箱根セミナ記録 88 (1988)

Invariants of Heegaard splittings

筑波大学数学系　金戸武司

§1. 序

位相空間の組 $S=(X, V, W, F)$ が $X=V\cup W$, $F=V\cap W$ を満たすとき，これを<u>Xの分解</u>と呼ぼう。組として，同相であるとき，二つの<u>分解は同値</u>であると言う。$i: F\hookrightarrow V$, $j: F\hookrightarrow W$ を包含写像とすると，コホモロジー群の準同型写像 $i^*: H^*(V,\Gamma)\longrightarrow H^*(F,\Gamma)$, $j^*: H^*(W,\Gamma)\longrightarrow H^*(F,\Gamma)$ (Γは係数群) が得られる。これにより群の組 $\mathfrak{G}=(H^*(F,\Gamma), \mathrm{Im}\, i^*, \mathrm{Im}\, j^*)$ を考え，組として同型のとき，<u>同値</u>とすれば，$\mathfrak{G}$の同値類は位相空間の分解Sの同値類の不変量である。このアイデアを Heegaard splittings に適用し，その同値類に対する不変量を得た。係数群Γの役割，被覆空間との関係，ホモロジー群の立場からの言い換え，ホモトピー群の立場からの analogy について順に考察する。

研究集会では以上の見方に至る動機となった被覆空間と Heegaard splittings の関係を中心に発表したが，その後の進展で，より見通しの良い形で扱えることがわかり，この報告になった。

Birman [1] の $\mathbb{Z}$ 係数 symplectic groups の double cosets の議論による不変量もこの観点から眺めるとそのトポロジー的な背景が一層判然とする。但し，議論の対象とする出発点の行列が両者で異なるので，差が生ずる可能性がある。両者の比較も興味ある課題であるが，別の機会に譲ることにする。

§2. cohomological invariant

[1] 一般論 = Heegaard splittings に対する invariant

$\mathcal{S}=(M, V, W, F)$ を 3次元多様体 M の genus g の Heegaard splitting, Γ をアーベル群とする。包含写像 $i: F \hookrightarrow V$, $j: F \hookrightarrow W$ による induced homomorphism $i^*: H^1(V) \to H^1(F)$, $j^*: H^1(W) \to H^1(F)$ (係数群 Γ は省す) により, アーベル群の3組 $\mathbb{G}=(G, G_1, G_2)=(H^1(F), i^*H^1(V), j^*H^1(W))$ を得る。

定義1. 二つの群の組 $\mathbb{G}=(G, G_1, G_2)$, $\mathbb{G}'=(G', G_1', G_2')$ に対し, 同型写像 $f: G \to G'$ で $\{f(G_1), f(G_2)\}=\{G_1', G_2'\}$ (i.e., 1) $f(G_1)=G_1'$ かつ $f(G_2)=G_2'$ or 2) $f(G_1)=G_2'$ かつ $f(G_2)=G_1'$) を満たすものが存在するとき, <u>$\mathbb{G}$ と $\mathbb{G}'$ は同値</u> といい, $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'$ と書く。

定義2. 二つの Heegaard splittings $\mathcal{S}=(M, V, W, F)$, $\mathcal{S}'=(M', V', W', F')$ に対し, 同相写像 $h: M \to M'$ で $\{h(V), h(W)\}=\{V', W'\}$ を満たすものが存在するとき, <u>$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ は同値</u> といい, $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ と書く。

定理1. 二つの Heegaard splittings $\mathcal{S}=(M, V, W, F)$, $\mathcal{S}'=(M', V', W', F')$ が同値ならば 対応するアーベル群の3組 $\mathbb{G}$ と $\mathbb{G}'$ も同値である。

証明. 1) 同相写像 $h: M \to M'$ は $h(V)=V'$ かつ $h(W)=W'$ とする。$h(F)(=h(\partial V)=\partial V')=F'$ より, $h^*: H^1(F') \to H^1(F)$ は同型。又, 図1の可換性より $h^* i'^* H^1(V')=(i'h)^* H^1(V')$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "h"] \\ V' \arrow[r, hook, "i'"] & F' \arrow[r, hook, "j'"] & W' \end{tikzcd}$$

