グラフを利用したlinkの多項式の研究

東女大文理　小林一章

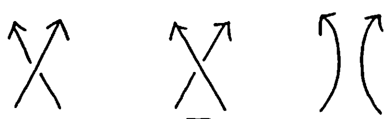
本論文ではグラフを利用してlinkのHoste多項式の性質を述べてみたいと思います。Hoste多項式については文献([H], [K.1])を参照，linkの図をグラフに直す事については文献([K.2])を参照して下さい。ただし[K.1]で述べたHoste多項式は[H]に従って本論文では以下のようにします(これは単なる変数変換です)

(1) Kがk個の成分をもつ自明な絡み輪(link)

$$\Rightarrow Q_K(x,y,z)=\left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k-1}$$

(2) K, $\bar{K}$, L がある交差点の近くで次の関係にあり，他の所では一致しているような3つのlinksなら

$xQ_K+yQ_{\bar{K}}+zQ_L=0$ という関係が成立する.



K　　$\bar{K}$　　L

また[K, 2]ではlinkから導かれる平面R^2上のグラフにおいて無限遠点を含む方のグラフ(双対グラフ)は使用しませんでしたが，本論文ではむしろ積極的に使います。このときグラフが連結(linkがsplit)でないならそれらの双対グラフを考え

るときは，各連結成分の双対グラフを取り，それらの disjoint union を最初の非連結グラフの双対グラフとします。

Jones([J]) は彼の定義した link の多項式 $V_L(t)$ に関し次のような結果を出している。

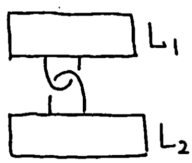
[Jones] γ を link L の1つの連結成分で，他の連結成分との linking number を λ とする。L' を γ の向きを逆にして得られた link とする。このとき $t^{3\lambda}V_L(t)=V_{L'}(t)$

この結果に関連して次の事が証明される。

定理. $L=L_1\cup L_2$ というように2つの sublinks に分け(L_1 と L_2 は split しているわけではない), L_1 と L_2 が double crossing sum になっていて $L'=L_1\cup(-L_2)$ とする．このとき

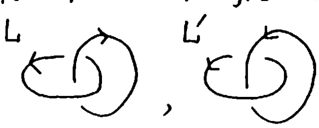
$$lk(L_1,L_2)=0 \Leftrightarrow Q_L=Q_{L'}$$

ここで crossing sum とは

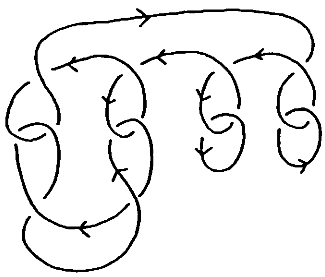


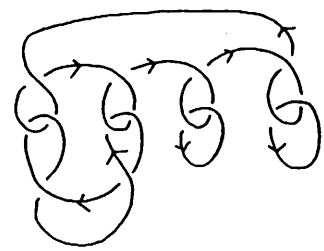
となっていることであり，図の様な「引っかかり」が2ヶ所あるとき double crossing sum という。

注. 上述のような link L, L' に対していつ $Q_L=Q_{L'}$ となるかという問題設定に対しては $lk(L_1,L_2)\neq 0$ のときは

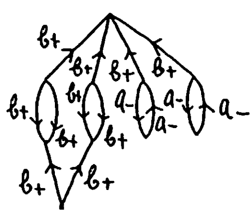


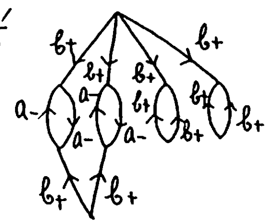
に対して $Q_L\neq Q_{L'}$ であり また例え $lk(L_1,L_2)=0$ であっても上述の crossing sum をする場所が(それは $lk(L_1, L_2)=0$ より偶数個所) 4ヶ所以上では下図の例のように $Q_L \neq Q_{L'}$ となる例がある。

L


L′


グラフで示すと下図のようになる。

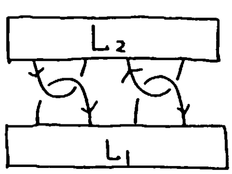
G


G′


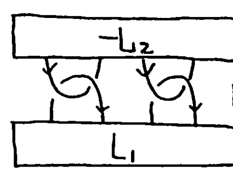
これの Conway poly. $\nabla_L(z) = Q_L(1, -1, -z)$ を計算すると

