HAKONE SEMINAR 19 (2003) 27-43.

Engulfing lemma on supports of link diagrams on surfaces

筑波大学数学系　金戸武司（kaneto@math.tsukuba.ac.jp）

1．定義と結果

本稿の目的は [Kane 1,2] で略された Engulfing lemma の証明の詳述である。

以下、Σ を connected orientable surface without boundary とし、$\Sigma\times\mathbf{R}$ 内の links を（up to ambient isotopy で考えるので）projection $p:\Sigma\times\mathbf{R}\to\Sigma$ ($=\Sigma\times 0$ と看做す）に関する(Σ 上の）link diagrams として考察する。

定義1． connected orientable compact surface S （$\partial S\neq\emptyset$ も可）に対し、S に、∂S の各（連結）成分に沿って、topological disk を張り合わせて得られる connected orientable closed surface $\hat{S}$ の種数 $g(\hat{S})$ を S *の種数*といい、$g(S)\,(:=g(\hat{S}))$ と表す。

定義2． ([N.Kamada]) connected link diagram D on Σ について、

1）各交点での上下関係を忘れて Σ 内のgraph と看做したときの D の regular neighborhood in Σ を *support of* D といい、$N(D)$ と表す、

2）$g_D:=g(N(D))\,(=g(\hat{N}(D)))$ を*supporting genus of* D という、

3）topological disk components of $\Sigma-\operatorname{int}N(D)$ を $B_i^2\ (i=1,2,\cdots,k)$ とするとき、$N(D)\cup(\bigcup_{i=1}^{k}B_i^2)$ $(\subset\Sigma)$ を *extended support of* D といい、$\tilde{N}(D)$ と表す。

参考1． $(g_D=)g(N(D))=g(\hat{N}(D)=g(\tilde{N}(D))$ である。

定理（Engulfing lemma） link diagrams D,D' on Σ について、D が connected, alternating で、かつ、D,D' が表す $\Sigma\times\mathbf{R}$ 内の links $L_D,L_{D'}$ が ambient isotopic in $\Sigma\times\mathbf{R}$ ならば Σ 上の isotopy $h_t:\Sigma\to\Sigma$ で $h_0=1_\Sigma$ かつ $h_1(\tilde{N}(D'))\supset\tilde{N}(D)$ であるものが存在する。

系 D,D' を定理におけるものとする。(後述補題6より D' は常に connected 。)

（1）$g_D\le g_{D'}$、特に、D' も alternating ならば $g_D=g_{D'}$、

（2）D が locally reduced ならば（D の交点数）≤（D' の交点数）

参考2． 1）supporting genus of D の定義を、D が connected でない場合を含めて D の連結成分を D_i $(i=1,\cdots,k)$ とするとき $g_D:=\sum_{i=1}^{k}g_{D_i}$ と定めると g_D は link 不変量ではないが、link $L\,(\subset\Sigma\times\mathbf{R})$ に対し

$$g_L:=\min\{g_D\,|\,D \text{ は } L \text{ と同値な link を表す link diagram on } \Sigma\}$$

を *supporting genus of* L と定めると g_L は link 不変量である。よって、系（1）は D の表す link L_D の supporting genus g_{L_D} は g_D であることを意味する。従って alternating link の supprting genus を計算する簡単で実用的なアルゴリズムが存在する。2）系（2）について、「connected link diagram on Σ が locally reduced」の定義及び（2）の証明に関しては [Kane 1, 2, 3] 参照。

2．定理の証明

［1］ 準備

以下では主として link diagram D (on $\Sigma=\Sigma\times 0$) の表す link L_D (in $\Sigma\times\mathbf{R}$) と $\Sigma\times\mathbf{R}$ 内の surface について議論するので、まず L_D を次の定義のように標準化し、以後 L_D をこの意味で用いる。

定義3． （1）link diagram D on Σ with ν_D crossings に対し、各 crossing $x_i\,(i=1,\cdots,\nu_D)$ における (sufficientlly) short overpass を (sufficientlly) small bridge β_i $(i=1,\cdots,\nu_D)$ として $\Sigma\times[0,\varepsilon]$ (ε は1に対し sufficientlly small positive number) 内に $p\,|\,\beta_i$ が単射となるように実現し、他の部分はすべて $\Sigma=\Sigma\times 0$ 上にある ν_D-bridge link を D の表す link の標準的な実現といい、L_D と表す。

（2）L_D の各 small bridge β_i $(i=1,\cdots,\nu_D)$ とその射影像 $p(\beta_i)(\subset\Sigma=\Sigma\times 0)$ について、loop $\beta_i\cup p(\beta_i)$ は $p^{-1}(p(\beta_i))=p(\beta_i)\times\mathbf{R}$ 内で disk d_i を bound する。d_i を **bridge disk** と呼ぶ。$p(\beta_i)-L_D$ の components は2本の (half-open) arcs でそれらを $\beta_i^{\prime},\beta_i^{\prime\prime}$ とする。$\Sigma\times\mathbf{R}$ 内の surface S が次の条件 i)、ii) を満たすとき S は L_D に対して ***normal*** であるという：

i) $L_D\cap S=\varnothing$、

ii) 各 disk d_i $(i=1,\cdots,\nu_D)$ と S の交わりは transversal で $d_i\cap\partial S=\varnothing$ かつ $d_i\cap S$ $(i=1,\cdots,\nu_D)$ の任意の component は $\beta_i^{\prime}$ 上の1点と $\beta_i^{\prime\prime}$ 上の1点を結ぶ arc である。（cf. Figure 1）

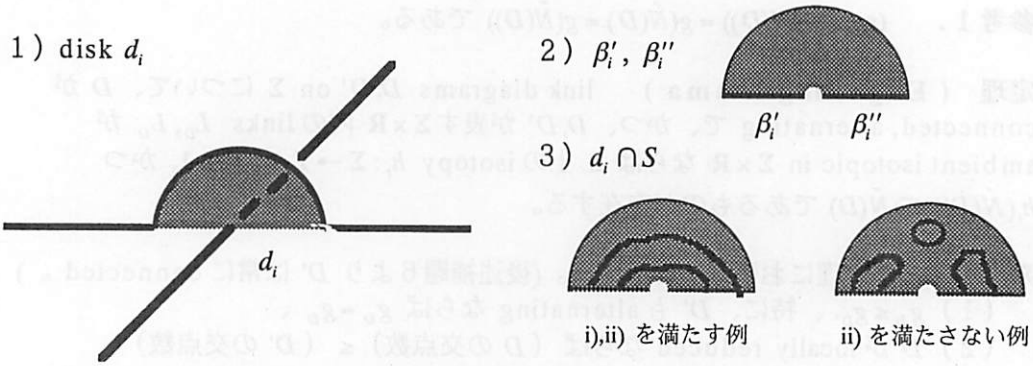

Figure 1

補題1． $\Sigma\times\mathbf{R}$ 内の compact surface S は次の3つの条件を満たすとする；1）$\Sigma\times 0$ と transversal で $\partial S\cap\Sigma\times 0=\varnothing$、2）$L_D$ に対して normal、3）S 上の loop は $\Sigma\times\mathbf{R}$ で contractible ならば S で contractible である。

loop ℓ $(\subset S\cap\Sigma\times 0)$ は $\Sigma\times 0$ において innermost、即ち、$\Sigma\times 0$ 内の 2-ball $B^2(\subset\Sigma\times 0)$ で $\partial B^2=\ell$ かつ $\mathrm{int}\,B^2\cap S=\varnothing$ を満たすものが存在するとする。このとき次が成り立つ。

（1）$\mathrm{int}\,B^2$ 内にある link diagram D on $\Sigma(=\Sigma\times 0)$ の crossing x_i に対する bridge disk d_i （cf. 定義3(2)）は S と交わらない。

（2）link diagram D on $\Sigma(=\Sigma\times 0)$ が connected, alternating であるとき、2-

ball B^2 と $D(=p(L_D)\subset\Sigma\times 0$ と看做す）について

$B^2\cap L_D\neq\emptyset$ （$\Leftrightarrow \mathrm{int}\,B^2\cap L_D\neq\emptyset$ 、即ち、$\mathrm{int}\,B^2$ が D の underpass を含む）ならば $D\subset\mathrm{int}\,B^2$ である。

証明 （1）$d_i\cap S\neq\emptyset$ とすると S は L_D に対して normal （=仮定 2））で ℓ は innermost だから $p(\beta_i)-S$ の $x_i(=p(\mathrm{int}\,\beta_i)\cap L_D)$ を含む component α の両端点は ℓ 上の2点 $a(\in\beta_i')$, $b(\in\beta_i'')$ であり、さらに a,b を両端点とする $d_i\cap S$ の compotent $\hat{\alpha}$ が存在する。loop $\alpha\cup\hat{\alpha}$ は d_i 内で 2-ball B_1^2 を bound する。α は B^2 を 2ball に分割するがその1つを B_2^2 とする。$B_1^2\cup B_2^2$ は 2ball だから loop $\ell'=\partial(B_1^2\cup B_2^2)(\subset S)$ は $\Sigma\times\mathbf{R}$ で contractible 、よって、条件3）より S で contractible 、従って S 上の loop ℓ' は S 内の 2-ball B_3^2 を bound する。$B_2^2(\subset B^2\subset\Sigma\times 0)$ を ∂B_2^2 を止めた isotopy on $\Sigma\times\mathbf{R}$ で $\mathrm{int}\,B_2^2$ 部分のみを少し押し下げて得られる 2-ball を $B_{2'}^2$ とすると、2-sphere $B_1^2\cup B_{2'}^2\cup B_3^2$ は L_D と 1点 $x_i(=p(\mathrm{int}\,\beta_i)\cap L_D)$ のみで交わる。$\Sigma\times\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^3$ に埋め込めるからこれは起こり得ない。故に $d_i\cap S=\emptyset$ である。