図 1

$=(hi)^* H^1(V')=i^* h^* H^1(V')$

$=i^* H^1(V)$, 同様にして,

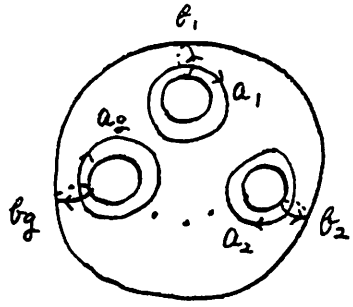
$h^* j'^* H^1(W')=j^* H^1(W)$

よって, $f=h^{*-1}$ とすればよい。

2) $h(V)=W'$ かつ $h(W)=V'$ のときも同様。

〔2〕計算法 = Heegaard diagrams による計算と行列表示

genus g の Heegaard splitting $S=(M, V, W, F)$ に対し，$H_1(F)$ の basis を下図2のように $\mathcal{U}=\{a_1,\dots,a_g, b_1,\dots,b_g\}$ (loops とその homology class を同じ記号で表わす) とする。$\mathbb{b}=\{b_1,\dots,b_g\}$ は W の a complete set of meridian loops でもあるとする。同様に，$H_1(F)$ のもう一つの basis $\mathcal{U}'=\{x_1,\dots,x_g, v_1,\dots,v_g\}$ を $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_g\}$ が V の a complete set of meridian loops となるように取る。$\mathcal{U}$ の各 loop に沿って $\mathcal{V}$ との交点を読んで得られる word をアーベル化すると，$i_*: H_1(F)\to H_1(V)$ を表わす $(g,2g)$ 行列 A を得る。(ここに，$H_1(F)$ の basis を $\mathcal{U}$，$H_1(V)$ の basis を $\mathfrak{X}=\{x_1,\dots,x_g\}$ とし，$H_1(F)$, $H_1(V)$ の元は列ベクトルで表わすと，$H_1(F)\ni \mathbb{y}$ に対し，$i_*(\mathbb{y})=A\mathbb{y}$ である。A は列ベクトルで，$A=(i_*a_1,\dots,i_*a_g, i_*b_1,\dots,i_*b_g)$ と表わせる。) よって，$\mathcal{U}$ の dual basis $\mathcal{U}^*$ を $H^1(F)$ の basis，$\mathfrak{X}$ の dual basis $\mathfrak{X}^*$ を $H^1(V)$ の basis とすれば，$i^*: H^1(V)\to H^1(F)$ を表わす $(2g,g)$ 行列は ${}^tA$ (A の転置行列) である。同様に，$\mathfrak{a}=\{a_1,\dots,a_g\}$ を $H_1(W)$ の basis とすると，$j_*: H_1(F)\to H_1(W)$ を表わす $(g,2g)$ 行列 B は $\mathcal{U}$, $\mathfrak{a}$ の定め方から，$B=(I, O)$ (I: (g,g) 単位行列，O: (g,g) 零行列) である。よって，$j^*: H^1(W)\to H^1(F)$ は dual basis $\mathfrak{a}^*$, $\mathcal{U}^*$ に関して，$(2g,g)$ 行列 ${}^tB=\begin{pmatrix} I \\ O\end{pmatrix}$ で表わせる。$H^1(F)$ の元を basis $\mathcal{U}^*$ に関する列ベクトルで書くことにする。${}^tA$ の列ベクトルで生成される $H^1(F)$ の部分群を $\langle {}^tA\rangle$ と書くと，$i^*H^1(V)=\langle {}^tA\rangle$，$j^*H^1(W)=\langle {}^tB\rangle$ である。$\varphi: H^1(F)\to \Gamma^{2g}$ を $\mathcal{U}^*$ の元を $a_1^*,\dots,a_g^*, b_1^*,\dots,b_g^*$ の順に Γ^{2g} の basis の列ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ に写す cannonical isomorphism により