$\nabla_L(z) = 2z^3 + 3z^5$, $\nabla_{L'}(z) = -2z^3 + 2z^5$ となり $Q_L \neq Q_{L'}$ が示される。

定理の証明). ($\Longrightarrow$). 定理の条件より L 及び L′ の diagram は下図のようになっているとしてよい

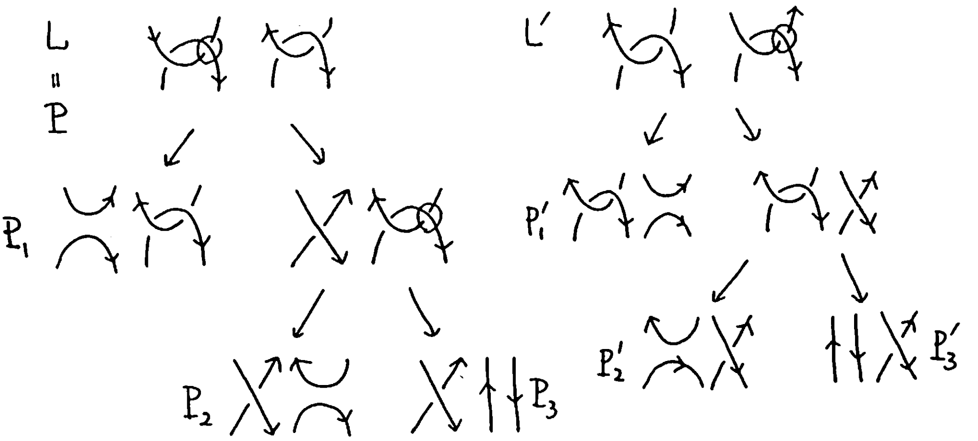


$L = L_1 \cup L_2$

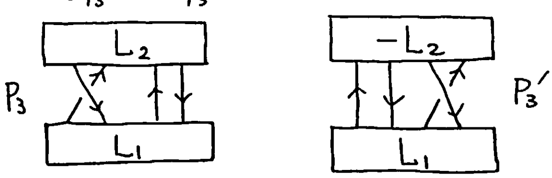


$L' = L_1 \cup -L_2$

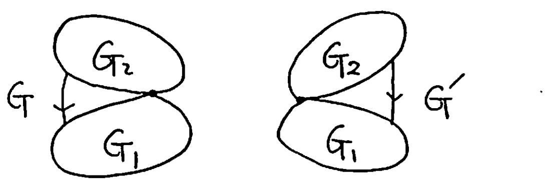
図の double crossing sum の部分で resolve すると



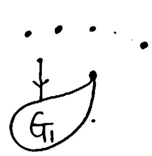
上図で P_1 と P_1' は共に $L_1 \# H_- \# L_2$ (H_- は絡み数 -1 をもつ Hopf link) であり P_2 と P_2' は共に $L_1 \# L_2$ であるから $Q_L = Q_{L'}$ を示すには $Q_{P_3} = Q_{P_3'}$ を示せばよい。P_3 及び P_3' の部分の diagram は



これをグラフで表わすと

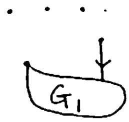


グラフの頂点は contraction に依って数個が1個になることはあっても消滅することはないので G_2 の部分の resolution を取ると G は

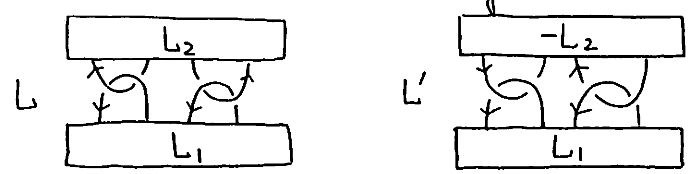


又は

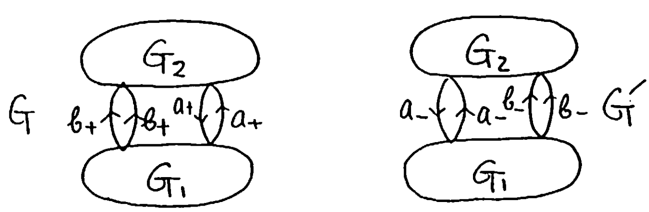
に resolve される しかし P_3 の向きを考慮にいれると右図は起り得ない。同様に G' の G_2 の部分の

resolutionを取ると  又は  に分解される。所が P_3' の向きを考慮に入れると右図は起り得ない。(上の G, G' の G_2 の部分のresolutionは互いに対応するグラフの辺の所でresolutionを取る) 従って outermost vertices に対応するグラフが全て同じでresolutionは G_2 の対応する所で行なっているので $Q_{P_3} = Q_{P_3'}$ $\therefore Q_L = Q_{L'}$