（2）仮定より $\mathrm{int}\,B^2\cap L_D\neq\emptyset$ だから L_D の成分 K_D （=knot）で $\mathrm{int}\,B^2\cap K_D\neq\emptyset$ を満たすものが存在する。

CASE I　$\mathrm{int}\,B^2$ 内に D の crossing が存在しないとき、$\ell\cap p(K_D)\neq\emptyset$ とすると $\mathrm{int}\,B^2\cap K_D$ の component γ の $p(K_D)(\subset D)$ 内の延長弧上に γ に隣接して隣り合う crossings で共に overpass となる部分が存在する（$\because\ \ell\cap K_D\ (\subset\ell\cap L_D)=\emptyset$）ことになり D の alternating 性に反する。よって、$\ell\cap p(K_D)=\emptyset$ 、従って、K_D は $\mathrm{int}\,B^2$ 内の simple loop であり、D は connected だから、$D=p(K_D)=K_D\subset\mathrm{int}\,B^2$ を得る。

CASE II　$\mathrm{int}\,B^2$ 内に D の crossing が存在するとき、それらの crossings を順に（link diagram の）connected 性を保つように A-splice 又は A^{-1}-splice によって解消すれば $\mathrm{int}\,B^2$ 内に crossing を持たない connected, alternating link diagram D' on $\Sigma(=\Sigma\times 0)$が得られる。（1）より $S\cap L_{D'}=\emptyset$ だから S は $L_{D'}$ に対しても補題1の条件を満たす。従って、CASE I より $D'\subset\mathrm{int}\,B^2$ である。crossings の解消は $\mathrm{int}\,B^2$ 内で行われるから、$D'\subset\mathrm{int}\,B^2\Leftrightarrow D\subset\mathrm{int}\,B^2$ であることに留意すれば $D\subset\mathrm{int}\,B^2$ を得る。

定義4． link L in $\Sigma\times\mathbf{R}$ が S^2*-splittable*

$\underset{\mathrm{def.}}{\Leftrightarrow}$ 2-sphere ${}^3S\subset\Sigma\times\mathbf{R}$ s.t. S separates L into two non-empty sublinks L_1 and L_2 ,

i.e, 3-ball ${}^3B^3$ in $\Sigma\times\mathbf{R}$ s.t. $\partial B^3=S$, $L_1\subset Int\,B^3$ and $L_2\subset\Sigma\times\mathbf{R}-B^3$

（脚注1参照[1]）。このとき、この S を L の*splitting sphere* という。

補題2． connected alternating link diagram D on Σ の表す link L_D (in $\Sigma\times\mathbf{R}$) は S^2-splittable ではない。

参考． classical case (i.e., $\Sigma=\mathbf{R}^2$ のとき non-splittable) を含む。

---

[1] $\Sigma\times\mathbf{R}-S$ の2つの連結成分のそれぞれに L_1, L_2 がそれぞれ含まれるの意。$\Sigma\neq S^2$ のときは『i.e., 以下』と同値（$\because$ Scheonflies theorem）。$\Sigma=S^2$ のときは必要なら S を取り直せば『i.e., 以下』も満たすように出来る。

<u>補題2の証明</u>　$\Sigma = S^2$ のとき $D(\subset S^2 = S^2 \times 0)$ と $L_D\ (\subset S^2 \times \mathbf{R})$ に対し、埋め込み $f: S^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ で $f(D)(\subset \mathbf{R}^2 \times 0)$ が connected alternating link diagram on $\mathbf{R}^2 (= \mathbf{R}^2 \times 0)$ かつ $f(L_D) = L_{f(D)}$ を満たすものが存在する[2]。よって、$\Sigma = S^2$ の場合は $\Sigma = \mathbf{R}^2$ の場合に帰着されるから $\Sigma \neq S^2$ の場合について示せばよい。以下、$\Sigma \neq S^2$ とする。link L_D のsplitting sphere S が存在すると仮定する。（必要なら ambient isotopic な変形により）S は補題1の条件を満たすとして良い。このとき、$S \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)$ （ν_D は D の交点数、d_i は交点 x_i に対応する disk , cf.定義3(2)) は互いに交わらない有限個の arcs 、$S \cap \Sigma \times 0$ は互いに交わらない有限個の loops である。S の *complexity* $c(S)$ を $c(S) = (m,n) := \left(\left|S \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)\right|, |S \cap (\Sigma \times 0)|\right)$ （$|X|$: X の連結成分数）と定め、$c(S)$ に辞書式順序[3]を与える。L_D のspitting sphere で補題1の条件を満たすもの全体の集合を $\mathbf{S}$ とする。L_D のspitting sphere が存在すれば $\mathbf{S} \neq \emptyset$ で $\mathbf{S}$ は最小 complexity をもつものを含む。しかし、$\mathbf{S} \neq \emptyset$ とするとこれと矛盾することを以下で示す。

STEP I　$^\forall S \in \mathbf{S}$ に対し、$S \cap (\Sigma \times 0) \neq \emptyset$ である。

∵）splitting sphere の定義より S は L_D を2つの空でない sublinks L_1, L_2 に分離する。L_D の定義より $L_i \cap \Sigma \times 0 \neq \emptyset$ $(i = 1,2)$ だから $S \cap \Sigma \times 0 \neq \emptyset$ である。

STEP II　$^\forall S \in \mathbf{S}$ に対し、$^\exists S' \in \mathbf{S}$ s.t. $c(S') < c(S)$ である。

∵）STEP I より $S \cap \Sigma \times 0 \neq \emptyset$ である。S は単連結だから $S \cap \Sigma \times 0$ の各 loop は contratible (in $\Sigma \times \mathbf{R}$、従って、) in $\Sigma \times 0$ 、よって、$\Sigma \times 0$ 内の (補題1における) innermost loop ℓ $(\subset S \cap \Sigma \times 0)$ と ℓ が bound する 2-ball $B^2 (\subset \Sigma \times 0)$ s.t. $\mathrm{int} B^2 \cap S = \emptyset$ が存在する。十分小さな正数 δ に対し、（$S \cap (\Sigma \times (-\delta))$ は S 内で $S \cap (\Sigma \times 0)$ と parallel なlink と看做せ、特に、）ℓ と parallel な $S \cap (\Sigma \times (-\delta))$ の loop を ℓ' とすると ℓ' は disk $d\ (\subset \Sigma \times (-\delta))$ s.t. $S \cap d = \partial d = \ell'$ を bound する。$\Sigma \times (-\delta) \supset d$ より $d \cap L_D = \emptyset$ である。ℓ' は S^2 を2つの disks に分け、ℓ を含む disk を d_+ 、ℓ を含まない disk を d_- とすると、L_D と交わらない2つの 2-spheres $S_+ := d_+ \cup d$, $S_- := d_- \cup d$ in $\Sigma \times \mathbf{R}$ を得る。S_+ , S_- が $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内で bound する 3-balls [4]をそれぞれ B^3_+, B^3_- とする。STEP II を以下の3つの場合に分けて示す。

CASE 1 . $B^3_+ \cap L_D = \emptyset$ の場合。B^3_+ を用いて、L_D を止めた ambient isotopy で S を S_- （実際、d_+ を d ）に変形出来るから S_- は L_D の splitting sphere で補題1の条件を満たし、$c(S) = (m,n) > (m,n-1) \geq c(S_-)$ （∵ $|S_- \cap \Sigma \times 0| \leq n-1$ ）であるから、$S' = S_-$ とすればよい。

CASE 2 . $B^3_- \cap L_D = \emptyset$ の場合。CASE 1 と同様に、L_D を止めた ambient isotopy で S を L_D の splitting sphere S_+ （実際、d_- を d ）に変形出来る。

---

[2] 2-ball $^\exists B \subset S^2$ s.t. $D \subset B$ 、更に、homeomorphism $^\exists f': B \times \mathbf{R} \to B^2_0 \times (-1,1) (\subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R})$ (B^2_0: unit 2-ball in $\mathbf{R}^2$) s.t. $f(B \times 0) = B^2_0 \times 0$ and $f(x \times \mathbf{R}) = y \times (-1,1)$ for $^\forall x \in B$ where $f(x \times 0) = y \times 0$ だから f' の拡張として埋め込み f を得る。

[3] $(m,n) < (m',n')$ を 1) $m < m'$ または 2) $m = m'$ かつ $n < n'$ を満たすと定める。

[4] 存在は $\Sigma \neq S^2$ から。（参考：$\Sigma \neq S^2$ を用いるのはここのみである。）

副補題１． $B^2 \cap L_D = \varnothing$ 。

（<u>副補題１の証明</u>　$B^2 \cap L_D \neq \varnothing$ とすると、補題１(２)より $D \subset \mathrm{int}\, B^2$ である。補題１(1)より $L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)(= D \cup (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i))$ は S と交わらず、また、connected （$\because D$ は connected だから）である。よって、$L_D\ (\subset L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i))$ は $\Sigma \times \mathbf{R} - S$ の１つの connected component に含まれ、S が L_D の splitting sphere であることに反する。故に $B^2 \cap L_D = \varnothing$ 。）

この副補題より d を少し push up する L_D を止めた ambient isotopy で S_+ を変形して $\Sigma = \Sigma \times 0$ と交わりから ℓ のみを消去した L_D の新たな splitting sphere S' を得る。この変形は L_D に対して normal であることを必ずしも保存しないので２つの場合に分けて考察する。

１）S' が L_D に対して normal である場合。$c(S) \geq c(S_+) > c(S')$ である。

２）S' が L_D に対して normal でない（即ち、$S' \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)$ の arc components で L_D に対する nomality を損ねているものが存在する、cf. 下例）場合。L_D を止めた ambient isotopy による S' の変形により、$S' \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)$ の arc components で L_D に対する nomality を損ねているものをすべて除去して得られた L_D の splitting sphere を S'' とすると $\left|S \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right| \geq \left|S_+ \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right| > \left|S'' \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right|$ であるから、（$|S \cap \Sigma \times 0| < |S'' \cap \Sigma \times 0|$ となる場合も生じ得るが辞書式順序の定義から）$c(S) \geq c(S_+) > c(S'')$ である。よって、この S'' を改めて S' とみなせばよい。

