

HAKONE SEMINAR 23 (2007) 15-25.

## 結び目の補空間の理想四面体分割

蒲谷祐一

### 1. イントロダクション

Thurston の有名な Lecture Note[5] において 8 の字結び目の補空間の理想四面体分割 (ideal triangulation) が与えられた。Thurston はこの理想四面体分割を利用して 8 の字結び目の補空間に有限体積完備双曲構造が入ることを示した。(双曲構造が入ることは Riley によりすでに知られていたと思う。) Mowtow 剛性により有限体積完備双曲構造はただひとつしか存在しないが、完備性をはずすと双曲構造の変形が可能である。この双曲構造の変形を完備化することにより新たに双曲多様体を得られる場合がある。これは双曲 Dehn 手術理論として知られている。

この手法を任意の絡み目の補空間に対しても行いたい。絡み目の補空間を位相的に理想四面体分割し、各理想四面体に双曲構造がちゃんと入ることを示せば双曲 Dehn 手術の理論は 8 の字結び目でない場合にも成立し、Neumann-Zagier により詳細に研究されている。SnapPea[6] は (位相的) 理想四面体分割が与えられると各理想四面体に双曲構造が入るかどうかを数値的に計算してくれる。そこで第一段階として絡み目の補空間を (位相) 理想四面体分割することが問題となる。本報告では以下、理想四面体分割は位相的なものとする。後に理想多面体分割という言葉も定義するがこれは位相的なもので Epstein-Penner 分解のようなりーマン幾何学的な分解ではない事を注意しておく。

まず理想四面体分割の存在についてはすでに知られていることを述べておく。理想四面体分割の双対をとると special spine が得られる。逆に special spine の双対は理想四面体分割である。任意の 3次元多様体に対して special spine の存在が示されているので、理想四面体分割の存在も知られている [1]。

存在定理はあるわけだが一般に理想四面体分割を構成するのはかなり難しい。SnapPea は与えられた絡み目のプロジェクションに対してその補空間の理想四面体を与えるアルゴリズムを実装している。([6] の triangulations.c を参照。[7] にも解説されている。) この方法は四面体の数が大きくなりすぎてしまい不便である。そこで SnapPea ではこの理想四面体分割を簡略化するアルゴリズムを備えている。この簡略化の方法は非常に優れていて、たとえば  $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目の補空間をたった 3 つの四面体からなる理想四面体分割にしてしまう。

本報告では与えられた絡み目の理想四面体分割の方法をあたえる。前述のように存在定理もありアルゴリズムも存在するのでこの仕事の意義はほとんどない。しかしながら本報告で示す方法は SnapPea のアルゴリズムより (人間にとって) 実行するのが楽である。また Wirtinger 表示との関係も示せるのでほんの少しは意義があると思う。

最後に Petronio もまた理想四面体分割の方法を与えていることを述べておく [4]、[1]。Petronio の方法も人間の手で実行可能なものである。

### 2. 理想四面体分割

2.1.  $K$  は 3 単体の有限集合  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$  を各 3 単体の境界の 2 単体をペアで張り合わせたものとする。構成法からひとつの単体の頂点が  $K$  の中で 1 点になる場合も

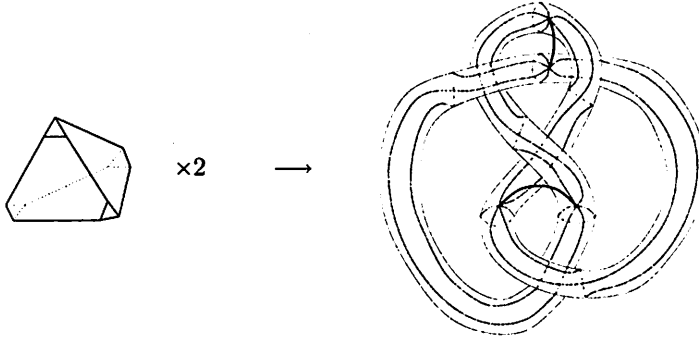


FIGURE 1. 理想四面体分割の例：8の字結び目

ありうることを注意しておく。 $K - N(K^{(0)})$ が $M$ に同相であるとき、 $K$ は $M$ の(位相的)理想四面体分割(ideal triangulation)であると言う。 $(K^{(i)})$ は $K$ の $i$ -スケルトンを表す。) Figure 1は8の字結び目の補空間の理想四面体分割を模式的に表したものである。見やすいように各3単体の頂点を切り取ってある。切り取られた面たちは境界のトーラスの3角形分割を与える。 $K - N(K^{(1)})$ はハンドルポディーに同相で $K$ の各1単体は2-ハンドルとみなせる。よって理想四面体分割は $M$ のハンドル分解を与える。

