箱根セミナ記録 87 (1987) 43-49

Heegaard diagrams and covering spaces

金戸 武司
(筑波大学数学系)

§1. 序

Mを向き付け可能な3-次元閉多様体とする。Mの Heegaard diagram $D=(M;F,V,W,\mathcal{V},\mathcal{W})$ (F: Heegaard surface, $F=\partial V=\partial W$, $M=V\cup W$, $\mathcal{V}$: Vの meridian disk system, $\mathcal{W}$: Wの meridian disk system)に対して, Mの任意の finite covering space $\widetilde{M}$ の Heegaard diagram $\widetilde{D}$ が自然に得られる。

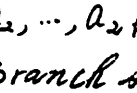
逆に V の finite covering space $\widetilde{V}$ に対して, Mへの拡張として $\widetilde{M}$ を構成することを考えてみたい。簡単のため, 以下 2-fold covering space のみについて考える。無論, 一般には, 必ずしも拡張できない場合が生ずるが, branch を許せば常に存在する(定義1)。又, すべての M上の 2-fold branched covering space $\widetilde{M}$ はこの構成で得られる(定理1)。特に, Dに associated な $\widetilde{M}_D$ (cf. 定義1)として, unbranched か又は branch set が knot (in M) であるものが得られる(定理2)。Dの genus が Mの Heegaard genus (≥ 1)に一致する場合, この knot は non-trivial である(定理3)。これは Heegaard splitting $(M;F)$ が minimal でないことを示すための判定法(系2)を与える。最後に, 今後の課題として関連する問題を提案する(問題1,2,3)。

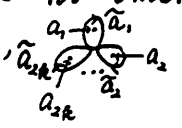
§2. Heegaard diagram による 2-fold branched cover の構成

準備として, 次の命題1,2 があると $\widetilde{D}$ の定義がわかり易い。

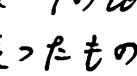
<u>命題1.</u> 2-sphere $S^2 \supset A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2k}\}$ に対し，$P: X \to S^2$ を 2-fold branched cover with a branch set A（但し，X は connected）とする。

1) P は常に存在し，unique up to equivalence.

2) B^3 を 3-ball で，$\partial B^3 = S^2$ とする。$P: X \to S^2$ に対し，その拡張である 2-fold branched cover $P: \bar{X} \to B^3$ で，branch set が B^3 の trivial tangle  （$\Leftrightarrow \bar{X}$ は solid torus of general genus）となるものが有限（$= \prod_{i=1}^{k}(2i-1)$）通り up to equivalence 存在する。

証明. 1) $P|P^{-1}(S^2-A)$ は homomorphism $\varphi: \pi(S^2-A) \to \mathbb{Z}_2$（$\varphi(\hat{a}_i) = 1$, $i=1,2,\cdots,2k$, 

）の $\mathrm{Ker}\,\varphi$ に対応するから unique up to equivalence。よってその completion も然り。

2) trivial tangle に disks を張ったもの  とその copy を cut and paste すれば，$P: \tilde{X} \to B^3$ が構成でき，disks の張り方は up to homeomorphism で，"2k個のものから2個ずつk組選ぶ"選び方，i.e., $\prod_{i=1}^{k}(2i-1)$ 通りである。

<u>命題2.</u> T を solid torus of genus g，$P: X \to \partial T$ を任意の 2-fold <u>un</u>branched cover とする。P に対し，P の拡張である 2-fold (un)branched cover $P: \bar{X} \to T$ で，$\bar{X}$ が solid torus of genus $2g-1$ となるものが常に存在する。

証明. $\mathfrak{M} = \{m_1, m_2, \cdots, m_g\}$ を T の任意の meridian disk system とする。$i=1,\cdots,n$ に対し，$P^{-1}(\partial m_i)$ は 1本の loop $\partial \tilde{m}_i$，$i=n+1,\cdots,g$ に対し，$P^{-1}(\partial m_i)$ は 2本の loops $\partial \tilde{m}_i'$，$\partial \tilde{m}_i''$ とする。X に $\partial \tilde{m}_i$（$i=1,\cdots,n$）及び $\partial \tilde{m}_i'$，$\partial \tilde{m}_i''$（$i=n+1,\cdots,g$）に沿って，それぞれ 2-disks $\tilde{m}_i$（$i=1,\cdots,n$）及び $\tilde{m}_j'$，$\tilde{m}_j''$（$j=n+1,\cdots,g$）を張り，$\tilde{m}_i$ が m_i の 2-fold branched cover になり，$\tilde{m}_j' \cup \tilde{m}_j''$ が m_j の

