L$ を与える所 後述). このような resolution を全ての multi-edges の所で行なうと b_+ code のみをもつ simple graph (一般に non-connected) が出来る その1つの連結成分を G_1 とすると G_1 が1点でないときは lemma より

(i) cut edges がある (ii) degree 3 以下の頂点があるか又は

(iii) $\mathbb{R}^2 - G_1$ が3辺形を含む (2辺形は無い) のいずれかが起る

(i) cut edge があるときは 下図3. のように e が cut edge

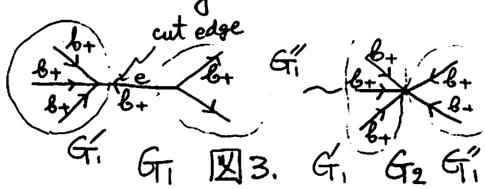


図3.

としたとき $G_1 - \{e\} = G_1' \cup G_1''$ とおくと G_1 が表わす link diagram $\tilde{L}_1$ と e を contract して出来る G_1' と G_2' の1点での join から出来るグラフ G_2 が表わす link diagram $\tilde{L}_2$ とは同じ oriented link type に属している (ただし G_2 では G_1' 又は G_1'' のいずれか一方のグラフ上の orientation が反対になる.)

$G = G_{\tilde{L}}$ の時は $s(\tilde{L}) = \#V(G_{\tilde{L}})$, $\hat{c}(\tilde{L}) = \sum_{e_i \in E} \varepsilon(e_i)$ ここで

$E = E(G_{\tilde{L}})$. $\varepsilon(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{もし edge } e_i \text{ が交叉点} \quad \text{に対応} \\ -1 & \quad 〃 \quad\quad\quad 〃 \end{cases}$

であるから $\hat{c}(\tilde{L}_{G_1}) = \hat{c}(\tilde{L}_{G_2}) + 1$, $s(\tilde{L}_{G_1}) = s(\tilde{L}_{G_2}) + 1$

従ってもし $l\text{-}\deg_v P_{L_2} = \hat{c}(\tilde{L}_{G_2}) - (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1)$ なら $l\text{-}\deg_v P_{L_1} = l\text{-}\deg_v P_{L_2} = \hat{c}(\tilde{L}_{G_1}) - (s(\tilde{L}_{G_1}) - 1)$ だが $h\text{-}\deg_v P_{L_2} = \hat{c}(\tilde{L}_{G_2}) + (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1)$ であっても $h\text{-}\deg_v P_{L_1} = h\text{-}\deg_v P_{L_2} = \hat{c}(\tilde{L}_{G_1}) + (s(\tilde{L}_{G_1}) - 1) - 2$ となってしまう.

(ii) degree 3 以下の頂点があるとき

(a) degree 1 の頂点があるとき この時は cut edge がある事になるので (i) の変形を行なう

(b) degree 2 の頂点があるとき，図4(a) の crossing change

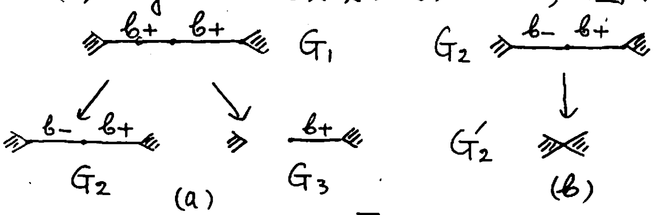


図4

と smoothing を行ない G_2 に関しては更に図4(b) の R-II move を行なう すると $\tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'})$, $s(\tilde{L}_{G_2}) = s(\tilde{L}_{G_2'}) + 2$ 従って $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'}) - (s(\tilde{L}_{G_2'}) - 1)$ であっても $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) - (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1) + 2$, $h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'}) + (s(\tilde{L}_{G_2'}) - 1)$ であっても $h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) + (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1) - 2$

グラフ G_3 に関しては (ii)(a)（又は (i)）と同じ変形をする

(c) degree 3 の頂点があるとき 先ず図5(a) の crossing

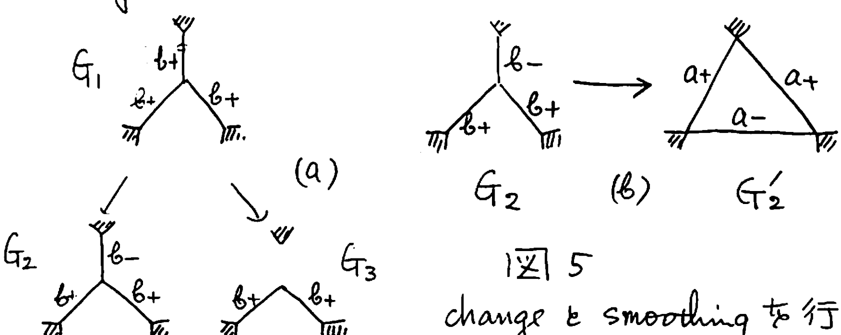
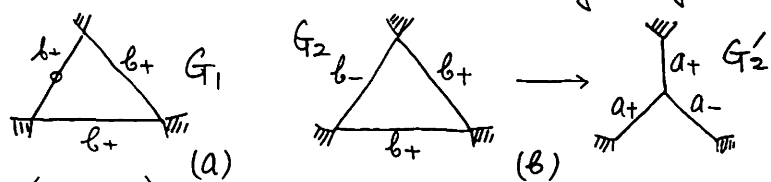