例

$d_i \cap S_+$　　$d_i \cap S'$　　$d_i \cap S''$

CASE３．$B_+^3 \cap L_D \neq \varnothing$ かつ $B_-^3 \cap L_D \neq \varnothing$ の場合。$B_+^3 \cap L_D \neq \varnothing$ かつ $B_-^3 \cap L_D \neq \varnothing$ だから、S_+^2 , S_-^2 の少なくとも、一方は L_D の splitting sphere である。$S_+ = d_+ \cup d$, $S_- = d_- \cup d$ は共に $\Sigma = \Sigma \times 0$ と交わり、disk $d\ (\subset \Sigma \times (-\delta))$ は $\Sigma = \Sigma \times 0$ との交わらないから、disks d_+ 、d_- は共に $\Sigma = \Sigma \times 0$ との交わり、$|S \cap (\Sigma \times 0)| > |S_+ \cap (\Sigma \times 0)|, |S_- \cap (\Sigma \times 0)|$ である。また、S_+, S_- は共に L_D に対して normal で $\left|S \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right| \geq \left|S_+ \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right|, \left|S_- \cap (\bigcup_{i=1}^{v_D} d_i)\right|$ である。従って、$c(S) > c(S_+), c(S_-)$ 、よって、$S' = S_+$ または $S' = S_-$ ととればよい。以上により STEP II が示された。

STEP II より S は最小 complexity をもつものを含まないから $\mathbf{S} = \varnothing$ である。よって、補題２が示された。

[2] 定理の証明

$\Sigma = \mathbf{R}^2$ のとき $\tilde{N}(D)$ は2-ball（$\because$ D は connected）だから定理の成立は明らか。また $\Sigma = S^2$ のときも $\tilde{N}(D) = \Sigma = \tilde{N}(D')$（$\because$ D は connected alternating、よって補題2より D' も connected）だから成立する。また $\tilde{N}(D)$ が2-ball のとき及び $\partial\tilde{N}(D') = \varnothing$（$\Leftrightarrow \tilde{N}(D') = \Sigma$）のときも明らかである。よって、以下、次の条件i)、ii)、iii)（これらをまとめて (*) と表す）を満たす場合について考察する。

i) Σ は非単連結、

ii) $\tilde{N}(D)$ は 2-ball でなく、従って $\tilde{N}(D')$ も 2-ball でない[5]、

iii) $\partial\tilde{N}(D') \neq \varnothing$、従って i), ii) のとき $\partial\tilde{N}(D')$ の各成分は $\Sigma = \Sigma \times 0$ 内で contractible でない。

D, D' に対する $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内における（$\Sigma = \Sigma \times 0$ 上の bridge links としての）標準的実現 $L_D, L_{D'}$ は $\Sigma \times [0, \varepsilon]$ (ε: 1に対し十分小さな正数) 内にあるものとして扱う。有限回の Reidemeister moves で D' を D に移せるからそれに対応する ambient isotopy $g_t : \Sigma \times \mathbf{R} \to \Sigma \times \mathbf{R}$ s.t. $g_1(L_{D'}) = L_D$ が存在し $\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1)$ ((−1,1): 開区間）を止めているとして良い。$I := [-1,1]$ (閉区間) とすると
$g_1((\partial\tilde{N}(D')) \times I) \cap L_D = \varnothing$（$\because ((\partial\tilde{N}(D')) \times I) \cap L_{D'} = \varnothing$、$g_1(L_{D'}) = L_D$）。
$g_1((\partial\tilde{N}(D')) \times I)$（$= \tilde{S}$ とおく）は (必要なら $L_D \cup (\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1))$ を止めた ambient isotopy による変形を行い)補題1の条件を満たすとして良い。$\tilde{S}$ と $L_D \cup (\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1))$ を止めて ambient isotopic な曲面で補題1の条件を満たすもの全体の集合を $\mathbb{S}$ とする。$^\forall S \in \mathbb{S}$ に対し、S の complexity $c(S)$ を前と同様に $c(S) = (m,n) := \left(\left|S \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)\right|, \left|S \cap (\Sigma \times 0)\right|\right)$ と定め、辞書式順序を与える。$\mathbb{S} \neq \varnothing$ だから $^\exists S_0 \in \mathbb{S}$ s.t. $c(S_0) = \min\{c(S) \mid S \in \mathbb{S}\}$。$\partial\tilde{N}(D')$ の連結成分数を $\left|\partial\tilde{N}(D')\right|$ とする。以下、次の3つの STEP に分けて定理を示す。

STEP I $^\forall S \in \mathbb{S}$ に対し、$c(S) \geq (0, \left|\partial\tilde{N}(D')\right|)$ である。

STEP I の証明. $S \cap (\Sigma \times \{\pm 1\}) = \partial\tilde{N}(D') \times \{\pm 1\}$（複号同順）より $S \cap \Sigma \times 0$ の連結成分は S の各連結成分（= annulus）内に（annulus の core と parallel なも

---

[5] $\tilde{N}(D')$ が 2-ball のとき、$\Sigma \neq S^2$。D' の任意の state S' に対し、D' の各 crossing x で $S'(x)(= A^{\pm})$-splice による交点解消を行って得られた交点無しの link diagram $D'_{S'}$ の各成分は trivial だから、この $D'_{S'}$ から trivial components を除いて得られた link diagram を $\tilde{D}'_{S'}$ とすると $\tilde{D}'_{S'} = \varnothing$。よって link diagram on Σ における braket の state による定義 (cf. [I - K]) より $\langle D' \rangle \in \mathbf{Z}(A, A^{-1})$、仮定より D と D' は Reidemeister moves で移りあえるから $\langle D \rangle$ は $\langle D' \rangle$ の $(-A^3)$ の冪乗倍として表せる。従って $\langle D \rangle \in \mathbf{Z}(A, A^{-1})$、よって D の任意の state S に対し D_S の各成分は trivial、特にすべての crossings で A (resp. A^{-1}) を選ぶ state S_0 (resp. $\hat{S}_0$) に対し、D の alternating 性から、$\partial N(D) = D_{S_0} \cup D_{\hat{S}_0}$ (up to isotopy on Σ) であることと $\Sigma \neq S^2$ に留意すると、$\tilde{N}(D)$ も 2-ball である。

のが）各１本以上（実際は奇数本）ある。S と $\partial\tilde{N}(D')\times I$ は同相より S の連結成分数は $|\partial\tilde{N}(D')|$、よって $|S\cap(\Sigma\times 0)|\geq|\partial\tilde{N}(D')|$ より $c(S)\geq(0,|\partial\tilde{N}(D')|)$ を得る。

STEP II　$c(S_0)=(0,|\partial\tilde{N}(D')|)$ である。

STEP II の証明.

補題３. $S_0\cap\Sigma\times 0$ は contractible loop を含まない。

<u>補題３の証明</u>　もし含むとすれば innermost loop ℓ $(\subset S_0\cap\Sigma\times 0)$ と $\Sigma\times 0$ 内の 2-ball $B^2(\subset\Sigma\times 0)$ で $\partial B^2=\ell$ かつ $\mathrm{int}B^2\cap S=\emptyset$ を満たすものが存在する。（補題２の証明中のSTEP II におけると同様に）十分小さな正数 δ に対し、ℓ と parallel な $S_0\cap(\Sigma\times(-\delta))$ 内の loop ℓ' は disk d $(\subset\Sigma\times(-\delta))$ s.t. $S_0\cap d=\partial d=\ell'$ を bound する。$\Sigma\times(-\delta)\supset d$ より $d\cap L_D=\emptyset$ である。ℓ' も contractible loop だから S_0（の１つの連結成分である annulus ）内の disk d_{S_0} $(\subset S_0)$ を bound する。2-sphere $d\cup d_{S_0}$ は L_D と交わらず、また、$\Sigma\neq S^2$（∵条件 i) Σ は非単連結）より $\Sigma\times\mathbf{R}$ 内で 3-ball $B^3(\subset\Sigma\times(-1,1))$ をbound する。$B^3\cap L_D=\emptyset$ である[6]。B^3 を用いて $L_D\cup(\Sigma\times\mathbf{R}-\Sigma\times(-1,1))$ を止めた ambient isotopy により S_0 を $S_0'=(S_0-d_{S_0})\cup d$ に変形出来る。補題２の証明中のSTEP I, II と同様にして、1) $\ell\subset d_{S_0}$ ならば $S_0'\in\mathbb{S}$ で、$c(S_0)>c(S_0')$、また、2) $\ell\not\subset d_{S_0}$ $(\Leftrightarrow\ell\cap d_{S_0}=\emptyset)$ ならば、補題１(2) と条件 ii) より $L_D\cap B^2=\emptyset$ だから、d を少し push up し（必要なら更に、L_D に関して normal 化する）$L_D\cup(\Sigma\times\mathbf{R}-\Sigma\times(-1,1))$ を止めた ambient isotopy で S_0' を変形して得られる $S_0''\in\mathbb{S}$ は $c(S_0)>c(S_0'')$ を満たす。1)、２）どちらのの場合も、$c(S_0)=\min\{c(S)\,|\,S\in\mathbb{S}\}$ に反するから、$S_0\cap\Sigma\times 0$ は contractible loop を含まない。

補題４. S_0 の各連結成分（＝ annulus ）と $\Sigma\times 0$ の交わりは丁度１本の non-contractible loop である。従って、$|S_0\cap\Sigma\times 0|=|\partial\tilde{N}(D')|$ である。