(⇐) 対偶を証明する。(即ち $lk(L_1, L_2) \neq 0 \Rightarrow Q_{L_1} \neq Q_{L_2}$ を示す) L_1 と L_2 が double crossing sum になっているので $lk(L_1, L_2) \neq 0 \Rightarrow lk(L_1, L_2) = \pm 2$ そこで $lk(L_1, L_2) = 2$ の場合について証明する。($lk(L_1, L_2) = -2$ のときも同様に証明出来る) L 及び L' は下図のような diagram をもつと仮定してよい。

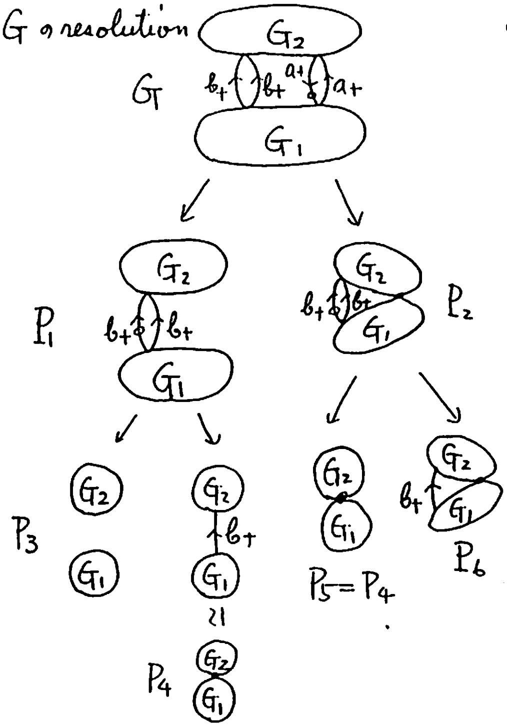


これらに対応するグラフは下図のようになる。



G の resolution をグラフを利用して行なうと次の図のようになる ([K. 2] 参照.)

G の resolution

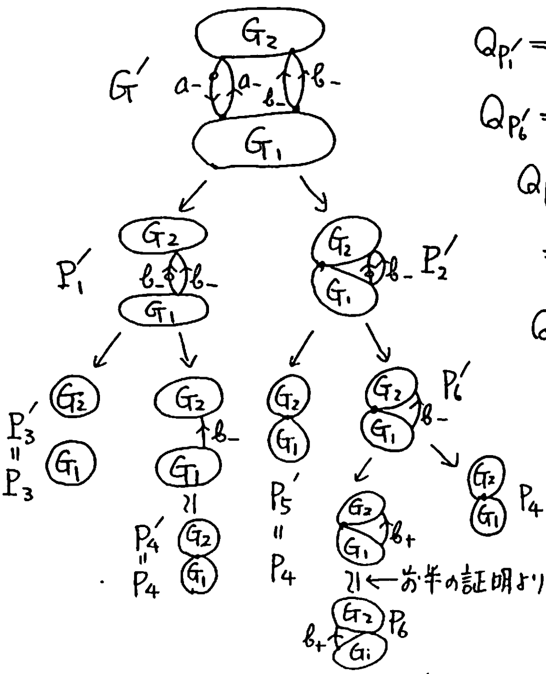


$$Q_{P_1} = -\frac{y}{x}Q_{P_3} - \frac{z}{x}Q_{P_4}$$

$$Q_{P_2} = -\frac{y}{x}Q_{P_5} - \frac{z}{x}Q_{P_6}$$

$$\begin{aligned} Q_G &= -\frac{y}{x}Q_{P_1} - \frac{z}{x}Q_{P_2} \\ &= \frac{y^2}{x^2}Q_{P_3} + \frac{yz}{x^2}(Q_{P_4} + Q_{P_5}) \\ &\qquad + \frac{z^2}{x^2}Q_{P_6} \\ &= \frac{y^2}{x^2}Q_{P_3} + \frac{2yz}{x^2}Q_{P_4} + \frac{z^2}{x^2}Q_{P_6} \end{aligned}$$