図5

change と smoothing を行ない，G_2 に対しては更に図5(b) の R-III move を行なう。すると $\tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'})$, $s(\tilde{L}_{G_2}) = s(\tilde{L}_{G_2'}) + 2$ 従って $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'}) - (s(\tilde{L}_{G_2'}) - 1)$ であっても $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) - (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1) + 2$, $h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2'}) + (s(\tilde{L}_{G_2'} - 1)$ であっても $h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \tilde{c}(\tilde{L}_{G_2}) + (s(\tilde{L}_{G_2}) - 1) - 2$

グラフ G_3 に関しては (ii)(b) の変形を行なう

(iii) 3辺形が存在するとき（multi-edge はないので 2辺形が起る事はない） 先ず図6(a) の crossing change と smoothing



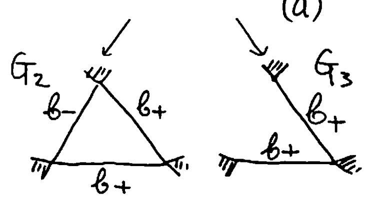


図6

を行ない，G_2 に関しては更に図6(b) の R−III move を行なう

すると $\hat{c}(\hat{L}_{G_2}) = \hat{c}(\hat{L}_{G_2'})$，$s(\hat{L}_{G_2}) = s(\hat{L}_{G_2'}) + 2$　従って $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \hat{c}(\hat{L}_{G_2'}) - (s(\hat{L}_{G_2'}) - 1)$ であっても $l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = l\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \hat{c}(\hat{L}_{G_2}) - (s(\hat{L}_{G_2}) - 1) + 2$，$h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \hat{c}(\hat{L}_{G_2'}) + (s(\hat{L}_{G_2}) - 1)$ であっても $h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2}} = h\text{-}\deg_v P_{L_{G_2'}} = \hat{c}(\hat{L}_{G_2}) + (s(\hat{L}_{G_2}) - 1) - 2$　グラフ G_3 に関しては (i)〜(iii) のいずれかが再び起る．

以上よりグラフ G の全ての multi-edges の所を b_+−code をもつ single edge 又は empty edge にした graph の connected subgraph G_1 がもし edges をもてば必らず

$$(*)\quad \begin{cases} \hat{c}(\hat{L}_{G_1}) - (s(\hat{L}_{G_1}) - 1) < l\text{-}\deg_v P_{L_{G_1}} & \text{かつ} \\ \hat{c}(\hat{L}_{G_1}) + (s(\hat{L}_{G_1}) - 1) > h\text{-}\deg_v P_{L_{G_1}} \end{cases}$$

又は
$$(**)\quad \begin{cases} \hat{c}(\hat{L}_{G_1}) - (s(\hat{L}_{G_1}) - 1) = l\text{-}\deg_v P_{L_{G_1}} & \text{かつ} \\ \hat{c}(\hat{L}_{G_1}) - (s(\hat{L}_{G_1}) - 1) > h\text{-}\deg_v P_{L_{G_1}} & \text{が起る} \end{cases}$$

従って全ての multi-edges の部分で empty−edges となる resolution branch（図2の太い矢印の branch）のみが $r\text{-}\deg_v P_{L_{\hat{G}}} = 2(s(\hat{L}_{\hat{G}}) - 1)$ を保っていることになる。ここで $\hat{G}$ は resolution の各 step における graph　また n−成分の trivial link の R-reduced diagram（i.e. n 個の頂点のみから成る自明な graph）G_0 においては $r\text{-}\deg_v P_{L_{G_0}} = 2(n-1) = 2(s(\hat{L}_{G_0}) - 1)$ が成立している

上の crossing changes と smoothings は全て b_+−code の所で

行なわれたので P_L の一般式は次のようになる。

$$P_L=\sum_{i=1}^{m}\nu^{2r_i}(\nu z)^{s_i}\left(\frac{\nu^{-1}-\nu}{z}\right)^{k_i-1}$$