<u>補題４の証明</u>　補題４が成り立たないと仮定すると、S_0 の連結成分（＝ annulus）で $\Sigma\times 0$ との交わりが３本以上の non-contractible loops であるものが存在する（∵前補題３及びSTEP I の証明）。補題４の証明のために３つの副補題を示す。

副補題２.　$S(\in\mathbb{S})$ と $\Sigma\times 0$ との交わりの連結成分は non-contractible なもののみとする。S の連結成分（＝ annulus）で $\Sigma\times 0$ との交わりが３本以上の loops であるものが存在するとき、S 内の annulus A と $\Sigma\times 0$ 内の annulus A_0 で次の２つの条件１）かつ２）、または、1'）かつ２）を満たすものがそれぞれ存在する。
１）$A\subset\Sigma\times(-1,0]$ かつ $A\cap A_0=\partial A$ $(=\partial A_0\subset\Sigma\times 0)$、２）$(A_0-\partial A_0)\cap S=\emptyset$
1'）$A\subset\Sigma\times[0,1)$ かつ $A\cap A_0=\partial A$ $(=\partial A_0\subset\Sigma\times 0)$、

---

[6] $B^3\cap L_D\neq\emptyset$ とすると補題２より $L_D\subset\mathrm{int}B^3$、従って、$L_D$ は $\Sigma(=\Sigma\times 0)$ 内の disk 上の link diagram D'' によって表される link $L_{D''}$ と ambient isotopic である。$\langle D''\rangle\in\mathbf{Z}[A,A^{-1}]$ だから、脚注５と同様に、$\langle D\rangle\in\mathbf{Z}[A,A^{-1}]$ より $\tilde{N}(D)$ は 2-ball であることが示されるが、これは条件ii)「$\tilde{N}(D)$ は 2-ball でなく」に反する。

副補題２の証明.

$\mathbf{A} := \{A' | A'$ は $S \cap \Sigma \times (-1,0]$ の連結成分(= annulus)で $\partial A' \subset \Sigma \times 0\}$ とすると仮定より $\mathbf{A} \neq \emptyset$ 。$A' \in \mathbf{A}$ に対し $\Sigma \times 0$ 内の annulus A'_0 で $\partial A'_0 = \partial A'$ であるものが存在する。このような annulus A'_0 全体の（有限）集合族 $\mathbf{A}_0 := \{A'_0 | A'_0$ は $\Sigma \times 0$ 内の annulus で $^{\exists}A' \in \mathbf{A}$ s.t. $\partial A' = \partial A'_0\}$ に属する２つの annuli について一方が他方の部分集合であるかまたは両者（但し、脚注8の①の場合は両者の内部）は交わらないので、包含関係による半順序における極小元（=innermost annulus ）A_0 s.t. $(A_0 - \partial A_0) \cap S = \emptyset$ とこの A_0 に対応する $A \in \mathbf{A}$ s.t. $\partial A = \partial A_0$ が存在する[7]。よって、この A, A_0 は条件１)、２)を満たす。また、条件１'), ２) を満たすものも $\mathbf{A}$ の定義を $\mathbf{A} := \{A' | A'$ は $S \cap \Sigma \times [0,1)$ の連結成分で $\partial A' \subset \Sigma \times 0\}$ として同様の議論を行えば得られる。

副補題３.　副補題２における A, A_0 について、torus $A \cup A_0$ ($= T$ とおく）は $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の solid torus $\bar{T}$ を bound し、$(\bar{T}; T, A, A_0) \approx (S^1 \times B^2; S^1 \times S^1, S^1 \times B^1_+, S^1 \times B^1_-)$ を満たす。（但し、$\approx$ は組としての同相、S^1, B^2 はそれぞれ原点を中心とする（平面内の）単位円周と単位円盤、B^1_+, B^1_- はそれぞれ上半単位円周と下半単位円周を表す。）

副補題３の証明.

（１）A, A_0 が条件１), ２) を満たす場合。T は $\Sigma \times \mathbf{R}$ を２つの submanifolds M_1 ($\subset \Sigma \times (-1,0]$), M_2に分ける。もし

「loop $^{\exists}\ell \subset T$ s.t. 1) $\ell \cap A$ (resp. $\ell \cap A_0$) is a (boundary proper) arc in A (resp. A_0) and
2) ℓ bounds a disk d in $\Sigma \times (-1,0]$ s.t. int $d \cap S = \emptyset$ 」（… ①とおく）

ならば 2) より $d \subset M_1$ で $M_1 - N_1(d)$ ($N_1(d)$ は regular neighborhood of d in M_1 ）の（M_1 における）閉包 $cl_{M_1}(M_1 - N_1(d))$ は 3-ball [8]、よって solid torus $\bar{T} = M_1$ を得る。さらに 1) より副補題３の後半の条件も満たす。以下①を場合に分けて示す。

CASE I) $\Sigma \times 0 - A_0$ が connected な場合。loop $\ell' \subset \Sigma$ で、i) $\ell' \times 0$ は２本の loops ∂A_0 とそれぞれ１点で交わり、かつ ii) $\ell' \times 0 \cap A_0$ は１本の arc α_0 であるものが存在する。（必要なら ambient isotopy による変形を行えば）$\ell' \times [-1,1]$ は S と transversal に交わるとして良い。A を含む S の連結成分を S_A とし、$S_A \cap \Sigma \times [-1,0]$ の連結成分で loop $S_A \cap \Sigma \times \{-1\}$ を含むもの (annulus) を A_{-1} とすると、$\ell' \times [-1,0] \cap A_{-1}$ は $\ell' \times \{-1\}$ 上の１点と $\ell' \times 0$ の１点を結ぶ arc component α_{-1}

---

[7] A_0 s.t. $(A_0 - \partial A_0) \cap S = \emptyset$ の存在について。 Σ が torus でかつ「 S の１つの連結成分で $\Sigma \times 0$ との交わりが丁度３本の loops であり、S の他の連結成分と $\Sigma \times 0$ との交わりが丁度１本の loop である」場合（=①とおく）を除くと innermost annulus A_0 は常に $(A_0 - \partial A_0) \cap S = \emptyset$ を満たすが、①の場合 $\mathbf{A}$ は１つの annulus のみからなり、$\mathbf{A}_0$ は丁度２つの annuli の集合族で共に inner most annulus であり、一方の内部は S と交わり、他方の内部は S と交わらない。よって、この場合は後者の annulus を A_0 として選べば $(A_0 - \partial A_0) \cap S = \emptyset$ を満たす。

[8] $\partial(cl_{M_1}(M_1 - N_1(d)))$ は 2-sphere で contractible in $\Sigma \times \mathbf{R}$ （∵ i) より $\Sigma \approx S^2$ だから $\Pi_2(\Sigma \times \mathbf{R}) = 0$ ）よって Scheonflies theorem から。

を含む[9]。条件2) $(A_0-\partial A_0)\cap S=\emptyset$ より $\alpha_{-1}\cap\alpha_0\subset A_{-1}\cap A_0=\emptyset$、また $A_{-1}\cap A=\emptyset$ より $\alpha_{-1}\cap(\ell'\times(-1,0]\cap A)=\emptyset$ (∵ 左辺 $\subset(\ell'\times[-1,0]\cap A_{-1})\cap(\ell'\times(-1,0]\cap A)=\ell'\times(-1,0]\cap(A_{-1}\cap A)=\emptyset$)。さらに、i), ii) より $\ell'\times 0\cap A$ $(=\ell'\times 0\cap\partial A=\ell'\times 0\cap\partial A_0=\partial\alpha_0)$ は2点 $\partial\alpha_0$ だから $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分として 2点 $\partial\alpha_0$ を結ぶ arc α が存在する。よって $\alpha_0\cup\alpha$ は contractible subsurface $\ell'\times(-1,0]-\alpha_{-1}$ 内の loop だから $\ell'\times(-1,0]-\alpha_{-1}$ 内の disk d を bound する。必要なら ambient isotopy による変形を行えば、$\mathrm{int}\,d$ と S は transversal に交わるとして良い。さらに、$S\cap\mathrm{int}\,d=\emptyset$ として良い (∵そうでないときは$S\cap\mathrm{int}\,d$ の連結成分である loop を inner most なものから順に ambient isotopy で消去出来るから)。よって ①における loop $\ell=\alpha_0\cup\alpha$ が得られた。

CASE II) $\Sigma\times 0-A_0$ が connected でない場合。さらに subcases に分けて示す。
$\Sigma\times 0-\mathrm{int}A_0$ の2つの連結成分を Σ_1,Σ_2 とする。

case i) Σ_1,Σ_2 が共に non-compact な場合。Σ 内の (両端なしの) arc ℓ' で $\ell'\times 0\cap\Sigma_i$ $(i=1,2)$ は半開区間と、$\ell'\times 0\cap A_0$ $(=\alpha_0$ とおく) は閉区間と同相、$\ell'\times 0$ は closed in $\Sigma\times 0$ かつ $\ell'\times[-1,1]$ は S と transversal に交わるものが存在する。$\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分で2点 $\partial\alpha_0=\ell'\times 0\cap A$ を結ぶ arc α が存在し、$\ell'\times(-1,0]$ は contractible だから、$\alpha_0\cup\alpha$ は $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk d を bound する。CASE I) と同様に $S\cap\mathrm{int}\,d=\emptyset$ として良いから ①における loop $\ell=\alpha_0\cup\alpha$ が得られた。

case ii) Σ_1,Σ_2 の一方が compact で他方が non-compact な場合。Σ_1 は compact で Σ_2 は non-compact である場合について示せば十分。このとき Σ_1 は disk ではない (∵ $\partial\Sigma_1$ は $\partial A_0(\subset\Sigma\times 0\cap S)$ の1つの連結成分である loop だから仮定より non-cotractible)、よって Σ_1 内の arc γ s.t. $\partial\Sigma_1\cap\gamma=\partial\gamma$ で、2点 $\partial\gamma$ は loop $\partial\Sigma_1$ を2本の arcs γ_1,γ_2 に分けるとすると loop $\gamma\cup\gamma_i$ $(i=1,2)$ は共に non-contractible かつ $\partial\Sigma_1$ と homotopic にならないものが存在する。さらに Σ_2 は non-compact だから arc γ を延長した (両端なしの) arc ℓ' で次の4つの条件 1) - 4) を満たすものが存在する;
1) $\ell'\cap\Sigma_1=\gamma$ 、2) $\ell'\cap A_0$ の連結成分は2本の arcs $\alpha_0^{\cdot},\alpha_0^{\cdot}$、
3) $\ell'\cap\Sigma_2$ は closed in $\Sigma\times 0$ でその連結成分は2本の (半開区間と同相な) half-open arcs、かつ
4) $\ell'\times[-1,1]$ は S と transversal に交わる。(但し、$p(\ell')\times[-1,1]$ ($p:\Sigma\times\mathbf{R}\to\Sigma$ は射影) を簡単のため $\ell'\times[-1,1]$ と表した。以下同様。)