G′ の resolution



$$Q_{P_1'} = -\frac{x}{y}Q_{P_3} - \frac{z}{y}Q_{P_4}$$

$$Q_{P_6'} = -\frac{x}{y}Q_{P_6} - \frac{z}{y}Q_{P_4}$$

$$\begin{aligned} Q_{P_2'} &= -\frac{x}{y}Q_{P_4} - \frac{z}{y}Q_{P_6'} \\ &= \frac{z^2}{y^2}Q_{P_4} - \frac{x}{y}Q_{P_4} + \frac{xz}{y^2}Q_{P_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{G'} &= -\frac{x}{y}Q_{P_1'} - \frac{z}{y}Q_{P_2'} \\ &= \frac{x^2}{y^2}Q_{P_3} + \left(\frac{2xz}{y^2} - \frac{z^3}{y^3}\right)Q_{P_4} \\ &\qquad - \frac{xz^2}{y^3}Q_{P_6} \end{aligned}$$

$$Q_G - Q_{G'} = \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)Q_{P_3} + \left(\frac{2yz}{x^2} - \frac{2xz}{y^2} + \frac{z^3}{y^3}\right)Q_{P_4} + \left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{xz^2}{y^3}\right)Q_{P_6}$$

ここでグラフより $Q_{P_3} = \left(-\frac{x+y}{z}\right)Q_{G_1}\cdot Q_{G_2}$

$Q_{P_4} = Q_{G_1}\cdot Q_{G_2}$ だから

$$Q_G - Q_{G'} = \left\{\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right) + \left(\frac{2yz}{x^2} - \frac{2xz}{y^2} + \frac{z^3}{y^3}\right)\right\}Q_{G_1}\cdot Q_{G_2} + \left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{xz^2}{y^3}\right)Q_{P_6}$$

ここで $x=1,\ y=-1$ を代入すると

$$\tilde{Q}_G - \tilde{Q}_{G'} = (-2z-2z-z^3)\tilde{Q}_{G_1}\cdot\tilde{Q}_{G_2} = (-4z-z^3)\tilde{Q}_{G_1}\cdot\tilde{Q}_{G_2}$$

ここで $z \neq 0, \sqrt{-2}$ 且つ G_1, G_2 は共に connected としてよいから $\tilde{Q}_{G_1}\cdot\tilde{Q}_{G_2} \neq 0$ $\therefore$ $\tilde{Q}_G \neq \tilde{Q}_{G'}$ $\therefore$ $Q_G \neq Q_{G'}$ ⅃

次に Hoste polynomial の z に関する次数 $\deg_z Q_L$ について考察してみます。これに関しては Hoste による次の定理があります

[Hoste] L を k 個の成分をもつ link とするなら Q_L は $Q_L = z^{1-k}Q_{L'}$ とかける。ここで $Q_{L'}$ は z に関し非負の偶数次多項式で $Q_{L'}(x,y,0) \neq 0$ ⅃

link L の diagram P の resolution R を作りその outermost diagram を左から順に $P_1, P_2, \cdots, P_m$ とする。従って P_1 は initial changing branch の outermost vertex に対応する diagram, P_m は initial smoothing branch の outermost vertex に対応する diagram である。すると

$$Q_L=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{y}{x}\right)^{r_i}\left(-\frac{x}{y}\right)^{l_i}\left(-\frac{z}{x}\right)^{s_i}\left(-\frac{z}{y}\right)^{t_i}\left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k_i-1}$$

ここで r_i, l_i, s_i, t_i は各々 P から P_i に到達する迄に positive crossing change, negative crossing change, positive smoothing, negative smoothing を行なった回数. また k_i は trivial link P_i の成分の数 即ち $Q_{P_i}=\left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k_i-1}$

定理1. L をそのグラフ G が $G=G_{a+}$ (又は G_{a-}) となっているような non-splittable link とする。更に

(1) G の resolution R が operation [0] ～ [III] のみで作られるか 又は

(2) resolution を作る時の crossing change 及び smoothing が常に $a+$ (又は $G=G_{a-}$ のときは $a-$) という code の所で行なわれる

$\Longrightarrow$ $\deg_z Q_L = p-1$ ここで $p=\#V(G)$

(operation [0], [I], [II], [III] に関しては文献 [K.3] を参照).