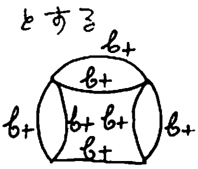
ここで resolution tree の outermost links (全て trivial link) は initial changing branch の所の L_1 から initial smoothing branch の L_m 迄あるとしており, L から L_i に到る迄に crossing changes を r_i 回, smoothing を s_i 回行ない, L_i の成分の個数が k_i 個であるとしている 上の和 $\sum$ において正負の係数で打ち消し合う可能性のあるのは $\left(\frac{\nu^{-1}-\nu}{z}\right)^{k_i-1}$ の ν の係数の -1 が関係している所なので $l\text{-}\deg_\nu P_L$ にこの負符号は影響はない また $h\text{-}\deg_\nu P_L$ に関しては (*), (**) より図2の太い矢印の branch の所で $h\text{-}\deg_\nu P_L$ に到達するのであるが, 太い矢印の branch の outermost trivial link のグラフは R-reduced (i.e. 頂点のみから成るグラフ) でその成分の個数, k_i, は $k_i=\max_{1\le j\le m}\{k_j\}$ $=\#V(G)$ (一定) 従って係数の正負の符号で打ち消し合う事はない 実際 $(n_1,n_2,\dots,n_p)$ を各 multi-edges の本数とすると図2の resolution より

$$h\text{-}\deg_\nu P_L=(n_1+n_2+\cdots+n_p)+(\#V(G)-1)$$
$$l\text{-}\deg_\nu P_L=(n_1+n_2+\cdots+n_p)-(\#V(G)-1)$$

従って $r\text{-}\deg_\nu P_L=2(\#V(G)-1)=2(s(\tilde{L}_G)-1)$

(II) $G=G_{b-}$ の時, これから得られる link diagram $\tilde{L}$ の全ての crossing の上下を入れかえた link diagram は $\tilde{L}$ の mirror image $\tilde{L}!$ であり, そのグラフ $G!$ の全ての edges の code は $b+$ 従って $P_L(\nu,z)=P_{L!}(-\nu^{-1},z)$ であり $h\text{-}\deg_\nu P_L=(-1)\times(l\text{-}\deg_\nu P_{L!})$ $l\text{-}\deg_\nu P_L=(-1)\times(h\text{-}\deg_\nu P_{L!})$ よって $r\text{-}\deg_\nu P_L=(-1)\times(l\text{-}\deg_\nu P_{L!})+(h\text{-}\deg_\nu P_{L!})=r\text{-}\deg_\nu P_{L!}=2(s(\tilde{L}!)-1)=2(s(\tilde{L})-1)$

例1 以下の例は定理1において multi-edges の条件をはずすと定理の結論が成立しない例である。oriented link L の oriented diagram $\tilde{L}$ のグラフ G が図7で与えられている

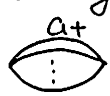
とする 

$$P_L = \nu^2\left(\frac{\nu-\nu^3}{z}+\nu z\right)^2 + \nu^2\cdot\nu z\left\{\nu^4\cdot\frac{\nu^{-1}-\nu}{z} + 2\nu^3 z + \nu^2(\nu z)^2\frac{\nu^{-1}-\nu}{z} + (\nu z)^3\right\} + (\nu z)^2\left(\frac{\nu-\nu^3}{z}+\nu z\right)^2$$

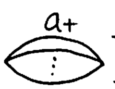
図7 従って $h\text{-}\deg_\nu P_L = 8$, $l\text{-}\deg_\nu P_L = 4$

∴ $l\text{-}\deg_\nu P_L = 4$, 一方 $s(\hat{L})=4$ だから $l\text{-}\deg_\nu P_L < 2(s(\hat{L})-1)$ //

定理2の証明. oriented coded graph G は link diagram から作られたものだから各頂点に集まる a-code edges は偶数個([K2]) しかも G の基本グラフ F_G が tree だから G の全ての edges は multi-edges になっており 各 multi-edges は全て偶数 そこで multi-edges の本数を各々 $(2n_1, 2n_2, \dots, 2n_p)$ とする. 各 edge の code は仮定より a_+, F_G で $\underline{\;2n_i a_+\;}$,

G で  $\}2n_i$ とかける G の subgraph を G_i, それに対応する oriented link を L_i とすると graph の cut vertex の所で link は connected sum になるから $L=\#_{i=1}^{p} L_i$

なら $P_L=\prod_{i=1}^{p} P_{L_i}$ 従って $l\text{-}\deg_\nu P_L=\sum_{i=1}^{p}(l\text{-}\deg_\nu P_{L_i})$

そして  $\}2n$ というグラフ G_{2n} をもつ link L_{2n} の多項式は $P_{L_{2n}} = \nu^2 P_{L_{2(n-1)}} + \nu z = \nu^{2n}\cdot\frac{\nu^{-1}-\nu}{z}+\sum_{i=0}^{n-1}\nu^{2i}(\nu z)$