$W\supset\partial W=F$

図2

$\mathfrak{G}\sim\varphi\mathfrak{G}$。よって φ により 3組 $\mathfrak{G}$ と $\varphi\mathfrak{G}$ を同一視すれば，本質的な情報は Γ 係数の $(2g,2g)$ 行列 $({}^tA, {}^tB)=({}^tA\ \begin{smallmatrix}I\\O\end{smallmatrix})$ (一般には

singular) に集約されているので，必要に応じて，この行列を $\mathbb{G}$ と書くことにする。

定理2. Heegaard splittings $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$, $\mathcal{S}'=(M',V',W',F')$ から得られる群の3組を表わす行列をそれぞれ $\mathbb{G}=({}^tA,{}^tB)$, $\mathbb{G}'=({}^tA',{}^tB)$ （ここに $B=\begin{pmatrix}I\\0\end{pmatrix}$ ）とする。$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が同値ならば，$SL(2g,\Gamma)\ni C$ で $\{\langle C{}^tA\rangle,\langle C{}^tB\rangle\}=\{\langle{}^tA'\rangle,\langle{}^tB\rangle\}$ （$\langle$行列$\rangle$は列ベクトルで生成される Γ^{2g} の部分群，g は $\mathcal{S},\mathcal{S}'$ の genus ）を満たすものが存在する。

証明. 定理1より 同型写像 $f:H^1(F)\to H^1(F')$ で $\{fi^*H^1(V),fj^*H^1(W)\}=\{i'^*H^1(V'),j'^*H^1(W')\}$ となるものが存在する。cannonical isomorphisms $\varphi:H^1(F)\to\Gamma^{2g}$, $\varphi':H^1(F')\to\Gamma^{2g}$ により，$\bar{f}:\Gamma^{2g}\to\Gamma^{2g}$ を $\bar{f}:=\varphi'f\varphi^{-1}$ とすると，

$$\begin{array}{ccc} H^1(F) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma^{2g} \\ \downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow \bar{f} \\ H^1(F') & \xrightarrow{\varphi'} & \Gamma^{2g} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}\{\langle{}^tA\rangle,\langle{}^tB\rangle\}&=\varphi'f\varphi^{-1}\{\langle{}^tA\rangle,\langle{}^tB\rangle\}\\&=\varphi'f\{i^*H^1(V),j^*H^1(W)\}\\&=\varphi'\{i'^*H^1(V'),j'^*H^1(W')\}\\&=\{\langle{}^tA'\rangle,\langle{}^tB\rangle\}。\end{aligned}$$

$\bar{f}$ は同型だから，$\bar{f}=\pm C$ となる $C\in SL(2g,\Gamma)$ が存在し，$\bar{f}\langle{}^tA\rangle=\langle\pm C{}^tA\rangle=\langle C{}^tA\rangle$ （アーベル群 G について，$-G=G$ だから。），$\bar{f}\langle{}^tB\rangle=\langle C{}^tB\rangle$。

参考. $SL(2g,\Gamma)$ に代えて，その部分群 $Sp(2g,\Gamma)$ としても成り立つ。（cf. [1] ）

[3] Heegaard sewings との関係

T を genus g の solid torus とする。T_i $(i=1,2)$ をそのコピーとする。同相写像 $\psi:\partial T=\partial T_2\to\partial T_1=\partial T$ により Heegaard splitting $\mathcal{S}=(T_1\cup_\psi T_2,T_1,T_2,\partial T)$ を得る。このとき，

ψ を $T_1 \cup_\psi T_2$ の Heegaard sewing という。任意の Heegaard splitting は適当な ψ による $\mathcal{S}$ と同値である。二つの Heegaard sewings は対応する Heegaard splittings が同値のとき、同値であるという。$H_1(\partial T)$ の basis $\mathcal{Y}$ を図2（$W=T$ として）と同様に定める。dual basis $\mathcal{Y}^*$; $\mathcal{A}^*$ を $H^1(\partial T)$, $H^1(T)$ の basis とし、それぞれの元を列ベクトルで表わす。Heegaard sewing ψ に対し、$\mathcal{S}=(T_1\cup_\psi T_2, T_1, T_2, \partial T)$ による群の3組 $\mathfrak{G}=(H^1(\partial T), (i\psi^{-1})^* H^1(T), i^* H^1(T))$ （$i:\partial T \hookrightarrow T$: 包含写像）が得られる。$i^*H^1(T)=\langle \mathcal{A}^* \rangle$ （$=\mathcal{N}$ とおく），$(i\psi^{-1})^* H^1(T) = \psi^{-1*} i^* H^1(T) = \psi^{-1*}\mathcal{N}$ だから $\mathfrak{G}=(H^1(\partial T), \psi^{-1*}\mathcal{N}, \mathcal{N})$。前と同様に，canonical isomorphism $\varphi: H^1(\partial T) \to \Gamma^{2g}$ により，$H^1(\partial T)$ を Γ^{2g} と同一視すると，$\mathcal{A}^*$ は $(2g, g)$ 行列 $B=\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ で，ψ^{-1*} は $C \in SL(2g, \Gamma)$ で表わせる。$(2g, g)$ 行列 A, A' で C を block に分けると $C=(A, A')$ で，$\psi^{-1*}\mathcal{A}^*$ は $(CB=)A$ で表わせる。よって $\mathfrak{G}$ の行列表示は $(A, B)=\left(A \begin{smallmatrix} I \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を得る。以上と定理1，2より，次を得る。