証明 先ず $G=G_{a+}$ のとき initial smoothing side の辺の数は $p-1$ だから $Q_L=\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{y}{x}\right)^{r_i}\left(-\frac{x}{y}\right)^{l_i}\left(-\frac{z}{x}\right)^{s_i}\left(-\frac{z}{y}\right)^{t_i}\left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k_i-1}$ に含まれる P_m から導かれる項は $\left(-\frac{z}{x}\right)^{p-1}$ である事がわかる ($\because$ (1) 又は (2) の条件と $G=G_{a+}$ より). また P から P_i に到達する迄の smoothing side の本数も $p-1$ 以下であることがわかる. 従って $\deg_z Q_L \leqq p-1$ そこで Q_L に含まれる他の項

の z^{p-1} の係数の和が $\left(-\frac{1}{x}\right)^p$ にならない事を示せばよい。

P_i から導かれる $Q_L(x,y,z)$ の各項は(1),(2)を考慮すると

$\left(-\frac{y}{x}\right)^{r_i}\left(-\frac{z}{x}\right)^{s_i}\left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k_i-1}$ だから 他の項の z^{p-1}

の係数は $\displaystyle\sum_{\substack{s_i-(k_i-1)=p-1\\ i\neq m}} (-1)^{r_i+s_i+(k_i-1)}\, x^{-(r_i+s_i)}\, y^{r_i}(x+y)^{k_i-1}$

ただし $P_i \neq P_m$ だから $r_i \geqq 1$

ここで $x=1$ とおくと

$$\text{上式}=\sum_{\substack{s_i-(k_i-1)=p-1\\ i\neq m}} (-1)^{r_i+s_i+(k_i-1)}\, y^{r_i}(y+1)^{k_i-1} \quad (*)$$

$r_i \geqq 1$, $k_i-1 \geqq 0$ だからこの和が $(-1)^p$ になることはない

$\therefore\ \deg_z Q_L = p-1$ □

operation [I],[II],[III] がGで行なえると，その双対グラフ ${}^{\perp}G$ でも[I],[II],[III]が行なえることと，Gのcode $a_\pm$ は ${}^{\perp}G$ の $b_\pm$ に対応するので上の定理は次の形でもかける。

系. Lをそのグラフ G が $G=G_{b+}$ (又は G_{b-}) となっているような non-splittable link とする。更に

(1) Gの resolution $\mathcal{R}$ が operation [0]〜[III] のみで作られるか，または

(2) resolution を作る時の crossing change 及び smoothing が常に b_+ (又は $G=G_{b-}$ のときは b_-) という code の所で行なわれる

$\Rightarrow\ \deg_z Q_L = r-1$ ただし $r=\#R(G)\equiv\#\{S^2-G$ の成分$\}$

証明) ${}^{\perp}L = \#({}^{\perp}G)$ であり $G = G_{b+} \Rightarrow {}^{\perp}G = G_{a+}$ だから ${}^{\perp}G$ に対し定理の証明の議論を行なえばよい。 $\lrcorner$

定理2. L をそのグラフ G が $G = G_{a+} \cup G_{a-}$ となっているような non-splittable link とする。更に

(1) G の resolution $\mathcal{R}$ が operation [I], [II], [III] のみで作られるか 又は

(2) resolution を作る時の crossing change 及び smoothing が常に a_+ 又は a_- という code の所で行なわれる

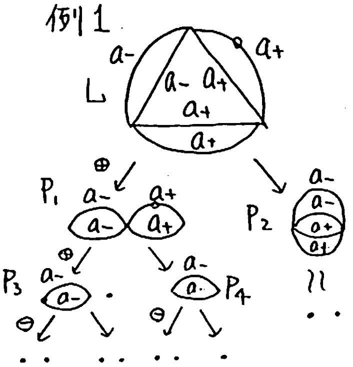
$\Rightarrow \deg_z Q_L \leqq p-1$ ただし $p = \#V(G)$.