もし $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分で2点 $\partial\gamma$ $(=\partial\gamma_1=\partial\gamma_2=\partial\Sigma_1\cap\gamma)$ を結ぶ arc α' が存在したとすると loop $\alpha'\cup\gamma_i(\subset A)(i=1,2)$ はそれぞれ $\gamma\cup\gamma_i$ と homotopic だから共に non-contractible かつ $\partial\Sigma_1$ と homotopic ではない。これは A 内に non-contractible で non- homotopic な2つの loops $\alpha'\cup\gamma_i$, $\partial\Sigma_1$ $(i=1$ or $2)$ を含むことを意味するから A が annulus であることに反する。故にこのような arc α' は存在しない。また、定め方から $\ell'\times 0\cap A$ $(=\ell'\times 0\cap\partial A=\ell'\times 0\cap\partial A_0=\partial\alpha_0^{\cdot}\cup\partial\alpha_0^{\cdot})$ は

---

[9] ∂A_{-1} 及び $\partial A=\partial A_0$ の各連結成分である loop 同士は homotopic で $\partial A=\partial A_0$ の各連結成分と $\ell'\times\{0\}$ の mod 2 algebraic intersection number は1より、$\partial A_{-1}\cap\Sigma\times i$ と $\ell'\times\{i\}$ $(i=0,-1)$ の mod 2 algebraic intersection number も1だから。

4点だから $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分でこれら4点の2点同士を結ぶ arcs が2本存在しそれら2本は互いに交わらない、従って、点 $\partial\alpha_0^{\cdot}\cap\partial\gamma\ (=\partial\alpha_0^{\cdot}\cap\partial\Sigma_1)$ と点 $\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}-\partial\gamma\ (=\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}-\partial\Sigma_1)$ を結ぶ arc となる $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分は存在しない（∵そのような arc は残りの2点を $\ell'\times(-1,0]$ において分離するから）。よって、$\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分で2点 $\partial\alpha_0^{\cdot}$ を結ぶ arc α が存在し、$\ell'\times(-1,0]$ は contractible だから、loop $\alpha_0^{\cdot}\cup\alpha\ (\subset\ell'\times(-1,0])$ は $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk d を bound する。前と同様に $S\cap\mathrm{int}\,d=\varnothing$ として良いから①における loop $\ell=\alpha_0^{\cdot}\cup\alpha$ が得られた。

case iii）Σ_1,Σ_2 が共に compact な場合。$\partial\Sigma_1,\partial\Sigma_2$ はそれぞれ1本の loop で、Σ_1,Σ_2 はそれぞれ disk ではない。（∵前半は $\Sigma_1\cup A_0\cup\Sigma_2=\Sigma\times 0$ 、$\partial\Sigma=\varnothing$ とこの場合の仮定から。後半は $\partial\Sigma_1,\partial\Sigma_2\ (\subset\partial A_0\subset\Sigma\times 0\cap S)$ で、$\partial A_0\ (\subset\Sigma\times 0\cap S)$ の各連結成分である loop は仮定より non-cotractible だから。）従って、loop $\ell'\subset\Sigma$ で次の4つの条件 i）- iv）を満たすものが存在する；

i）$\ell'\times 0\ \cap\Sigma_i\ (i=1,2)$ はそれぞれ1本の arc $\gamma_i\ (i=1,2)$ s.t. $\gamma_i\cap\partial\Sigma_i=\partial\gamma_i$ 、

ii）$\ell'\times 0\cap A_0$ は2本の arcs $\alpha_0^{\cdot},\alpha_0^{\cdot\cdot}$ s.t. $\alpha_0^{\cdot}\cap\partial A_0=\partial\alpha_0^{\cdot}$, $\alpha_0^{\cdot\cdot}\cap\partial A_0=\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}$

iii）2点 $\partial\gamma_i\ (i=1,2)$ によって loop $\partial\Sigma_i$ は2本の arcs $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2}$ に分けられる。このとき loop $\gamma_i\cup\gamma_{i_j}\ (i=1,2,\ j=1,2)$ は non-contractible でかつ loop $\partial\Sigma_i$ と homotopic でない、

iv）$\ell'\times[-1,1]$ は S と transversal に交わる。

前と同様に、もし $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分で loop $\ell'\times 0\ (\subset\partial(\ell'\times[-1,0]))$ 上の2点 $\partial\gamma_1\ (=\partial\gamma_{1_1}=\partial\gamma_{1_2}=\partial\Sigma_1\cap\gamma_1)$ を結ぶ arc α' が存在したとすると、

イ）loop $\alpha'\cup\gamma_1\ (\subset\ell'\times(-1,0])$ は $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk を bound するか、または

ロ）loop $\alpha'\cup(\ell'\times 0-\gamma_1)\ (\subset\ell'\times(-1,0])$ が $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk を bound する。

イ）のとき、loop $\alpha'\cup\gamma_{1_1}\ (\subset A)$ は loop $\gamma_1\cup\gamma_{1_1}$ と homotopic だから iii）より non-contractible かつ $\partial\Sigma_1$ と homotopic ではない。これは A 内に non-contractible で non- homotopic な2つの loops $\alpha'\cup\gamma_{1_1}$, $\partial\Sigma_1$ を含むことを意味するから A が annulus であることに反する。故にこのような arc α' は存在しない。

ロ）のとき、$\alpha'\cup(\ell'\times 0-\gamma_1)$ が $\ell'\times(-1,0]$ 内で bound する disk 内に loop $\ell'\times 0$ 上の2点 $\partial\gamma_2\ (=\partial\gamma_{2_1}=\partial\gamma_{2_2}=\partial\Sigma_2\cap\gamma_2)$ を結ぶ arc α'' が存在し、loop $\alpha''\cup\gamma_2\ (\subset\ell'\times(-1,0])$ は $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk を bound する。よって、イ）のときと同様の議論により annulus A 内に non-contractible で non- homotopic な2つの loops $\alpha''\cup\gamma_{2_1}$, $\partial\Sigma_2$ を含むという矛盾を引き起こすからこのような arc α' は存在しない。

また前と同様に、定め方から $\ell'\times 0\cap A\ (=\ell'\times 0\cap\partial A=\ell'\times 0\cap\partial A_0)$ は4点だから $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分でこれら4点の2点同士を結ぶ arcs が2本存在しそれら2本は互いに交わらない、従って、点 $\partial\alpha_0^{\cdot}\cap\partial\gamma_1\ (=\partial\alpha_0^{\cdot}\cap\partial\Sigma_1)$ と点 $\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}\cap\partial\gamma_2\ (=\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}\cap\partial\Sigma_2)$ を結ぶ arc となる $\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分は存在しない（∵そのような arc は残りの2点を $\ell'\times(-1,0]$ において分離するから）。よって、$\ell'\times(-1,0]\cap A$ の連結成分で2点 $\partial\alpha_0^{\cdot}$ を結ぶ arc $\dot{\alpha}$ と2点 $\partial\alpha_0^{\cdot\cdot}$ を結ぶ arc $\ddot{\alpha}$ が存在し、$\dot{\alpha}\cap\ddot{\alpha}=\varnothing$ である。2本の loops $\alpha_0^{\cdot}\cup\dot{\alpha},\alpha_0^{\cdot\cdot}\cup\ddot{\alpha}$ の少なくとも1本の loop（ℓ とおく）は $\ell'\times(-1,0]$ 内の disk d を bound する。前と同様に $S\cap\mathrm{int}\,d=\varnothing$ として良いから①における loop ℓ が得られた。

以上により CASE II）も示された。よって、（1）の場合について副補題3が示された。

（2） A, A_0 が条件 1'), 2) を満たす場合。　（1）の場合と同様の議論によって示される[10]。

以上により副補題3が示された。

副補題4．　副補題2における A, A_0 が条件 1), 2) を満たすとき、$L_D \cap A_0 \neq \emptyset$ ならば　$D = p(L_D) \subset \mathrm{int}\, A_0$ 、従って $L_D \cap \Sigma \times 0 = L_D \cap A_0$ である。

副補題4の証明.