定理3. Heegaard sewing $\psi: \partial T=\partial T_2 \to \partial T_1 = \partial T$ による Heegaard splitting $\mathcal{S}=(T_1\cup_\psi T_2, T_1, T_2, \partial T)$ に対応する群の3組は $\mathfrak{G}=(H^1(\partial T), \psi^{-1*} i^* H^1(T), i^* H^1(T))$ で，その行列表示は $\mathfrak{G}=(A, B)$ （$B=\left(\begin{smallmatrix} I \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $SL(2g, \Gamma) \ni C=(A, A')$ は $\psi^{-1*}: H^1(\partial T) \to H^1(\partial T)$ を表わす。g は ∂T の genus.）である。

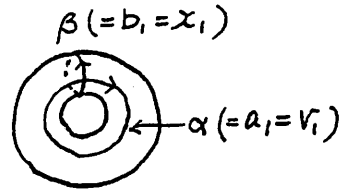
二つの Heegaard sewings ψ, ψ' が同値ならば，$SL(2g, \Gamma) \ni D$ で $\{\langle DA \rangle, \langle DB \rangle\} = \{A', B\}$ となるものが存在する。（(A', B) は ψ' による群の3組 $\mathfrak{G}'$ の行列表示。）

§3. Heegaard splittings の判別と係数群

係数群 Γ が $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ の場合の判別例を示す。Γ が大きければ，$\mathfrak{G}$ によって Heegaard splittings の違いを判別する能力は増す。一方，判別能力は劣るが，例えば Γ が有限（アーベル）群ならば，$SL(2g, \Gamma)$ も有限群だから，$\mathfrak{G}$ の同値性判別アルゴリズムが存在し，計算も易しく実際的である。

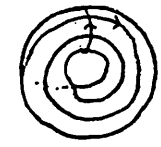
次のHeegaard diagrams D_i ($i=1,2,3,4$) の underlying Heegaard splittings $\mathfrak{S}_i=(M_i, V_i, W_i, F_i)$ の違いを群の3種 $\mathfrak{G}_i$ の行列表示を計算して示す。

例1. $\Gamma=\mathbb{Z}_2$ とする。



$W_1 \supset F_1$

D_1 for $M_1=S^3$



$W_2 \supset F_2$

D_2 for $M_2=P^3$

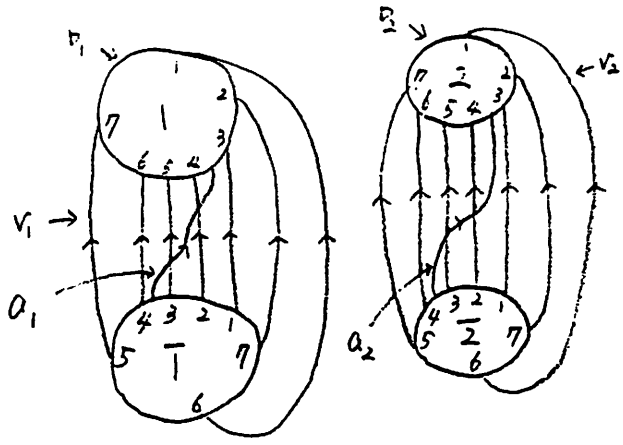
(1) $\mathfrak{G}_1$について。§2の[2]の記号において，$\mathcal{Y}=\{a_1, b_1\}$ (w.r.t. W_1), $\mathcal{Y}'=\{x_1, v_1\}$ (w.r.t. V_1) は $a_1=\alpha$, $b_1=\beta$, $x_1=\beta$, $v_1=\alpha$ だから，$\mathcal{Y}$の各loopに沿って v_1 との交点を読めば，$i_*: H_1(F_1)\to H_1(V_1)$ において，$i_*(a_1)=0$, $i_*(b_1)=x_1$。よって，$\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}(=\{x_1\})$ をbasisとして，$i_*=A_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\leftarrow x_1$。故に，$\mathfrak{G}_1$の行列表示は $\mathfrak{G}_1=({}^tA_1, B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

