

Multi-variable polynomials and partial writhes of links in thickened surfaces

- 厚み付き曲面における多変数多項式係数リンク不変量と部分ライズ -
(会田 真人氏との共同研究)

筑波大学数学系 金戸武司 (kaneto@math.tsukuba.ac.jp)

1. 目的

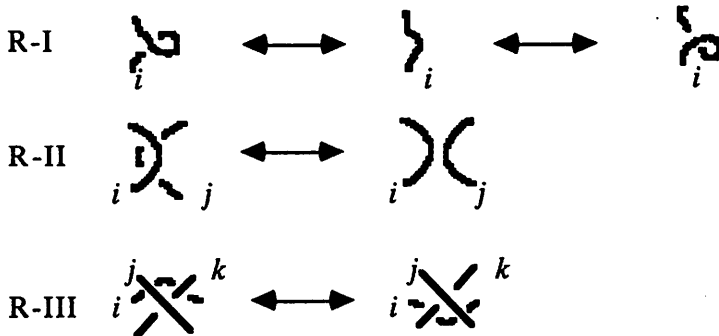
連結な有向曲面 Σ は境界を持たないとする。厚み付き曲面と同相である $\Sigma \times \mathbf{R}$ における有向リンク L の ambient isotopy による同値に関する不変量 $F_L(A)$ (Jones 多項式の厚み付き曲面版 cf. [I-K]) は A に関する Laurent 多項式係数の自由加群 $\Lambda(\Sigma)$ (cf. [I-K]) の元である。多変数 Alexander 多項式のように成分数を反映した $F_L(A)$ の係数多項式が多変数化を試み、より高い判別能力をもつ同値不変量を求めることを目的とした。(以下、リンクはすべて $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内とし、又、便宜上 $\Sigma = \Sigma \times 0$ と看做し $\Sigma \subset \Sigma \times \mathbf{R}$ とする。)

2. 結果

結果を述べるために必要な用語等を定義しておく。

定義 1. 2つの順序付き有向 n -成分リンク $L = K_1 \cup \dots \cup K_n, L' = K'_1 \cup \dots \cup K'_n$ について恒等写像と isotopic な同相写像 $h: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R}$ で向きを含めて $h(K_i) = K'_i$ ($1 \leq i \leq n$) を満たすものが存在するとき、 L と L' は (ambient isotopy) 同値であるといい、 $L \equiv L'$ と表す。

リンクは射影 $p: \Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma$ に関する (Σ 上の) リンクダイアグラムとして表せる。下図のような順序付き (有向) リンクダイアグラムの局所的な変形を順序 (と向き) を保つ Reidemeister move という。但し、 $1 \leq i, j, k \leq n$ とし、向きは略した。



又、 $i > j$ である R-II を R-II'、 $i > j > k$ である R-III を R-III'、更に $i = k \neq j$ でない R-III を R-III'' と表す。

基本的事実 2つの順序付き有向リンクダイアグラムが表す $\Sigma \times \mathbf{R}$ 内のリンクが同値であるための必要十分条件はこれら2つリンクダイアグラムが有限回の R-I, II, III 変形で互いに移りあえることである。

以下、リンクはリンクダイアグラムで与えられているものとして扱う。

定義 2. 各成分が自然数 $1, 2, \dots, n$ によりラベル付けられた m -成分 ($m \geq n$ も可) 非有向リンクダイアグラム L に対し、**bracket** $\langle L \rangle$ を次のルールで定める: (i ($1 \leq i \leq n$) はラベルとする。)

- (1) $\langle \emptyset \rangle = 1$ (空集合 \emptyset もリンクダイアグラムと看做す)
- (2) $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A_i \langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \rangle + A_i^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \rangle$
- (3) $\langle \bigcirc_i \cup L \rangle = (-A_i^2 - A_i^{-2}) \langle L \rangle$ (\bigcirc_i は $L (= \emptyset$ も可) と no crossing な自明なノットダイアグラム)