補題1の証明と同様の手法により、まず、「$\mathrm{int} A_0$ 内にある link diagram D on $\Sigma = \Sigma \times 0$ のcrossing x_i に対する (L_D の) bridge disk d_i　(cf. 定義3（2）) は S と交わらない」（ … ① とおく）ことを示す。（以下、定義3における記号を使う。）$d_i \cap S \neq \emptyset$ とすると S は L_D に対して normal だから $(A_0 - \partial A_0) \cap S = \emptyset$ （＝条件2)）より $p(\beta_i) - S$ の $x_i (= p(\mathrm{int}\, \beta_i) \cap L_D)$ を含む component α の両端点は ∂A_0 上の2点 a, b で（それぞれ β_i', β_i'' 上に）あり、さらに a, b を両端点とする $d_i \cap S$ の(arc) compotent α' が存在する。loop $\alpha \cup \alpha' (\subset d_i)$ は d_i 内の disk d_i' を bound する。また、$\mathrm{int}\, \alpha' \cap A = \emptyset$ [11] で、A の2本のboundary loops $\partial A (= \partial A_0)$ はそれぞれ $S - \mathrm{int}\, A$ の異なる連結成分に含まれるから、α の両端点 a, b は共に（A の）1本の boundary loop $\ell (\subset \partial A)$ 上にある。annulus A を含む S の連結成分を S_A （これもannulus）とすると S_A は loops $S_0 \cap \Sigma \times 0$ によって3つ以上の subannuli に分けられる[12]が、α' は A と ℓ で隣接する subannulus A_1 に含まれる（$\because \mathrm{int}\, \alpha' \cap \Sigma \times 0 = \emptyset$ ）。従って、2点 a, b を結ぶ ℓ 内の arc α'' で looop $\alpha' \cup \alpha'' (\subset A_1 \subset S_0 \subset S)$ が A_1 内の disk d_1 を bound するものが存在する。また、loop $\alpha' \cup \alpha''$ は loop $\alpha \cup \alpha'' (\subset \Sigma \times 0)$ と homotopic （$\because \alpha \cup \alpha' = \partial d_i'$ ）だから loop $\alpha \cup \alpha''$ も contractible 、よって、loop $\alpha \cup \alpha''$ は $A_0 (\subset \Sigma \times 0)$ 内で disk d' を bound する。disk d' の内部だけを少し下方へ push すると $\Sigma \times (-1, 0]$ 内の disk d'' s.t. $\mathrm{int}\, d'' \subset \Sigma \times (-1, 0), \partial d'' = \partial d'$ が得られる。$d_1 \cup d_i' \cup d''$ は $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内の 2-sphere で link L_D の crossing x_i における underpass に対応する成分（loop）と1点のみで交わる。$\Sigma \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^3$ に埋め込み可能だからこれは起こり得ない。よって $d_i \cap S = \emptyset$ でなければならない。則ち、①が示された。①を用いて、補題1(2)の証明において B^2 を A_0 に、ℓ を ∂A_0 に変え、同様の議論を行えば

$D = p(L_D) \subset \mathrm{int}\, A_0$ を得る。従って、L_D の定義より $L_D \cap \Sigma \times 0 = L_D \cap A_0$ である。則ち、副補題4が示された。

補題4の証明に戻る。補題4が成り立たないと仮定すると、補題3及び本証明の冒頭に述べたことから、S_0 に対して副補題2,3,4 が適用出来る。

（1） $L_D \cap A_0 \neq \emptyset$ の場合。　副補題2おいて条件 1'), 2) を満たす S 内の annulus と $\Sigma \times 0$ 内の annulus をそれぞれ $\hat{A}, \hat{A}_0$ とすると $\mathrm{int}\, \hat{A}_0 \cap \mathrm{int}\, A_0 = \emptyset$ である。副補題4より $\hat{A}_0 \cap L_D = \emptyset$ だから副補題3より S_0 を（$\hat{A}$ を $\hat{A}_0$ の少し下方に push down する） $L_D \cup (\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1, 1))$ を止めた ambient isotopy で変形し、交わり

---

[10] reflection $r : \Sigma \times \mathbf{R} \to \Sigma \times \mathbf{R}$ $(r(x,t) = (x, -t)$ for $^{\forall}(x,t) \in \Sigma \times \mathbf{R})$ を用いて（1）の場合に帰着させても良い。

[11] $\mathrm{int}\, \alpha' \subset d_i - \Sigma \times 0 \subset \Sigma \times (0, 1]$、$A \subset \Sigma \times (-1, 0]$ （条件1)）だから。

[12] 仮定より $S \cap \Sigma \times 0$ は contractible な連結成分を含まないから。

$S_0 \cap \Sigma \times 0 (\supset \partial \hat{A} = \partial \hat{A}_0)$ から２本の loops $\partial \hat{A}$ を消去して得られる $S_0' \in \mathbb{S}$ は $c(S_0) > c(S_0')$ を満たす。

（２）$L_D \cap A_0 = \varnothing$ の場合。　副補題３より S_0 を（A を A_0 の少し上方に push up する）$L_D \cup (\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1))$ を止めた ambient isotopy で変形し、交わり $S_0 \cap \Sigma \times 0 (\supset \partial A)$ から２本の loops ∂A を消去して S_0' を得る。S_0' が L_D に関して normal ならば $S_0' \in \mathbb{S}$ で $c(S_0) > c(S_0')$ を満たす。S_0' が L_D に関して normal でなければ、副補題１の証明中の２）と同様にして、S_0' を $L_D \cup (\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1))$ を止めた ambient isotopy で L_D に関して normal 化して $S_0'' \in \mathbb{S}$ s.t. $c(S_0) > c(S_0')$ を得る。

（１）、（２）いづれの場合も $c(S_0) = \min\{c(S) \mid S \in \mathbb{S}\}$ に反する。よって、補題４が成り立つ。

補題５．　$S_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i) = \varnothing$　（但し、ν_D は D の交点数、d_i は交点 x_i に対応する disk , cf.定義３(2))、よって、$\left|S_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)\right| = 0$ である。

<u>補題５の証明</u>　$S_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i) \neq \varnothing$ とすると $^{\exists} d_i$ s.t. $S_0 \cap d_i \neq \varnothing$ 。このとき、補題１(１)の証明と同様にして、交点 x_i に対応する underpass を含む L_D の１つの component と横断的に１点のみで交わる 2-sphere in $\Sigma \times \mathbf{R}$ の存在が示される。実際、以下のように示される。$(d_i \cap \Sigma \times 0) - S_0$ の $x_i (= d_i \cap \Sigma \times 0 \cap L_D)$ を含む component α の両端点を a, b とすると、S_0 は L_D に対して normal だから、a,b を両端点とする $d_i \cap S_0$ の compotent $\hat{\alpha}$ が存在する。loop $\alpha \cup \hat{\alpha}$ は d_i 内で 2-ball B_1^2 を bound する。$\hat{\alpha}$ を含む S_0 の連結成分（annulus）を $S_{\hat{\alpha}}$ とすると、補題４より、$S_{\hat{\alpha}} \cap \Sigma \times 0 = \ell$ は１本の loop で、２点 a,b を含み、$S_{\hat{\alpha}}$ を２つのannuli に分割する。$\hat{\alpha}$ はその一方の annulus に含まれるから、a,b を両端点とする ℓ 内の arc $\tilde{\alpha}$ で loop $\hat{\alpha} \cup \tilde{\alpha}$ が 2-ball $B_2^2 \subset S_{\hat{\alpha}} \subset S_0$ をbound するものが存在する。$B_1^2 \cup B_2^2$ は 2-ball（$\because B_1^2 \cap B_2^2 = \hat{\alpha}$）だから、loop $\alpha \cup \tilde{\alpha} = \partial(B_1^2 \cup B_2^2) \subset \Sigma \times 0$ は contractible、従って、2-ball $B_3^2 \subset \Sigma \times 0$ をbound する。2-sphere $B_1^2 \cup B_2^2 \cup B_3^2$ を $\mathrm{int}\, B_1^2$ のみを push down する ambient isotopy で変形して得られる 2-sphere in $\Sigma \times \mathbf{R}$ は $x_i (= d_i \cap \Sigma \times 0 \cap L_D)$ を含む L_D の１つのcomponent と横断的に１点 x_i のみで交わる。これは、Brouwer の分離定理に反する（$\because$ $\Sigma \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^3$ に埋め込めるから）。よって、$S_0 \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i) = \varnothing$ である。

補題4,5 より $c(S_0) := (\left|S \cap (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)\right|, |S \cap (\Sigma \times 0)|) = (0, |\partial \tilde{N}(D')|)$ 、よって、STEP II が示された。

STEP III　Σ 上の isotopy $h_t : \Sigma \to \Sigma$ で $h_0 = 1_\Sigma$ かつ $h_1(\tilde{N}(D')) \supset \tilde{N}(D)$ であるものが存在する。

<u>STEP III の証明</u>

STEP II より、D, D' に対する $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内における（$\Sigma = \Sigma \times 0$ 上の bridge links としての）標準的実現 $L_D, L_{D'}$（$\subset \Sigma \times [0,\varepsilon]$ (ε : １に対し十分小さな正数)）に対し $\Sigma \times \mathbf{R} - \Sigma \times (-1,1)$ ((−1,1) : open interval) を止めた ambient isotopy $\tilde{g}_t : \Sigma \times \mathbf{R} \to \Sigma \times \mathbf{R}$

s.t. $\tilde{g}_1(L_{D'}) = L_D$ で、$\tilde{g}_1((\partial\tilde{N}(D'))\times I) = S_0$ （ $I := [-1,1]$ ）かつ $c(S_0) = (0, |\partial\tilde{N}(D')|)$ を満たすものが存在し、$S_0 \cap \Sigma\times 0$ の連結成分は S_0 の各連結成分（= annulus）内に non-contractible loop として各１本ずつ存在する。