(2) $\mathfrak{G}_2$について。同様に計算すると，$i_*=A_2=(1,0)$ ($\equiv(1,2)$ mod 2) より $\mathfrak{G}_2=({}^tA_2\, B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

(3) $\mathfrak{G}_1 \not\sim \mathfrak{G}_2$ を示す。$\langle {}^tA_1\rangle \cap \langle B\rangle \approx 0$, $\langle {}^tA_2\rangle \cap \langle B\rangle = \langle B\rangle \approx \mathbb{Z}_2 \neq 0$ 故に $\mathfrak{G}_1 \not\sim \mathfrak{G}_2$。

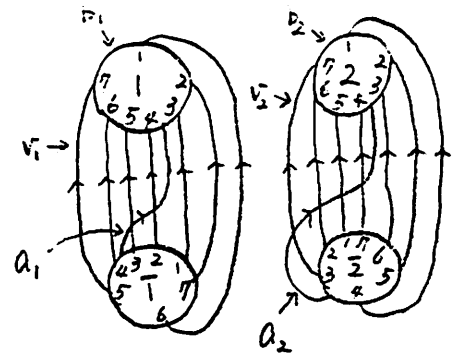
参考. 一般に $\mathfrak{G}=(G, G_1, G_2)$ と $\mathfrak{G}'=(G', G_1', G_2')$ が同値ならば，$G_1\cap G_2 \approx G_1'\cap G_2'$ ($\approx$同型)，$\langle G_1\cup G_2\rangle \approx \langle G_1'\cup G_2'\rangle$ である。

例2. $\Gamma=\mathbb{Z}$ とする。レンズ空間 $L(7,2)\approx L(7,4)$ の連結和 $L(7,2)\#L(7,2)\approx L(7,2)\#L(7,4)$ の genus 2 Heegaard diagrams D_3, D_4 は次図で表わせる。



$W_3 \supset F_3$

D_3 for $L(7,2)\#L(7,2)$



$W_4 \supset F_4$

D_4 for $L(7,2)\#L(7,4)$

(1) G_3 について。行列表示は $G_3=({}^tA_3, B)=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&0&1\\7&0&0&0\\0&7&0&0\end{pmatrix}$。

(2) G_4 について。行列表示は $G_4=({}^tA_4, B)=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&4&0&1\\7&0&0&0\\0&7&0&0\end{pmatrix}$。

(3) $G_3 \not\sim G_4$ を示す。 $G_3 \sim G_4$ として矛盾を示す。

i) $SL(4,\mathbb{Z}) \ni {}^\exists C$ s.t. $C\langle {}^tA_3\rangle = \langle {}^tA_4\rangle$ …① かつ $C\langle B\rangle = \langle B\rangle$ …② とすると、①より $C=\begin{pmatrix}a&c&e&i\\b&d&f&j\\0&0&g&k\\0&0&h&l\end{pmatrix}$、ここに、

$ad-bc=\pm1$, $gl-hk=\pm1$ …③ と書ける。②より

$$C\begin{pmatrix}2\\0\\7\\0\end{pmatrix}=2C\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+7C\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+7e\\2b+7f\\7g\\7h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha\\4\beta\\7\alpha\\7\beta\end{pmatrix}\in\langle {}^tA_4\rangle,$$ よって

$g=\alpha$, $h=\beta$, $2a+7e(=2\alpha)=2g$, $2b+7f(=4\beta)=4h$, mod 7 として $2a\equiv 2g$ …㋑, $2b\equiv 4h$ …㋺。同様に $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=2C\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+7C\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2c+7i\\2d+7j\\7k\\7l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\gamma\\4\delta\\7\gamma\\7\delta\end{pmatrix}\in\langle {}^tA_4\rangle$$ より $k=\gamma$, $l=\delta$, $2c+7i=2k$.