従って $h\text{-}\deg_\nu P_{L_{2n}}=2n+1$, $l\text{-}\deg_\nu P_{L_{2n}}=1$

また $s(\hat{L}_{2n})=2n$

定理の結論を出すには link type L の positive diagram のみを考えればよいから Morton の不等式より

$s(\hat{L}) \ge c(\hat{L})+1-(l\text{-}\deg_\nu P_L) = c(\hat{L})+1-p$ ここで $c(\hat{L})$ は diagram $\hat{L}$ の交叉点数 ところで L は alternating link だから [Mu] により alternating diagram の所で く

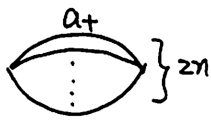
最小の交叉点数をもつ. 上の $\tilde{L}$ の graph は alternating diagram のグラフ 従って $c(\tilde{L}) = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_p)$ は L の diagram 中の最小交叉点数
それ故 $s(\tilde{L}) = \sum_{i=1}^{p} (2n_i - 1) + 1 = c(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-}\deg_v P_L)$ であって この $s(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の属している link type L の positive diagram 中最小の Seifert circle 数を表わしている
$G = G_{a-}$ で F_G が tree の時も同様に考えると $P_L = \prod_{i=1}^{p} P_i$
従って $h\text{-}\deg_v P_L = \sum_{i=1}^{p} (h\text{-}\deg_v P_{L_i})$

$$P_{L_{2n}} = v^{-2n} \frac{v^{-1} - v}{z} + \sum_{i=0}^{n-1} v^{-2i} (-v^{-1} z)$$

従って $h\text{-}\deg_v P_{L_{2n}} = -1$, $l\text{-}\deg_v P_{L_{2n}} = -(2n+1)$.
今度は link type L の negative diagrams のみを考えればよいから $s(\tilde{L}) \geq (h\text{-}\deg_v P_L) + 1 - \tilde{c}(\tilde{L}) = (h\text{-}\deg_v P_L) + 1 + c(\tilde{L})$
所が 上の計算より $s(\tilde{L}) = (h\text{-}\deg_v P_L) + 1 + c(\tilde{L})$ であって [Mu] より $c(\tilde{L})$ は L の diagram 中で最小の交叉点数を表わしているから この $s(\tilde{L})$ は L の negative diagram 中最小の Seifert 数を表わしている.

注. 定理2の証明からわかるように $G = G_{a+}$ 又は G_{b+} であって $s(\tilde{L}) = c(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-}\deg_v P_L)$ が成立している時 $s(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の属している link type L の positive diagram 中最小の Seifert circle 数を表わしている そして 例1のグラフから作られる link diagram $\tilde{L}$ に対し $s(\tilde{L}) = 4$, $c(\tilde{L}) = 7$, $l\text{-}\deg_v P_L = 4$ だから $s(\tilde{L}) = c(\tilde{L}) + 1 - (l\text{-}\deg_v P_L)$ が成立. 従ってこの時 $s(\tilde{L})$ は $\tilde{L}$ の属している link type L の positive digram 中最小の Seifert 数を表わしている

例2. link L の diagram $\tilde{L}$ のグラフ G が図8のような



時 $P_L = v^{2n}\dfrac{v^{-1}-v}{z} + \sum_{i=0}^{n-1} v^{2i}(vz)$

従って $h\text{-}\deg_v P_L = 2n+1$, $l\text{-}\deg_v P_L = 1$

$\therefore$ $r\text{-}\deg_v P_L = 2n$, $s(\tilde{L}) = 2n$

従って $r\text{-}\deg_v P_L \leqq 2(s(\tilde{L})-1)$ で等号は $n=1$ の時のみ　従って $n \geqq 2$ の時 $r\text{-}\deg_v P_L$ で $\tilde{L}$ の属する link type L の最小の Seifert 数を決定は出来ないが　この $s(\tilde{L})$ は L の positive diagram 中の最小の Seifert circle 数を与えている事が定理2から示される

References.

[FYHLMO] Freyd, Yetter, Hoste, Lickorish, Millet and Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links," Bull. A.M.S. 12 (1985) 239–246.

[K_1] Kobayashi, K, "グラフと絡み輪に関する多項式" 数理解析研講究録 566 (1985) 130–144

[K_2] Kobayashi, K, "Coded graph of oriented links and Homfly polynomial." to appear.

[M] Morton, H, "Seifert circles and knot polynomials" to appear

[Mu] Murasugi, K, "Jones polynomials and classical conjectures in knot theory" to appear.

[Y] Yamada, S, "The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link", to appear.