補題６． $\tilde{N}(D')$ は connected 、従って link diagram D' も connected である。

<u>補題６の証明</u>

（$D = p(L_D) \subset \Sigma = \Sigma\times 0 \subset \Sigma\times\mathbf{R}$ とみなすとき） $D = p(L_D) \subset D \cup (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i) = L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)$ で、仮定より D は connected だから $L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{\nu_D} d_i)$ も connected 。$\tilde{N}(D')$ の連結成分を $N_i\ (i=1,\cdots,m)$ とすると、$N_i \cap D' \neq \emptyset\ (i=1,\cdots,m)$ より link diagram の標準的実現の定義から $L_{D'} \subset \tilde{N}(D')\times I,\ L_{D'} \cap (N_i\times I) \neq \emptyset\ (i=1,\cdots,m)$ である。よって、$L_D = \tilde{g}_1(L_{D'}) \subset \tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I) = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{g}_1(N_i\times I)$ 、$L_D \cap \tilde{g}_1(N_i\times I)(= \tilde{g}_1(L_{D'}) \cap \tilde{g}_1(N_i\times I)) \neq \emptyset$ $(i=1,\cdots,m)$ 。定義より $d_i \cap L_D \neq \emptyset\ (i=1,2,\cdots,\nu_D)$ 、また $d_i \cap S_0 = \emptyset$ $(i=1,2,\cdots,\nu_D)$ （∵補題５）だから $S_0 = g_1((\partial\tilde{N}(D'))\times I)$ より $L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{k} d_i) \subset \tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I) = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{g}_1(N_i\times I)$ である。$L_D \cup (\bigcup_{i=1}^{k} d_i)$ は connected で、各連結成分 $\tilde{g}_1(N_i\times I)\ (i=1,\cdots,m)$ と交わるから、$\tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I)$ の連結成分数は１、則ち $m=1$ 、即ち、$\tilde{N}(D')$ は connected である。従って、$\tilde{N}(D')$ の定義から D' も connected である。

補題7． $M^3 := \tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I) \cap \Sigma\times[0,1],\ M_0^2 := \tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I) \cap \Sigma\times 0$ と置く。$\tilde{g}_1$ に関する仮定から $\tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I) \cap \Sigma\times 1 = \tilde{N}(D')\times 1$ （$= M_1^2$ と置く）である。このとき、同相写像 $\varphi : \tilde{N}(D')\times[0,1] \to M^3$ で $\varphi(\tilde{N}(D')\times 0) = M_0^2$ 、$\varphi(\tilde{N}(D')\times 1) = M_1^2$ かつ $\varphi|\tilde{N}(D')\times 1 (= \varphi|M_1^2) = 1_{M_1^2}$ （$M_1^2 (= \tilde{N}(D')\times 1)$ 上の恒等写像）を満たすものが存在する。

<u>補題7の証明</u>　副補題６より $\tilde{N}(D')$ は connected compact surface with boundary だから $\tilde{N}(D')$ 内の互いに交わらない boundary proper (simple) arcs $\alpha_i\ (i=1,\cdots,q)$ で、その $\tilde{N}(D')$ 内における regular neighborhoods を $N(\alpha_i)$ $(i=1,\cdots,q)$ とするとき、$cl(\tilde{N}(D') - \bigcup_{i=1}^{q} N(\alpha_i))$ （cl は閉包）が disk となるものが存在する。（必要なら $\Sigma\times\mathbf{R} - \mathrm{int}(\tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I))$ $(\supset S_0)$ を止めた[13] ambient isotopy による変形を前と同様に用いて）各 $\tilde{g}_1(\alpha_i\times I)$ と $\Sigma\times 0$ の交わりは transversal で $\tilde{g}_1(\alpha_i\times I) \cap \Sigma\times 0\ (i=1,\cdots,q)$ は contractible loops を含まないとして良い。各 $\tilde{g}_1(\alpha_i\times I)\ (i=1,\cdots,q)$ に対し $\tilde{g}_1(\alpha_i\times 1)(= \alpha_i\times 1)$ を含む $\tilde{g}_1(\alpha_i\times I) \cap M^3$ の連結成分を $\delta_i\ (i=1,\cdots,q)$ とすると δ_i は M^3 内の boundary proper disk で $\delta_i \cap \Sigma\times 0 = \delta_i \cap M_0^2$ と置く）は M_0^2 内の boundary proper arc である。$\partial N(D')$ の各連結成分の loop を $\ell_i\ (i=1,2,\cdots,m)$、$S_i := g_1(\ell_i\times I)$ （$= S_0$ の連結成分）、$\ell_i' := S_i \cap \Sigma\times 0$ （＝１本の loop）、$\ell_i'' := S_i \cap \Sigma\times 1 (= \ell_i\times 1)$ とすると ℓ_i', ℓ_i'' は annulus S_i 内の subannulus $\hat{S}_i$ を bound する。まず、$\varphi|\tilde{N}(D')\times 1 (= \varphi|M_1^2) := 1_{M_1^2}$ と定め、次の順に拡張する。

---

[13] この場合、L_D は動かしても良い。

1) $\varphi|\tilde{N}(D')\times 1$ は $(\tilde{N}(D')\times 1)\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i\times[0,1])\cup(\bigcup_{j=1}^{q}\alpha_j\times[0,1])$ から $M_1^2\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\hat{S}_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{q}\delta_j)$ への同相写像で $\varphi(\ell_i\times 0)=\ell_i'$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $\varphi(\alpha_j\times 0)=\delta_j\cap\Sigma\times 0$ $(j=1,2,\cdots,q)$ を満たす拡張をもつ。（$\because \hat{S}_i$ は annulus で $\partial\hat{S}_i=\ell_i'\cup\ell_i''$ だから $(\varphi(\ell_i\times[0,1]),\varphi(\ell_i\times 0))=(\hat{S}_i,\ell_i')$ を満たす $\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i\times[0,1]$ 上への拡張をもち、$\delta_j\cap\Sigma\times 0(\subset\partial\delta_j)$ は M_0^2 内の boundary proper arc でその両端点は $\varphi(\partial\alpha_j\times 0)(\subset\varphi(\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i\times 0))$ （＝既に拡張された定義域内の２点の像）だから $\varphi(\alpha_j\times 0)=\delta_j\cap\Sigma\times 0$ を満たす $\bigcup_{j=1}^{q}\alpha_j\times 0$ 上への拡張をもち、更に $\alpha_j\times[0,1]$, δ_j は共に disk で δ_j の境界 $\partial\delta_j$ は $\varphi(\partial(\alpha_j\times[0,1]))$ （＝既に拡張された定義域内の loop $\partial(\alpha_j\times[0,1])$ の像）だから $\varphi(\alpha_j\times[0,1])=\delta_j$ を満たす $\bigcup_{j=1}^{q}\alpha_j\times[0,1]$ 上への拡張をもつ。）

2)　1) で得られた $\varphi|(\tilde{N}(D')\times 1)\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i\times[0,1])\cup(\bigcup_{j=1}^{q}\alpha_j\times[0,1])$ は求める補題7の条件を満たす同相写像 $\varphi:\tilde{N}(D')\times[0.1]\to M$ に拡張出来ることを示す。M^3 内の boundary proper な disk $\delta_i(\subset M^3)$ の M^3 における boundary relative regular neighborhood $N(\delta_j)$ $(j=1,\cdots,q)$ は $N(\delta_j)\cap M_1^2=N(\alpha_j)\times 1$ を満たすとする。$N(\delta_j)\cap M_0^2=:N_0(\delta_j)$ と置くと $(\tilde{N}(D')\times 1)\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i\times[0,1])\cup(\bigcup_{j=1}^{q}N(\alpha_j)\times[0,1])$ から $M_1^2\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\hat{S}_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{q}N(\delta_j))$ への同相写像で $\varphi(N(\alpha_j)\times 0)=N_0(\delta_j)$ を満たす拡張をもつ。$\tilde{M}^3:=cl(M^3-\bigcup_{j=1}^{q}N(\delta_j))$, $\tilde{M}_0^2:=\tilde{M}^3\cap M_0^2$, $\tilde{M}_1^2:=\tilde{M}^3\cap M_1^2(=(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 1)$ とすると $\tilde{M}_0^2$ は disk で[14] $\partial\tilde{M}_0^2(=\tilde{g}_1(\partial(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 0))$ （＝既に拡張された定義域内の loop $\partial(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 0$ の像）だから $\tilde{g}_1((cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 0)$ を満たす $(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 0$ 上への拡張をもつ。更に $cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times[0,1]$ と $\tilde{M}^3$ は共に 3-ball で[15] $\partial\tilde{M}^3(=\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2)))$ は既に拡張された定義域内の 2-sphere $\partial(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times[0,1])$ の像だから $\tilde{g}_1(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times[0,1])=\tilde{M}^3$ を満たす $cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times[0,1]$ 上への拡張をもつ。よって求める同相写像が得られた。

---

[14] $\tilde{M}_1^2=(cl(\tilde{N}(D')-\bigcup_{i=1}^{q}N(\alpha_i))\times 1$ は disk で $\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2)$ は annulus だから $\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2))$ は disk である。よって $\partial\tilde{M}_0^2=\partial(\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2)))$ より loop $\partial\tilde{M}_0^2$ は contractible (in $\Sigma\times\mathbf{R}$ 、従って in $\Sigma\times 0$) だから $\tilde{M}_0^2$ は disk である。（$\because$ $\Sigma\times 0-\mathrm{int}\,\tilde{M}_0^2\supset\partial M_0^2=\bigcup_{i=1}^{m}\ell_i'$) は non-concontractible loop を含むから。）

[15] $\partial\tilde{M}^3=\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2))$ 、$\tilde{M}_0^2\cap(\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2)))=\partial\tilde{M}_0^2=\partial(\tilde{M}_1^2\cup(\partial\tilde{M}^3-\mathrm{int}(\tilde{M}_0^2\cup\tilde{M}_1^2)))$ より $\partial\tilde{M}^3$ は 2-sphere 、よって Scheonflies theorem から $\tilde{M}^3$ は 3-ball である。

補題8． 補題7における $M_0^2(=\tilde{g}_1(\tilde{N}(D')\times I)\cap\Sigma\times 0)$ について、$\Sigma=\Sigma\times 0$ とみなすとき、$M_0^2\supset N(D)$ である。

補題8の証明

$L_D=g_1(L_{D'})\subset \mathrm{int}\, g_1(\tilde{N}(D')\times I)$ だから補題5より $L_D\cup(\bigcup_{i=1}^{k} d_i)\subset \mathrm{int}\, g_1(\tilde{N}(D')\times I)$、よって、この両辺と $\Sigma\times 0$ との交わりをとると $D\subset \mathrm{int}\, M_0^2$ 、故に $M_0^2\supset N(D)$ を得る。