$2d+7j=4l$, mod 7 で、$2c\equiv 2k$ …㋩, $2d\equiv 4l$ …㋥。

㋑×㋥ − ㋺×㋩ より $2(ad-bc)\equiv\delta(gl-hk)\equiv gl-hk$, ③より $\pm2\equiv\pm1$ 矛盾。

ii) $C\langle {}^tA_3\rangle = \langle B\rangle \cdots ①$ より $C\langle B\rangle = \langle {}^tA_4\rangle \cdots ㊂$ とできる。
$C = (\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4)$ と置くと，②より $\mathbb{C}_1 = C\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha\\2\beta\\7\gamma\\7\delta\end{pmatrix} \in \langle {}^tA_4\rangle \cdots ①$.
$\mathbb{C}_2 = C\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\gamma\\2\delta\\7\alpha\\7\beta\end{pmatrix} \in \langle {}^tA_4\rangle \cdots ㊁$。①より $2\mathbb{C}_1 + 7\mathbb{C}_3 = C\begin{pmatrix}2\\0\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\0\\0\end{pmatrix} \in \langle B\rangle$
$\cdots ㈠$，$2\mathbb{C}_2 + 7\mathbb{C}_4 = C\begin{pmatrix}0\\2\\0\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w\\x\\0\\0\end{pmatrix} \in \langle B\rangle \cdots ㊂$。①,㊁,㈠,㊂より
$1 = |C| = |\mathbb{C}_1 + 3\mathbb{C}_3, \mathbb{C}_2 + 3\mathbb{C}_4, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4| = |\mathbb{C}_1 + 3\mathbb{C}_3, \mathbb{C}_2 + 3\mathbb{C}_4,$
$2\mathbb{C}_1 + 7\mathbb{C}_3, 2\mathbb{C}_2 + 7\mathbb{C}_4| = \begin{vmatrix} * & * & u & w \\ * & * & v & x \\ \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & w \\ v & x\end{vmatrix}$，よって

$\begin{vmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{vmatrix} = \pm 1$，$\begin{vmatrix} u & w \\ v & x\end{vmatrix} = \mp 1 \cdots ③$，とこうで，①,㊁,㈠,㊂より mod 7
で $4\alpha \equiv u$，$\beta \equiv v$，$4\gamma \equiv w$，$\delta \equiv x$，よって $4\begin{vmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u & w \\ v & x\end{vmatrix}$。
③より $\pm 4 \equiv \mp 1$ となり矛盾。

§4. 被覆空間との関係 （係数群 $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ のとき.）

位相空間 X 上の被覆写像 $p_i : X_i \to P$ $(i=1,2)$ に対し，$p_1 = p_2 h$ となる同相写像 $h : X_1 \to X_2$ が存在するとき，<u>p_1 と p_2 は同値</u> といって，$p_1 \sim p_2$ と書く。p_1 の同値類を $[p_1]$ と書く。

Heegaard splitting $\mathcal{S} = (M, V, W, F)$ に対し，V, W, F 上の 2重被覆写像の同値類の全体の集合をそれぞれ $\mathcal{P}(V)$, $\mathcal{P}(W)$，$\mathcal{P}(F)$ とする。包含写像 $i : F \hookrightarrow V$，$j : F \hookrightarrow W$ による自然な単射 $i_* : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(F)$ $(i_*([p : \hat{V} \to V]) = [p|p^{-1}(F) : p^{-1}(F) \to F])$，$j_* : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(F)$ がある。よって，$\mathcal{S}$ に対し，3組 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(F), i_*\mathcal{P}(V), j_*\mathcal{P}(W))$ が定まる。3組 $\mathcal{P}$ に対し，組としての全単射により<u>同値</u>関係を入れると，$\mathcal{P}$ の同値類は $\mathcal{S}$ の同値類の不変量である。