参考. ルール (1) を $\langle \bigcirc_i \rangle = 1$ とするとルール (3) より

$$\langle \bigcirc_i \bigcirc_j \rangle = (-A_i^2 - A_i^{-2}) \langle \bigcirc_j \rangle = -A_i^2 - A_i^{-2}, \quad \langle \bigcirc_i \bigcirc_j \rangle = (-A_j^2 - A_j^{-2}) \langle \bigcirc_i \rangle = -A_j^2 - A_j^{-2}$$

となり $i \neq j$ のとき welldefined 性を損なう。

定義 3. (部分ライズ (writhe)) 順序付き有向 n -成分リンクダイアグラム $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ に対し、各交点 c における符号 $sign(c)$ を $sign(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}) = +1$ 、 $sign(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}) = -1$ と定めるとき、

- 1) $w_i(L)$ を成分 K_i 自身の交点の符号の総和、
- 2) $w_{i,j}(L)$ を成分 K_i と成分 K_j ($i \neq j$) の交点で K_i の部分弧が上道であるものについての符号の総和、更に、 $w_{i,j,+}(L) := w_{i,j}(L) + w_{j,i}(L)$, $w_{i,j,-}(L) := w_{i,j}(L) - w_{j,i}(L)$ と定める。

定義 4. 各成分が自然数 $1, 2, \dots, n$ によりラベル付けられた m -成分 ($m \geq n$ も可) 非有向リンクダイアグラム L (以後、略して *-リンクダイアグラムという) について、

- (1) i) 異なるラベルをもつ成分の交点において小さい番号の成分の部分弧が常に上道であるとき L は単調である、
- ii) L が同じラベルの成分 (複数有り得る) 同士の間 (1つの成分における self-crossing も含む) をもたないとき L は単純である

という。

(2) Σ 上のリンクダイアグラムの上下関係を保つ Σ における ambient isotopy による変形を R-0 とし、 Λ を環とする。

- i) ${}_n \tilde{L}_\Sigma := \{L \text{ の R-0, R-II', R-III' による同値類} \mid L \text{ は自明な成分をもたない単調かつ単純な } (\Sigma \text{ 上の}) * \text{-リンクダイアグラム}\}$ 、
- ii) ${}_n L_\Sigma := \{L \text{ の R-0, R-II, R-III'' による同値類} \mid L \text{ は自明な成分をもたない単純な } (\Sigma \text{ 上の}) * \text{-リンクダイアグラム}\}$

とするとき、 $\{1\} \cup {}_n \tilde{L}_2$ (resp. $\{1\} \cup {}_n L_2$) で生成される自由 Λ 加群を $\tilde{\Lambda}_n(\Sigma)$ (resp. $\Lambda_n(\Sigma)$) と表す。

定理 1. 順序付き有向 n -成分リンクダイアグラム $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ について、 $1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) に対し

- (1) $w_{i,j}(L), w_{j,i}(L), w_{i,j,+}(L), w_{i,j,-}(L)$ は L が表すリンクの同値不変量であり、
- (2) $w_{i,j,-}(L)$ は交点における上下の入れ換えで不変である。

参考. $\Sigma = \mathbf{R}^2$ のとき定理 1 より $w_{i,j,-}(L) = 0$ 、従って $w_{i,j}(L) = w_{j,i}(L) = \frac{1}{2} w_{i,j,+}(L) = lk(K_i, K_j)$ ($lk(K_i, K_j)$ は linking number) である。

定理 2. 2つの順序付き有向 n -成分リンクダイアグラム $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$, $L' = K'_1 \cup \dots \cup K'_n$ について、 $K_k \equiv K'_k$ ($k=1, \dots, n$) のとき $1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) に対し次が成り立つ。

- (1) $w_{i,j,-}(L) = w_{i,j,-}(L')$ 、
- (2) 次の 1)、2)、3) は同値である：
 - 1) $w_{i,j}(L) = w_{i,j}(L')$ 、
 - 2) $w_{j,i}(L) = w_{j,i}(L')$ 、
 - 3) $w_{i,j,+}(L) = w_{i,j,+}(L')$ 。

定理 3. 順序付き有向 n -成分リンクダイアグラム $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ に対し、異なる成分の交点における上下の入れ換えにより L から得られる単調なリンクダイアグラムを \tilde{L} とする。