2-fold unbranched cover になるように P を $X \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{m}_i) \cup \{\bigcup_{j=n+1}^{g} (\tilde{m}_j' \cup \tilde{m}_j'')\}$ に拡張する．各 $\tilde{m}_i$，$\tilde{m}_j'$，$\tilde{m}_j''$ に厚みをつけて，P が $\partial T \cup (\bigcup_{k=1}^{g} N(m_k))$（ここに $N(m_j)$ は regular nbd of m_k in T）上の 2-fold branched cover となるように拡張する。$Cl.(T - \bigcup_{k=1}^{g} N(m_k))$（Cl. closure）は 3-ball で，その境界の 2-sphere 上に $2n$ 個の点を branch set とする 2-fold branched cover が構成されているから，命題1.2) により この 3-ball 上の 2-fold branched cover に拡張でき，求める $P : \bar{X} \to T$ をうる。

<u>定義</u>．$D = (M; F, V, W, \mathcal{v}, \mathcal{w})$ を Heegaard diagram of genus g for M（$g \geq 1$，$F = \partial V = \partial W$: Heegaard surface，$M = V \cup W$，$\mathcal{v}$: meridian disk system of V，$\mathcal{w}$ も同様）とする。V を $\mathcal{v}$ で切り開き，その copy と対応する切り口で適当に張り戻すと，2-fold unbranched cover $P : \tilde{V} \to V$（$\tilde{V}$: connected）が得られる（張り戻し方は $2^g - 1$ 通り）。$P^{-1}(F) = \tilde{F}$ とすると P を $\tilde{F}$ に制限して，2-fold cover $P : \tilde{F} \to F$ を得る。命題2の構成法を $T = W$，$\mathfrak{m} = \mathcal{w}$ として適用すると，拡張 $P : \tilde{W} \to W$ を得る（この拡張の仕方は高々 $\prod_{i=1}^{g} (2i-1)$ 通り up to equivalence）。即ち，$\tilde{M} = \tilde{V} \cup \tilde{W}$ として，2-fold branched cover $P : \tilde{M} \to M$（unbranched となることもあるが，便宜上これも含めて考えることにする）を得る。これを 2-fold branched cover of M associated with D といい，$P_D : \tilde{M} \to M$ と書く。P_D の定め方は一意的ではないが，有限（実際，高々 $(2^g - 1) \prod_{i=1}^{g} (2i-1)$ 通り up to equivalence）である。

性質．P_D の branch set $B(P_D)$ は構成法から，$B(P_D) \neq \phi$ ならば，W 内の link で，$B(P_D) \cap w_i = \{\text{a point}\}$ or ϕ（但し $\{w_i \mid i = 1, \cdots, g\} = \mathcal{w}$）である。

例1. $M = L(3,1)$ (lens space), $D = (M; F, V, W, \{v_i\}, \{w_i\})$ を

とすると, $P_D : \widetilde{M} \to M$ は一意的 up to equivalence で, $\widetilde{M} \approx L(3,2)$ $(\approx L(3,1))$ ($\approx$ homeomorphic to)

§3. P_D (= 2-fold branched cover associated with D) の性質

定理1. (普遍性) l を link in M とする。l を branch set とする任意の M 上の 2-fold branched cover $P : \widetilde{M} \to M$ に対し, 適当な M の Heegaard diagram D が存在し, $P \sim P_D$ ($\sim$: equivalent to) である。