定理4. Heegaard splittings $\mathcal{S} = (M, V, W, F)$，$\mathcal{S}' = (M', V', W', F')$ による被覆写像に関する3組をそれぞれ，$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ とする。$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が同値ならば，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ も同値。

証明. 同相写像 $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ において，$h : F \to F'$ は自然な全単射 $h_* : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F')$ $(h_*([p : \hat{F} \to F]) = [hp : \hat{F} \to F'])$ を引起し，$\{h_* i_* \mathcal{P}(V), h_* j_* \mathcal{P}(W)\} = \{i'_* \mathcal{P}(V'), j'_* \mathcal{P}(W')\}$ である。

注。$\mathcal{P}$を2重被覆写像以外のクラス（例えば，n重被覆写像，アーベリアン被覆写像，すべての被覆写像等の各クラス）で定義しても成り立つ。

2重被覆写像による$\mathcal{P}$は$\Gamma=\mathbb{Z}_2$のときの$\mathbb{G}$と自然な対応がある。

定理5. Heegaard splitting $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$に対し，2重被覆写像による3組を$\mathcal{P}=(\mathcal{P}(F), i_*\mathcal{P}(V), j_*\mathcal{P}(W))$，係数群$\Gamma=\mathbb{Z}_2$によるコホモロジー群の3組を$\mathbb{G}=(H^1(F), i^*H^1(V), j^*H^1(W))$とすると，3組の全単射$f:\mathcal{P}\to\mathbb{G}$が存在する。

証明. $\mathcal{P}(F)\ni{}^\forall[p]$，$p:\tilde{F}\to F$に対し，$\tilde{F}$が連結のとき，$\mathrm{Im}\,p_\#\ (=p_\#\pi(\tilde{F}))$は$\pi(F)$の位数2の部分群だから，$\pi(F)/\mathrm{Im}\,p_\#\approx\mathbb{Z}_2$。よって全射準同型写像$\bar{p}:\pi(F)\to\mathbb{Z}_2$（$\mathrm{Ker}\,\bar{p}=\mathrm{Im}\,p_\#$）が一意的に定まる。$\tilde{F}$が連結でないとき，$\mathrm{Im}\,p_\#=\pi(F)$だから，$\bar{p}:\pi(F)\to\mathbb{Z}_2$（$\bar{p}(\pi(F))=0$）が定まる。よって全単射$f_1:\mathcal{P}(F)\to\mathrm{Hom}(\pi(F),\mathbb{Z}_2)$（$f_1([p])=\bar{p}$）を得る。$\mathbb{Z}_2$はアーベル群だから，全単射$f_2:\mathrm{Hom}(\pi(F),\mathbb{Z}_2)\to\mathrm{Hom}(H_1(F),\mathbb{Z}_2)$が存在する。自然な同型写像$f_3:\mathrm{Hom}(H_1(F),\mathbb{Z}_2)\to H^1(F)\ (=H^1(F,\mathbb{Z}_2))$により，全単射$f:=f_3f_2f_1:\mathcal{P}(F)\to H^1(F)$を得る。§2の図2のように，$H_1(F)$，$H_1(W)$のbasisをそれぞれ$\mathcal{B}$，$\mathcal{A}$ととり，そのdual basises $\mathcal{B}^*$ for $H^1(F)$，$\mathcal{A}^*$ for $H^1(W)$を用いると，$j_*:H_1(F)\to H_1(W)$において，$j_*(b_k)=0$（$k=1,\dots,g$）より$j_*\mathcal{P}(W)\ni{}^\forall[p]$に対して，$f([p])\in H^1(F)$のbasis $\mathcal{B}^*$による1次結合のb_k^*（$k=1,\dots,g$）の係数が0になることから，$f([p])\in j^*H^1(W)$，又逆に$j^*H^1(W)\ni{}^\forall y$はb_k^*（$k=1,\dots,g$）の係数が0の一次結合で表わせることから，$f^{-1}y\in j_*\mathcal{P}(W)$となり，$f(j_*\mathcal{P}(W))=j^*H^1(W)$を得る。同様にして，$f(i_*\mathcal{P}(V))=i^*H^1(V)$を得る。