1) Λ を A_1, \dots, A_n に関するローラン多項式環とするとき、

$${}_n \tilde{F}_L = {}_n \tilde{F}_L(A_1, \dots, A_n) := \left(\prod_{i=1}^n (-A_i^3)^{-w_i(L)} \langle \tilde{L} \rangle \right) \in \tilde{\Lambda}_n(\Sigma),$$

2) Λ を $A_1, \dots, A_n, A_{i,j}, A_{j,i}$ ($1 \leq i < j \leq n$) に関するローラン多項式環とするとき、

$${}_n \tilde{\mathbf{F}}_L = {}_n \tilde{\mathbf{F}}_L(A_1, \dots, A_n, A_{i,j}, A_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n} := \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{w_{i,j}(L)} A_{j,i}^{w_{j,i}(L)} \right) {}_n \tilde{F}_L \in \tilde{\Lambda}_n(\Sigma)$$

と定めると、 ${}_n \tilde{F}_L, {}_n \tilde{\mathbf{F}}_L$ は L の表すリンクの同値不変量である。

定理 4. 前定理 3 において L の単調化 \tilde{L} を用いずに、

1) のとき、 ${}_n F_L = {}_n F_L(A_1, \dots, A_n) := \left(\prod_{i=1}^n (-A_i^3)^{-w_i(L)} \langle L \rangle \right) \in \Lambda_n(\Sigma)$ 、

2) のとき、 ${}_n \mathbf{F}_L = {}_n \mathbf{F}_L(A_1, \dots, A_n, A_{i,j}, A_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n} := \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j}^{w_{i,j}(L)} A_{j,i}^{w_{j,i}(L)} \right) {}_n F_L \in \Lambda_n(\Sigma)$

と定めると、 ${}_n F_L, {}_n \mathbf{F}_L$ はリンクダイアグラムの R-I, II, III" 変形に対し不変である。従って、 L の表すリンクの ambient isotopy による同値より細かい制限付きの ambient isotopy による同値に関する不変量とみなせる。

3. 定理の証明の概略

証明の詳細については[A]を参照されたい。以下、概略を紹介する。

[1] 定理1について

(1) は各部分ライズが順序(と向き)を保つ Reidemeister move R-I, II, III 変形で不変であることが確かめられることから。

(2) L の1つの交点 c における上下の入れ換えで得られるリンクダイアグラムを L' とすると、 c が K_i と K_j の交点でなければ定義より $w_{i,j}(L) = w_{i,j}(L')$ 、 $w_{j,i}(L) = w_{j,i}(L')$ だから $w_{i,j,-}(L) = w_{i,j,-}(L')$ である。また、 c が K_i と K_j の交点ならば $w_{i,j,-}(L') = w_{i,j}(L') - w_{j,i}(L') = (w_{i,j}(L) \pm 1) - (w_{j,i}(L) \pm 1) = w_{i,j}(L) - w_{j,i}(L) = w_{j,i,-}(L)$ よって、常に $w_{i,j,-}(L) = w_{i,j,-}(L')$ であるから (2) が成り立つ。

[2] 定理2について

(1) 定理1(2)より $w_{i,j,-}(L) = w_{i,j,-}(\tilde{L})$ 、 $w_{i,j,-}(L') = w_{i,j,-}(\tilde{L}')$ 。条件 $K_k \equiv K_k'$ ($k=1, \dots, n$) より $\tilde{L} \equiv \tilde{L}'$ 。よって、定理1(1)より $w_{i,j,-}(\tilde{L}) = w_{i,j,-}(\tilde{L}')$ だから $w_{i,j,-}(L) = w_{i,j,-}(L')$ 。

(2) 定義より4つの部分ライズ $w_{i,j}(L)$ 、 $w_{j,i}(L)$ 、 $w_{i,j,+}(L)$ 、 $w_{i,j,-}(L)$ は任意の2つによって残り2つが定まるから、前(1)より(2)が成り立つ。