補題9． $\tilde{N}(D'),\Sigma$ は（[2] 定理の証明の最初に述べた）条件 i), ii), iii) を満たし Σ は torus ではないとする。2つの imbeddings $f,f':M_1^2(=\tilde{N}(D')\times 1)\to\Sigma$ s.t. $f(\partial M_1^2)=f'(\partial M_1^2)$ が homotopic ならば $f(M_1^2)=f'(M_1^2)$ である。

補題9の証明

M_1^2 は connected （∵補題6）で $f(\partial M_1^2)=f'(\partial M_1^2)$ だから $f(\mathrm{int}\, M_1^2)$, $f'(\mathrm{int}\, M_1^2)$ は $\Sigma-f(\partial M_1^2)(=\Sigma-f'(\partial M_1^2))$ の連結成分である。よって、Σ が closed でない場合、$f(M_1^2)=f'(M_1^2)$ である。（∵ $f(M_1^2)\neq f'(M_1^2)$ とすると $f(\mathrm{int}\, M_1^2)\cap f'(\mathrm{int}\, M_1^2)=\varnothing$ より $f(M_1^2)\cup f'(M_1^2)$ は closed subsurface in Σ 、従って Σ の connected 性から Σ も closed となるから。）以下、Σ が closed である場合について示す。このとき、$f(M_1^2)\neq f'(M_1^2)$ とすると $f(M_1^2)\cup f'(M_1^2)=\Sigma$ … ① であるが、①は起こり得ないことを示す。$f(\partial M_1^2)=f'(\partial M_1^2)$ で、$f|\partial M_1^2, f'|\partial M_1^2$ は homotopic だから、M_1^2 上の ambient isotopy $h_t:M_1^2\to M_1^2$ で $f\circ h_1|\partial M_1^2=f'|\partial M_1^2$ … ② を満たすものが存在する。imbeddings $f\circ h_1$, $f'(=f'\circ h_0)$ は homotopic だから homotopy $H:M_1^2\times[0,1]\to\Sigma$ s.t. $H(x,0)=f\circ h_1(x)$, $H(x,1)=f'(x)$, $^\forall x\in M_1^2$ が存在する。2点 $(x,0),(x,1)\in(\partial M_1^2)\times[0,1]\subset M_1^2\times[0,1]$ を同一視して得られる商空間を X とし $q:M_1^2\times[0,1]\to X$ を商写像とすると②より連続写像 $\tilde{H}:X\to\Sigma$ s.t. $\tilde{H}\circ q=H$ が一意的に定まる。①より 制限写像 $\tilde{H}|q(M_1^2\times\{0,1\}):q(M_1^2\times\{0,1\})\to\Sigma$ は同相写像であり、$q((\partial M_1^2)\times[0,1])$ は X 内の1つの torus か又は2つ以上の互いに交わらない tori である。仮定の条件 i) と Σ が torus でないとから Σ はgenus 2 以上である。$\Pi_1(\Sigma)$ は $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ と同型な部分群を含まないことと $\Pi_2(\Sigma)=0$ より $\tilde{H}:X\to\Sigma$ は X に $q((\partial M_1^2)\times[0,1])$ の各連結成分（= torus）に沿って solid torus を張り付けて[16]得られる向き付け可能な3次元多様体 X' s.t. $\partial X'=q(M_1^2\times\{0,1\})$ からの連続写像 $\tilde{H}':X'\to\Sigma$ に拡張できる。このとき、包含写像 $i_{\partial X'}:\partial X'\to X'$ による induced homology homomorphism $(i_{\partial X'})_{*2}:H_2(\partial X')\to H_2(X')$

---

[16] solid torus の meridian loop の $\tilde{H}:X\to\Sigma$ による像が Σ 内で contractible になるように張り付ける。実際、$q((\partial M_1^2)\times[0,1])$ の各連結成分（= torus）T に対し、基点のみで transversal に交わる（T 内の）2本の simple closed curves m,ℓ の homotopy class $[m],[\ell]$ によって基本群 $\Pi_1(T)$ は生成される。制限写像 $\tilde{H}|T$ による induced Π_1-homomorphism は単射でないから、T 内の non-contractible closed curve α で $\tilde{H}(\alpha)(\subset\Sigma)$ が Σ 内で contractible になるものが存在する。$[\alpha]=p[m]+q[\ell]$ $(p,q\in\mathbf{Z})$ と表せるから $[\tilde{\alpha}]=\tilde{p}[m]+\tilde{q}[\ell]$ $(\tilde{p}=p/d, \tilde{q}=q/d$ where $d=g.c.d(p,q))$ を満たす non-contractible simple closed curve $\tilde{\alpha}$ が存在する。$[\tilde{H}(\alpha)]=d[\tilde{H}(\tilde{\alpha})]\in\Pi_1(\Sigma)$ で $\Pi_1(\Sigma)$ は finite order element を含まないから $\tilde{H}(\tilde{\alpha})$ も Σ 内で contractible 、よって、solid torus の meridian loop が $\tilde{\alpha}$ に移るように張り付ければよい。

は零準同型だから $(\tilde{H}'\circ i_{\partial X'})_{*2}=\tilde{H}'_{*2}\circ(i_{\partial X'})_{*2}:H_2(\partial X')\to H_2(\Sigma)$ も零準同型である。
一方、①より $\tilde{H}'\circ i_{\partial X'}:\partial X'\to\Sigma$ は同相写像だから
$(\tilde{H}'\circ i_{\partial X'})_{*2}:H_2(\partial X')(\cong \mathbf{Z})\to H_2(\Sigma)$
$(\cong \mathbf{Z})$ は同型で零準同型ではない。これは矛盾。よって①は成り立たない。則ち、$f(M_1^2)=f'(M_1^2)$ を得る。

以上の準備のもとに STEP III を示す。

補題8より Σ において $\tilde{N}(D')$ と M_0^2 が ambient isotopic であることを示せば良い。Σ が torus のとき、条件 ii)、iii)、補題6および補題7より $\tilde{N}(D')$ と M_0^2 は共に annulus で、Σ において homotopic だから ambient isotopic である。Σ が torus でないとする。S_0 $(=\tilde{g}_1((\partial\tilde{N}(D'))\times I))$ の各連結成分 S_i $(i=1,\cdots,k)$ は annulus で、${}_0\ell_i:=S_i\cap\Sigma\times 0$, ${}_1\ell_i:=S_i\cap\Sigma\times 1$ は non-contractible loop で（cf. STEP III の冒頭の記述）、${}_0\ell_i$ と ${}_1\ell_i$ は homotopic in $\Sigma\times[0,1]$、よって ${}_0\ell_i$ と $p({}_1\ell_i)$ （$p:\Sigma\times\mathbf{R}\to\Sigma(=\Sigma\times 0)$ は projection）は homotopic in $\Sigma=\Sigma\times 0$ だから Σ 上の ambient isotopy $h_t:\Sigma\to\Sigma$ で $h_1(p({}_1\ell_i))={}_0\ell_i$ $(i=1,\cdots,k)$ を満たすものが存在する。一方、補題7の同相写像 φ を用いて、embeddings f,f' を
$f:=\varphi\circ p|M_1^2$, $f':=h_1\circ p|M_1^2$ と定めると、
$f(\partial M_1^2)=f(\bigcup_{i=1}^k{}_1\ell_i)=\varphi(\bigcup_{i=1}^k p({}_1\ell_i))=\varphi((\partial N(D')\times 0)=\partial M_0^2$,
$f'(\partial M_1^2)=f'(\bigcup_{i=1}^k{}_1\ell_i)=h_1(\bigcup_{i=1}^k p({}_1\ell_i))=\bigcup_{i=1}^k h_1(p({}_1\ell_i))=\bigcup_{i=1}^k{}_0\ell_i=\partial M_0^2$ より $f(\partial M_1^2)=f'(\partial M_1^2)$
また、補題7より f,f' は共に包含写像 $i:M_1^2=\tilde{N}(D')\times 1\to\Sigma\times[0,1]$ と（$\Sigma\times[0,1]$ で）homotopic だから $\Sigma(=\Sigma\times 0)$ でも homotopic である。よって、f,f' は補題9の条件を満たす embedding である。よって、補題9より $f(M_1^2)=f'(M_1^2)$。ところで、補題7より $f(M_1^2)=\varphi(p(M_1^2))=\varphi(\tilde{N}(D')\times 0)=M_0^2$、また $f'(M_1^2)=h_1(p(M_1^2))=h_1(\tilde{N}(D')\times 0)$ で、$\Sigma=\Sigma\times 0$ とみなしているから $\tilde{N}(D')=\tilde{N}(D')\times 0$、よって、$\Sigma$ において $\tilde{N}(D')$ と M_0^2 は ambient isotopic である。

Referrences

[I - K] K. Inoue and T. Kaneto, A Jones type invariant of links in the product space of a surface and the real line, J. of Knot Theory and Its Rami. 3 (1994) 153-161.

[N.Kamada] N. Kamada, The crossing number of alternatin link diagrams on a surface, Knots'96 (Proceedings of the fifth international research institute of Mathematical Society of Japan), World Scientific, Singapore (1997) 377-382.

[kane 1] 金戸武司、Alternating link diagrams on surfaces, 研究集会「結び目のトポロジー」(東京女子大学) 報告集（谷山公規氏編）、1999年2月

[kane 2] 金戸武司、Tait type theorems on alternating links in thickened surfaces, "Knot Theory" - Dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday - (edited by M. Sakuma), (2000), 148 - 156

[kane 3] 金戸武司、A dual state lemma for link diagrams on surfaces, 研究集会「結び目のトポロジーIII」(東京女子大学) 報告集（谷山公規氏編）, 2001年２月