証明. 定理1の証明と同じ方針で行なう. ただし今度は定理1の証明中の式(*)が

$$\sum_{\substack{s_i+t_i-(k_i-1)=p-1\\ i\neq m}} (-1)^{r_i+l_i+s_i+t_i-(k_i-1)}\, y^{r_i+l_i-t_i}(y+1)^{k_i-1}$$ となり

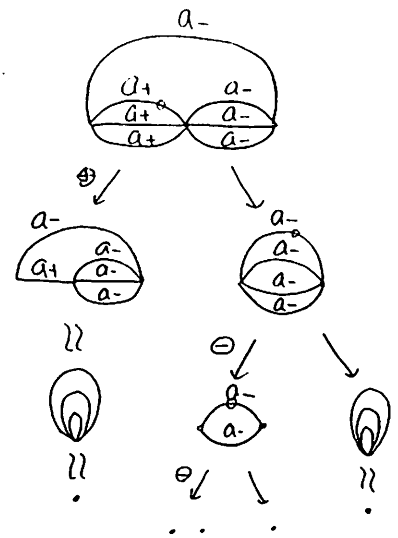
$r_i+l_i-t_i=0$, $k_i-1=0$ の時に, 特に上式が $(-1)^p$ となる可能性があり. この時は $\deg_z Q_L < p-1$ となる。 $\lrcorner$

例1



$$Q_L = \left(-\frac{y}{x}\right)^2\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right)^2$$
$$+\left(-\frac{y}{x}\right)^2\left(-\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right)$$
$$+\left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right)$$
$$+\left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{z}{y}\right)+\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right)$$
$$\therefore\ \deg_z Q_L = 2$$

例2



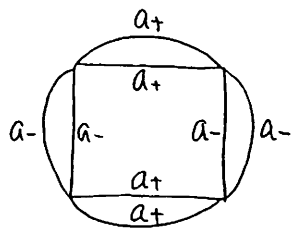
$$Q_L = \left(-\frac{y}{x}\right) + \left(-\frac{x}{y}\right)^2\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x+y}{z}\right) + \left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{z}{y}\right) + \left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{z}{y}\right)$$

$\therefore\ \deg_z Q_L = 2$

しかし

$\deg_z Q_L(1, 1, z) = 0$

例3



これの Q_L を計算すると $\deg_z Q_L = 3$ となり $Q_L(1, -1, z) = 0$ ただし一般に $Q_L(1, -1, z)$ は z に関する多項式であってLaurent 多項式でない事に注意.

次に pretzel link の $\deg_z Q_L$ について考察してみます。[K.3] により pretzel link L のグラフ G は，その基本グラフ F_G が 2-regular となるようなグラフである。そこで [K.3] で使った G の parametrization を少し修正して次のようにします. 先ず $V(G) = \{v_0, v_1, \cdots, v_{p-1}\}$ とおく F_G が 2-regular だから G の辺は v_i と v_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \cdots, \bmod p)$ のみを結ぶとしてよい。v_i と v_{i+1} とを結ぶ辺の数を g_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, \bmod p)$ とする. このとき link のグラフの性質([K.2], [K.3]) より,

v_iとv_{i+1}を結ぶ辺は全てa-codeのみかまたはb-codeのみとしてよい。更にoperation[II]([K.3])を考慮に入れるとv_iとv_{i+1}を結ぶ辺はa_+, a_-, b_+又はb_-のいずれか1種類としてよい。そこで$g_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$とし，$x_i$を$a_+^{g_i}, a_-^{g_i}, b_+^{g_i}, b_-^{g_i}$のいずれかとして$G = G(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$とparametrizeされる。これを$G\{x_i\}$と略記する。また例えば$G\{a_+^{g_i}\}$とかいたら$G(a_+^{g_0}, a_+^{g_1}, \cdots, a_+^{g_{p-1}})$の意味(即ち全てのcodeが$a_+$)とする。Gがlinkのグラフであることから([K.2], [K.3])によってGのparameter $\{x_i\}$に対し次の事が言える

(1) $x_i = a_\pm^{g_i}$, $x_{i+1} = a_\pm^{g_{i+1}}$（複号は任意）のときは

$g_i + g_{i+1} =$ 偶数

$x_i = a_\pm^{g_i}$, $x_{i+1} = b_\pm^{g_{i+1}}$ 又は $x_i = b_\pm^{g_i}$, $x_{i+1} = a_\pm^{g_{i+1}}$（複号は任意）のときは$x$の巾乗が偶数