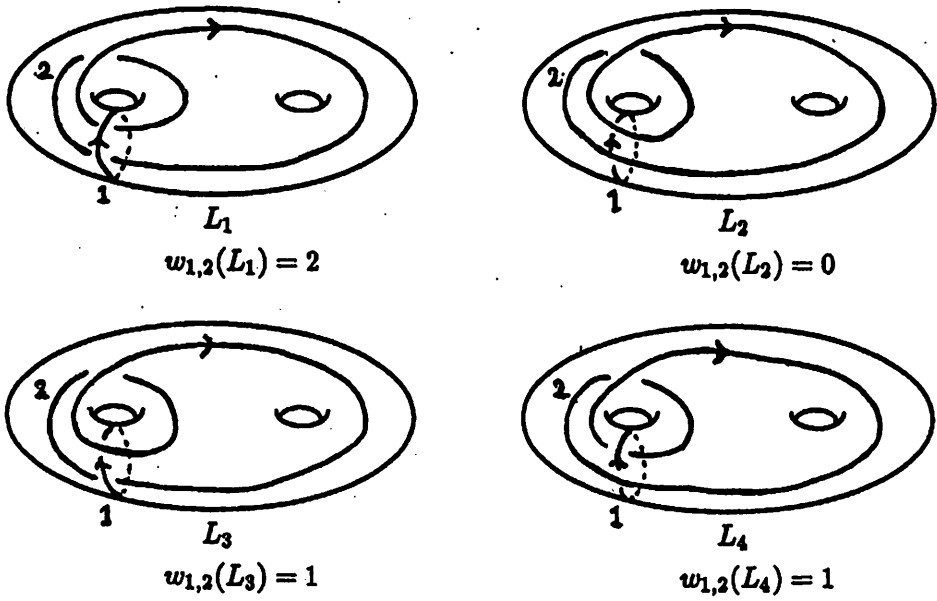
[3, 4] 定理3、4について

" F_L が順序(と向き)を保つ Reidemeister move R-I, II, III" 変形で不変であることが確かめられること及び定理1(1)より定理4が得られる。また、 L が R-III 変形により L' に移るとき、 \tilde{L} は R-III" 変形により \tilde{L}' に移るから定理3 1) が得られ、よって、前と同様に定理1(1)より定理3 2) も得られる。

4. 関連する具体例

具体例について、 $F_L(A)$ や定理で得られたリンク不変量による判別の可否を検討する。

例1. 下図(次頁)のリンクダイアグラム L_1, L_2, L_3, L_4 が表す $\Sigma \times \mathbf{R}$ (Σ : double torus) 内の順序付き有向2-成分リンクについてどの2つも同値ではないことが不変量 $w_{1,2}(L)$ (従って、 ${}_2\tilde{F}_L$) 及び $F_L(A)$ を用いて示される。(参考: $\tilde{L}_1 \equiv \tilde{L}_2 \equiv \tilde{L}_3 \equiv \tilde{L}_4$ より ${}_2\tilde{F}_L$ では区別出来ない。)

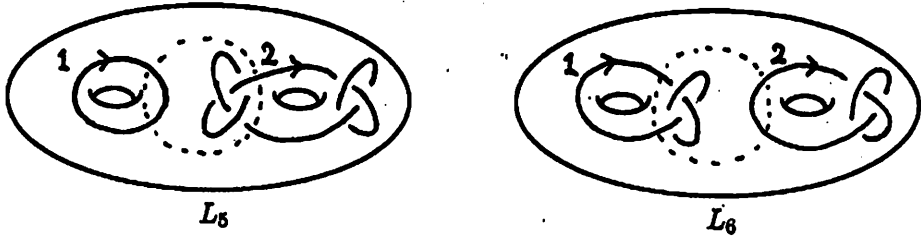


実際、 $w_{1,2}(L)$ の違いから、 L_1, L_2, L_3 の表す順序付き有向リンクについてどの2つも同値ではなく、 L_1, L_2, L_4 についても同様である。 L_3, L_4 について、

$$\begin{aligned}
 F_{L_3}(A) = & -A^6 \langle \text{Diagram 1} \rangle + (-A^4 - A^2) \langle \text{Diagram 2} \rangle - A^4 \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 & - A^2 \langle \text{Diagram 4} \rangle - A^2 \langle \text{Diagram 5} \rangle \\
 F_{L_4}(A) = & -A^2 \langle \text{Diagram 1} \rangle + (-A^8 - 2A^4) \langle \text{Diagram 2} \rangle - \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 & - A^2 \langle \text{Diagram 4} \rangle - A^2 \langle \text{Diagram 5} \rangle
 \end{aligned}$$