2.2. 理想多面体分割を次のように定義する。 $P$ を3次元ボールとする。 $C$ を $\partial P$ の(有限)CW分解とする。 $C$ の0セルを頂点、1セルを辺、2セルを面と呼ぶ。 $P$ の各面を $x_{i,+}$ と $x_{i,-}$ 記す。特に面の数は偶数個であるとする。 $a_i$ を同相写像 $x_{i,+} \rightarrow x_{i,-}$ とする。 $(a_i$ は胞体写像であるとする。つまり $x_{i,+}$ の頂点を $x_{i,-}$ の頂点に、辺を辺に移す写像であるとする。)  $P$ を $a_i$ で同一視したものを $X$ と書く。

定義 2.1.  $(P, C, a_i)$ が $M$ の理想多面体分割であるとは $X - N(X^{(0)})$ が $M$ に同相であることとする。

我々は絡み目の補空間をまず理想多面体分割し、それをさらに四面体に分割することにより理想四面体分割を構成する。

2.3. 理想四面体分割の時と同様に $X - N(X^{(1)})$ はハンドルポディーに同相である。 $x_{i,+}$ と $x_{i,-}$ を $X$ の中で同一視したものを $D_i$ と書くことにする。すると $D_i$ はこのハンドルポディーのメリディアン・ディスクを与える。 $P$ の中に基点 $p$ を固定する。基点 $p$ から $D_i$ を $x_{i,+}$ から $x_{i,-}$ の方向に交わり $p$ に戻るループを $x_i$ と書く。 $x_i$ は $M$ の基本群の生成元とみなせる。また $X$ の各1-単体は基本群の関係式を与えることがわかる。よって理想多面体分割は $M$ の基本群の表示を与える。

### 3. 補空間のハンドル分解

$L$ を $S^3$ の中の絡み目とする。交点数が $n$ の $L$ のプロジェクトションをひとつ固定する。各アークに対応するWirtinger表示の生成元を $x_i$ と置く。 $S^3$ を $\mathbb{R}^3$ の1点コンパクト化とみなす。 $B_+ = \{(x, y, z) | z \geq 0\}$ 、 $B_- = \{(x, y, z) | z \leq 0\}$ とおく。また $S_0 = \{(x, y, z) | z = 0\}$ とおく。ここで $L$ を適当に変形することにより $S^+ \cap L$ が $n$ 本のアークになるようにできる。 $S^3 - N(L)$ は $S^+ \cap N(L)$ に2-ハンドルを $n$ 個着けたものに同相である。これは $S^3 - (N(L) \cup B^2)$ に同相である。このハンドル分解においてひとつの2-ハンドルを取り除くと $S^3 - N(L)$ のハンドル分解が得られる。すなわち $S^+ \cap L$ のハンドル分解が得られる (Figure 2)。

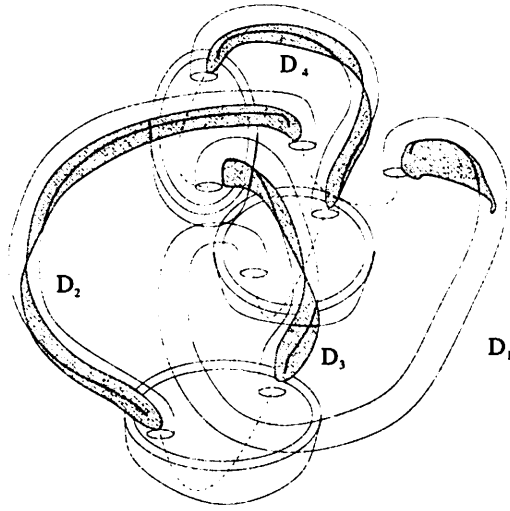


FIGURE 2.  $S^3 - N(L)$  のハンドル分解

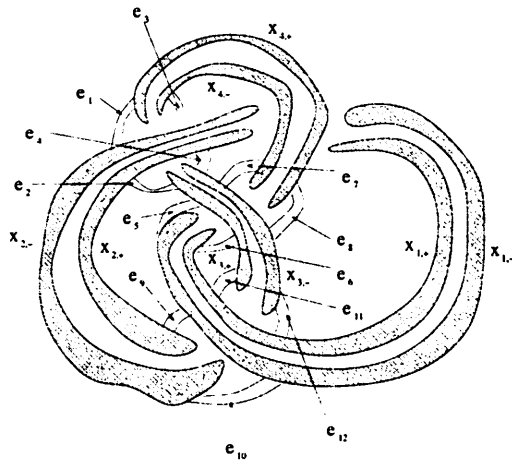


FIGURE 3.  $S^3 - N(L)$  の理想多面体分割

ここでアーク  $B_+ \cap L$  を  $z$  方向に  $S_0$  へ射影することによりディスク  $D_i$  が得られる。 $S^3 - N(L)$  を  $D_i$  で切り開くと3次元ボールが得られる。すなわち  $D_i$  はメリディアン・ディスクを与える。 $D_i$  で切り開いた後の面を  $x_{i,+}$ ,  $x_{i,-}$  と置く。Wirtinger 表示の生成元  $x_i$  は  $D_i$  と1点で交わるが、 $x_i$  の入ってくるほうを  $x_{i,+}$ 、出て行くほうを  $x_{i,-}$  と置く。切り開いた図を Figure 3 に示す。