(2) $G\{x_i\}$の中に出て来るb-codeは偶数回

注．通常のpretzel linkのparameter $P(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_{p-1})$は$\tilde{g}_i \in \mathbb{Z}$であって$\tilde{g}_i > 0$のときここのparameterの$a_+^{|\tilde{g}_i|}$又は$b_+^{|\tilde{g}_i|}$に対応，$\tilde{g}_i < 0$のとき，ここのparameterの$a_-^{|\tilde{g}_i|}$又は$b_-^{|\tilde{g}_i|}$に対応している。

定理3 (a) pretzel link $P\{g_i\}$のグラフが$G\{a_+^{g_i}\}$又は$G\{a_-^{|g_i|}\}$ $(i = 0, 1, \cdots, p-1)$のとき　$\deg_z Q_P = p-1$

(b) $P\{g_i\}$のグラフが$G\{a_+^{g_i}, a_-^{|g_i|}\}$ $(i = 0, 1, \cdots, p-1)$（即ち

a_+ と a_- code が混在している) のとき $\deg_z Q_{P\{q_i\}} \leqq p-1$

(c) $P\{q_i\}$ のグラフが $G(b_+^{q_0}, b_+^{q_1}, \cdots, b_+^{q_{2m-1}})$ 又は $G(b_-^{|q_0|}, b_-^{|q_1|}, \cdots, b_-^{q_{2m-1}})$ のとき $\deg_z Q_{P\{q_i\}} = \sum_{i=0}^{2m-1} q_i - 2m + 1$

(d) $P\{q_i\}$ のグラフが $G\{b_+^{q_i}, b_-^{|q_i|}\}$ $(i=0,1,\cdots,2m-1)$ のとき

(即ち b_+ と b_- code が混在しているとき)

$$\deg_z Q_{P\{q_i\}} \leqq \sum_{i=1}^{2m-1} q_i - 2m + 1.$$

(e) $P\{q_i\}$ のグラフが $G\{a_+^{q_i}, b_+^{q_i}\}$ $(i=0,1,2,\cdots,p-1)$ のとき (即ち a_+, b_+ codes が混在しているとき) または $G\{a_-^{|q_i|}, b_-^{|q_i|}\}$ のとき, $\{q_0, q_1, \cdots, q_{p-1}\}$ のうち $\{q_{i_1}, q_{i_2}, \cdots, q_{i_s}\}$ が a_+-code に対応し, $\{q_{j_1}, q_{j_2}, \cdots, q_{j_t}\}$ が b_+-code に対応していると

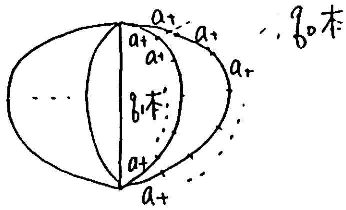
$$\deg_z Q_{P\{q_i\}} = s - t + \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} + 1 \quad ただし \quad s+t=p,\ t \neq 0$$

(f) $P\{q_i\}$ のグラフ $G(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$ が全ての code を含み $\{q_0, q_1, \cdots, q_{p-1}\}$ のうち $\{q_{i_1}, q_{i_2}, \cdots, q_{i_s}\}$ が a-code に対応し, $\{q_{j_1}, q_{j_2}, \cdots, q_{j_t}\}$ が b-code に対応しているとすると

$$\deg_z Q_{P\{q_i\}} \leqq s - t + \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} + 1 \quad ただし \quad s+t=p,\ t \neq 0$$

証明 基本グラフ F_G が 2-regular graph となるようなグラフ G は operation [I], [II], [III] のみで resolution が作れるので ([K.3]) (a)は定理1より (b)は定理2より 明らか

(c)の $G(b_+^{q_0}, b_+^{q_1}, \cdots, b_+^{q_{2m-1}})$ のとき, G の双対グラフ ${}^{\perp}G$ は次の図のようになる。 $\#V({}^{\perp}G) = \sum_{i=0}^{2m-1}(q_i - 1) + 2 = \sum_{i=0}^{2m-1} q_i - 2m + 2$