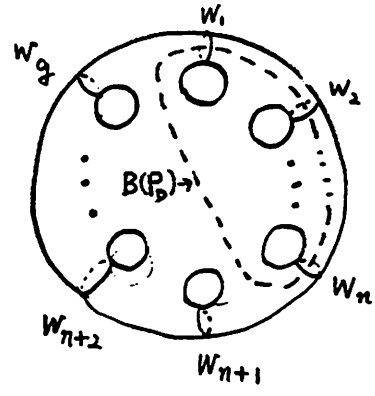
証明. K を M の triangulation で, K の subcomplex L は $|L| = l$ を満すとする。K の 1-skelton K^1 の regular nbd $N(|K^1|)$ を W とし, $V = Cl.(M - W)$ とすると $M = V \cup W$ で Heegaard splitting が得られる。$\mathcal{V}$ を V の任意の meridian disk system, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_g\}$ を W の meridian disk system で, $w_i \cap l = \phi$ or $\{a\ point\}$ for any $i = 1, \dots, g$ を満たすものとする。$F = \partial V$, $D = (M; F, V, W, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ とする。$P|P^{-1}(V) : P^{-1}(V) \to V$ に対し, $P^{-1}(V - \mathcal{V})$ をみれば, P_D の定義における $P_D : \widetilde{V} \to V$ で $P \sim P_D$ w.r.t. V となるものが構成でき, 更に, $P_D : \widetilde{W} \to W$ も $P \sim P_D$ w.r.t. W となるように構成できる。

上の証明中のことから, P_D の定義において次がわかる。

系1. P_D の定義は up to equivalence で $\mathcal{V}$ の取り方に依らない。

<u>定理</u>2. Mの任意のHeegaard diagram D (of genus ≥ 1) $=(M; F, V, W, v, w)$ 及び任意の2-fold unbranched cover $P_D : \widetilde{V} \to V$ に対し，$P_D : \widetilde{M} \to M$ で，branch set $B(P_D) = \phi$ or knot となるものが常に存在する。

証明．P_Dの定義において，後半で命題2を用いる際，$n=0$ なら，$B(P_D)=\phi$ となり，$n \geq 1$ なら，$P_D : \widetilde{W} \to W$ として，$W \supset B(P_D)$ を下図のようにとればよい。



$W \supset B(P_D)$

<u>定理</u>3. Mの Heegaard genus を g_M (≥ 1) とする。Dを Heegaard diagram of genus g_M for M, $P_D : \widetilde{M} \to M$ を 2-fold branched cover associated with D で $B(P_D) = K$ が knot in M であるとすると，Kは non-trivial in M。

証明．もし Kが trivial in M とすると，$\widetilde{M} \approx M \# M$ (#: connected sum) だから，Haken により $g_{\widetilde{M}} = 2g_M$。ところで，$\widetilde{M}$ は $\widetilde{M} = \widetilde{V} \cup \widetilde{W}$ により genus $2g_M - 1$ の Heegaard splitting をもつから矛盾。

これは次のように言い換えられる。

系2. 定理3と同じ仮定で, $B(P_D)$ が trivial knot in M ならば Heegaard splitting $(M;F)$ は not minimal。

§4. 関連する話題と問題

一般に, M 内の link に対しては必ずしも, それを branch set とする 2-fold branched cover は存在しない.

例2. $M = S^1 \times S^2 \supset S^1 \times \{a\ point\} =: K$ に対し, $B(P) = K$ となる 2-fold branched cover $P : \tilde{M} \to M$ は存在しない。

次はよく知られている。

命題3. $M \supset L$: link, L homologous to 0 ならば, 2-fold branched cover $P : \tilde{M} \to M$ で $B(P) = L$ となるものが存在する。

命題3の逆は一般には成り立たない。(cf. 例1)。例1, 2 は P_D の考え方を用いると状況が具体的にわかる。

最後に, 2-fold branched cover $P : \tilde{M} \to M$ に関する問題を上げて置こう。

問題1. $P : \tilde{M} \to M$ を 2-fold branched cover とすると, $g_M \leq g_{\tilde{M}}$ か。(g_M : M の Heegaard genus)

問題2. M を homology 3-sphere, D を M の任意の Heegaard diagram とする。2-fold branched cover associated with D $P_D : \tilde{M} \to M$ で, $\tilde{M}$ も又 homology 3-sphere となるものが常に存在するか。

問題3. 問題2で "homology" を "homotopy" にすると

どうか。

参考：問題3は肯定的なら，Poincaré conjecture を含む。

References

[1]. Birman, J.S.: Heegaard splittings, diagrams and sewings for closed orientable 3-manifolds. Lecture notes for CBMS conference at Blacksburg, Oct. 8-12, 1977.

[2]. Morgan, J.W. and Bass, H.: The Smith Conjecture. 1984. Academic Press.