より $F_{L_3}(A) \neq F_{L_4}(A)$ 、故に L_3, L_4 の表すリンクは順序なし有向リンクとしてさえも同値でない。

例 2. 下図のリンクダイアグラム L_5, L_6 が表す $\Sigma \times \mathbf{R}$ (Σ : double torus) 内の順序付き有向 2-成分リンクは同値でないことが不変量 ${}_2\tilde{F}_L$ (または ${}_2\tilde{F}_L$) を用いて示される。(参考: L_5, L_6 はミュレーションで移り合えるから $F_L(A)$ では区別出来ない。)



実際、

$${}_2\tilde{F}_{L_5} = (-A_2^{16} + A_2^{12} + A_2^4)^2 \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \text{link} & \text{link} \end{array} \right) \right\rangle$$

$${}_2\tilde{F}_{L_6} = (-A_1^{16} + A_1^{12} + A_1^4)(-A_2^{16} + A_2^{12} + A_2^4) \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \text{link} & \text{link} \end{array} \right) \right\rangle$$

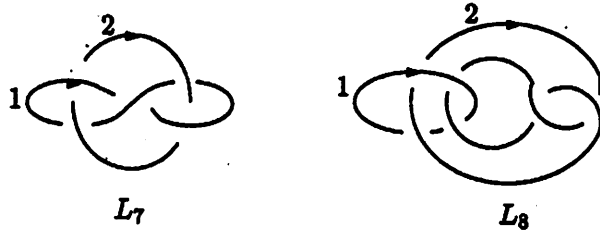
より ${}_2\tilde{F}_{L_5} \neq {}_2\tilde{F}_{L_6}$ である。

参考 L_5 の順序付けを逆にしたものを L_5' とすると

$${}_2\tilde{F}_{L_5'} = (-A_1^{16} + A_1^{12} + A_1^4)^2 \left\langle \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \text{link} & \text{link} \end{array} \right) \right\rangle$$

より ${}_2\tilde{F}_{L_5'} \neq {}_2\tilde{F}_{L_6}$ である。従って、 L_5, L_6 の表すリンクは順序なし有向リンクとしても (ambient isotopy) 同値ではない。

例 3. 下図 (次頁) のリンクダイアグラム L_7, L_8 が表す $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ 内の順序付き有向 2-成分リンクは共にホワイトヘッドリンクで同値である。従って、 L_7, L_8 は順序 (と向き) を保つ Reidemeister move R-I, II, III 変形の有限列で移り合えるがそのようなどんな有限列に対しても $i=k \neq j$ を満たす R-III (=直観的には「中貫き」タイプの R-III) 変形が必ず含まれることが定理 4 によって示される。



実際、

$$\begin{aligned}
 {}_2F_{L_7} &= -A_1^{-3}(A_1 \langle 1 \text{ (diagram) } 1 \rangle) + A_1^{-1} \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle \\
 &= -A_1^{-2} \langle 1 \text{ (diagram) } 1 \rangle + A_1^{-4} \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_2F_{L_8} &= A_2^{-6}(A_2^2 \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle) + \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle \\
 &+ \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle + A_2^{-2} \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle \\
 &= (A_2^{-6} - A_2^{-10}) \langle 1 \text{ (diagram) } \rangle + A_2^{-4}(-A_1^2 - A_1^{-2})(-A_2^2 - A_2^{-2})
 \end{aligned}$$

より ${}_2F_{L_7} \neq {}_2F_{L_8}$ である。よって、定理 4 より上述のことが得られる。

References

[A] 会田真人、厚み付き曲面における多変数リンク不変量と部分ライズ、筑波大学数理物質科学研究科修士論文、(2002)
 [I-K] K. Inoue and T. Kaneto, A Jones type invariant of links in the product space of a surface and the real line, J. of Knot Theory and Its Rami. 3 (1994) 153-161.
 [Kau] L. H. Kauffman, State models and Jones polynomial, Topology 26 (1987) 395-407.