§5. homological aspect

§2 でのコホモロジー群を用いた議論はホモロジー群の立場からも論ずることができ，本質的に同等であることを示す。Heegaard splitting $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$ に対して，対 (V,F)，(W,F) に関する（Γ係数）ホモロジー完全系列を用いて，ホモロジー群の3組 $\mathbb{G}_*=(H_1(F),\partial_* H_2(V,F),\partial_* H_2(W,F))$ $(=(H_1(F),\mathrm{Ker}\, i_*,\mathrm{Ker}\, j_*))$ が定義できる。次は容易。

定理6. Heegaard splitting $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$ によるホモロジー群の3組 $\mathbb{G}_*=(H_1(F),\partial_* H_2(V,F),\partial_* H_2(W,F))$ の同値類は $\mathcal{S}$ の同値類の不変量である。

$\mathbb{G}$ と $\mathbb{G}_*$ の関係について次が成り立つ。

定理7. Heegaard splitting $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$ によるホモロジー群の3組 $\mathbb{G}_*=(H_1(F),\partial_* H_2(V,F),\partial_* H_2(W,F))$ はコホモロジー群の3組 $\mathbb{G}=(H^1(F),i^*H^1(V),j^*H^1(W))$ と同値である。

証明. 対 (V,F)，(W,F) の（コ）ホモロジー完全系列と双対定理から，下図の（符号を除いて）可換な図式を得る。ここに，↓はすべて同型写像である。よって，$\partial_*\mu\cap$ は $\mathbb{G}_*$ と $\mathbb{G}$ は組としての同型写像を与える。

$$\begin{tikzcd}
H^1(V) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\mu\cap"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^1(F) \arrow[d, "\partial_*\mu\cap"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^1(W) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[d, "\mu\cap"] \\
H_2(V,F) \arrow[r] & H_1(F) & H_2(W,F) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

§6. homotopical aspect

§5 の analogy で，対 (V,F)，(W,F) に対するホモトピー完全系列を用いて，Heegaard splitting $\mathcal{S}=(M,V,W,F)$ に対して F上に基点を定めると，基本群の3組 $\mathbb{G}_\#=(\pi(F),\partial_\# \pi_2(V,F),\partial_\# \pi_2(W,F))$ $(=(\pi(F),$

Ker $i_\#$, Ker $j_\#$)) が得られる。

定理 8. Heegaard splittings $\mathcal{S}=(M, V, W, F)$, $\mathcal{S}'=(M', V', W', F')$ による基本群の3組をそれぞれ, $\mathbb{G}_\#=(\pi(F), \partial_\# \pi_2(V, F), \partial_\# \pi_2(W, F))$, $\mathbb{G}'_\#=(\pi(F'), \partial_\# \pi_2(V', F'), \partial_\# \pi_2(W', F'))$ とする。次は同値である。

(1) $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ は同値

(2) $\mathbb{G}_\#$ と $\mathbb{G}'_\#$ は同値

略証. (1) ⇒ (2) は容易。(2) ⇒ (1) を示す。同型写像 $f: \pi(F) \to \pi(F')$ は $f = h_\#$ となる同相写像 $h: F \to F'$ で実現でき, $\mathbb{G}_\# \sim \mathbb{G}'_\#$ より, 更に同相写像 $h: M \to M'$ に拡張できる。よって $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$。

注。$\mathbb{G}_\#$ をアーベル化すると $\mathbb{G}_*$ が得られ, 定理7より $\mathbb{G}_*$ の dual が $\mathbb{G}$ である。$\mathbb{G}$, $\mathbb{G}_*$ は $\mathcal{S}$ の同値類の完全な情報をもつ $\mathbb{G}_\#$ のアーベル化により情報量を減らす代償として, 計算し易いという便宜を得たものとみなせる。今後の方向として,

① $\mathbb{G}$ の標準形を求めよ。

② $\mathcal{S}$ の stabilization により $\mathbb{G}$ から M の位相不変量を求めよ。

③ $\mathbb{G}_\#$ を調べよ。　等が考えられる。

参考文献

[1] Birman, J.S., On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds, Annals of Mathematics studies, 84 (1975), Princeton University Press.

[2] 金戸武司, Heegaard diagrams and covering spaces, to appear in 箱根セミナ記録'87.