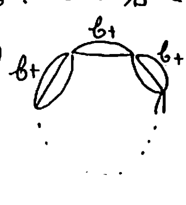
であり，このグラフ $\tilde{G}$ は定理1の条件をみたすから

$$\deg_z Q_L = \sum_{i=0}^{2m-1} q_i - 2m + 1$$

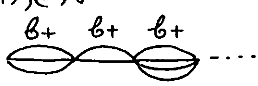
(d)は(c)と同様にし，定理2から結果が出る。

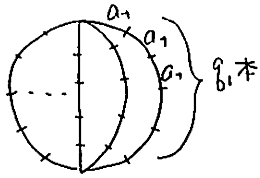
(e) 先ず a_+-code をもつ multi-edges の所に操作[III](2)を次々と行なうと，出来るグラフは次の3種類の組合せの可能性がある．(ｲ) a_+-code の部分が contract している（smoothing を行なった時に出来る）(ﾛ) a_+-code の部分がなくなっている（a_+-code が偶数本の multi-edges の所を crossing changes を行なって出来る）(ﾊ) a_+-code の辺が唯一本残っている（a_+-code が奇数本の multi-edges の所を crossing changes を行なって出来る．所が(ﾊ)が起ったらグラフが link のグラフになっている事と操作[III](1)を使うと矛盾が示せる。結局 $G_{b_+} \neq \phi$ の時は a_+-code の奇数本から成る multi-edge はない事がわかる。また(ﾛ)が起ってグラフが連結でなくなると Q_L の次数が下がる。従って $\deg_z Q_L$ を与えるのは次のグラフという事になる．この各々の双対グラフを考えると次頁の図になる。

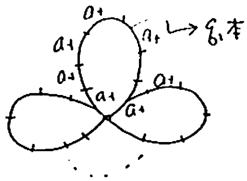
(ｲ)より



(ｲ),(ﾛ)より







左図のグラフの頂点の個数 $= \sum_{k=1}^{t}(q_{j_k}-1)+2$

$= \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} - t + 2$

右図のグラフの頂点の個数 $= \sum_{k=1}^{t}(q_{j_k}-1)+1 = \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} - t + 1$

従って $\deg_z Q_L$ に関係するのは左図の場合である。最初に与えられたグラフから a_+-code を消すのに必要な smoothing の回数は $t \neq 0$ のとき s 回であり双対グラフになってからは $\left(\sum_{k=1}^{t} q_{j_k} - t + 1\right)$ 回　以上より $\deg_z Q_L \leqq s - t + \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} + 1$

更に等号が成立するのは定理1の証明と同じ

(f)は上の(e)の証明と定理2から証明される □

系　positive type (i.e. $G = G_{a+} \cup G_{b+}$) または negative type (i.e. $G = G_{a-} \cup G_{b-}$) の non-trivial pretzel link L で

$Q_L = \left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k-1}$ となるものはない。 ($k \in \mathbb{N}$)

注　L が k-成分の trivial link の時 $Q_L = \left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k-1}$

証明　定理3(a),(e)より

$$\deg_z Q_{P\{q_i\}} = \begin{cases} s - t + \sum_{k=1}^{t} q_{j_k} + 1 & t \neq 0 \\ s - 1 & t = 0 \end{cases}$$

従って $\deg_z Q_{P\{q_i\}} \geqq 0$ であって特に $\deg_z Q_{P\{q_i\}} = 0$ になるのは $t=0, s=1$ の時であるが，このときは G の基本グラフ F_G は 2-regular ではなく1つの辺から成るグラフ　従って

pretzel link のグラフになるのは $t=0$ のときは $s \geqq 2$ 故に
いずれにしても $\deg_z Q_{P\{q_i\}} \geqq 1$ 一方 $\deg_z \left(-\frac{x+y}{z}\right)^{k-1} \leqq 0$ ∎

References

[H] Hoste, J., A polynomial invariant of knots and links, preprint

[J] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neuman algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 103–111

[K.1] Kobayashi, K., Link の Hoste 多項式, 数理解析研講究録 561「計算機を利用した低次元トポロジーの研究」

[K.2] Kobayashi, K. グラフと絡み目に関する多項式, 数理解析研講究録「グラフ理論とその応用」

[K.3] Kobayashi, K., 結び目理論に現われるグラフについて 数理解析研講究録「グラフ理論と3次元多様体」

[L-M] Lickorish, W. B. R and Millett, K. C., Topological invariants of knots and links, preprint

[M] Murasugi, K., Jones polynomials of Alternating Links, preprint

[O] Ocneanu, A., A polynomial invariants for knots: A combinatorial and an algebraic approach, preprint.

[F-Y-H-L-M-O] Freyd, P; Yetter, D; Hoste, J; Lickorish, W. B. R.;

Millet, K and Ocneanu, A, A new polynomial invariant of Knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12(2)(1985) 239–246