各2-ハンドルの接着写像の像は  $D_i$  で切り開かれた後、4つの長方形になる。これらを  $e_j$  と置く。ここで次の条件を満たすと仮定する。

仮定1  $S_0 - \{x_{i,+}, x_{i,-}, e_j\}_{i,j}$  の各連結成分が可縮であるとする。

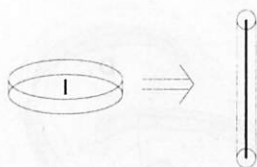


FIGURE 4. 2-ハンドルを“1 単体”にする。

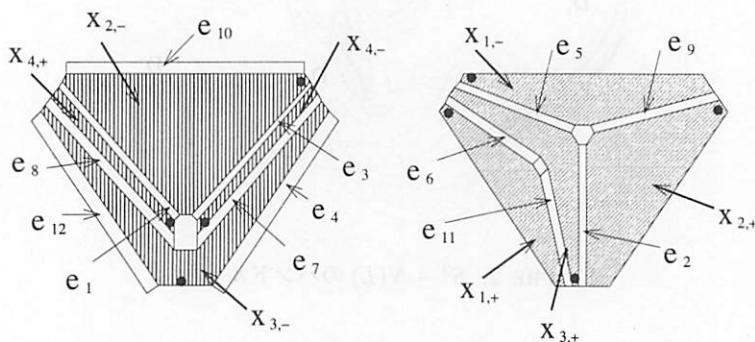


FIGURE 5.  $S_0$  のセル分割の展開図。両方の周囲を張り合わせる事により  $S^2$  上の多面体分割になる。  $x_{i,+}$  と  $x_{i,-}$  は黒点が一致するように張り合う。

$S_0 - \{x_{i,+}, x_{i,-}, e_j\}_{i,j}$  を頂点、各 2-ハンドルのコアを 1 単体、  $x_{i,\pm}$  を面と思うことにより  $S^3 - N(L)$  の理想多面体分割を得る。すなわち各 2-ハンドルを“細長く”する事により理想多面体分割を得る (Figure 4)。このとき Figure 3 の 2-ハンドルの接着面の (4 つの) 切片は細長くなり面  $x_{i,\pm}$  と  $x_{j,\pm}$  をつなぐ辺になる (Figure 5)。

#### 4. 双対グラフ

4.1. Figure 5 の図は多面体としてわかりやすいが描きにくい。そこで双対の図を描くことにする。理想四面体分割の各面を頂点、辺を (双対な) 辺と思うことによりグラフが得られる。これを双対グラフとよび  $G$  で記す。Figure 3 の場合は Figure 6 のようになる。仮定 1 の可縮性の条件は双対グラフが連結であることと同値である。グラフの各頂点に面の張り合わせを指定するマークを付けておくことにする (Figure 6 の図では黒丸どうしが一致するように面の張り合わせを指定している)。

4.2. 次に双対グラフ  $G$  から 2-ハンドルを読み取る方法を述べる。まず  $G$  のある辺からスタートする (各辺は 2-ハンドルの一部であった)。  $G$  の頂点に入ったら対応する面の張り合わせに対応する辺へ移る。このとき  $x_{i,+}$  から  $x_{i,-}$  に移った場合には  $x_i$  を読む。  $x_{i,-}$  から  $x_{i,+}$  に移った場合には  $x_i^{-1}$  を読む。このようにして元の辺まで戻るまで続ける。結果として対応する 2-ハンドルが与える関係式が読み取れる。Figure 7 では ((1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (4) の順で)  $x_2^{-1}x_1^{-1}x_3x_1$  となり Wirtinger 表示の関係式が現れる。

4.3. 次に理想多面体の面を細分する方法を与える。理想多面体の面は双対グラフ  $G$  において頂点に対応している。  $n$ -価頂点には  $n$  角形が対応することが定義からわかる。ここで各  $n$ -価頂点を Figure 8 のように 3 価頂点に細分することができる。この

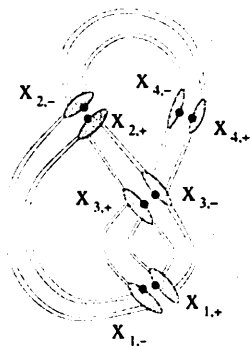


FIGURE 6. 理想多面体の面を縮めたもの

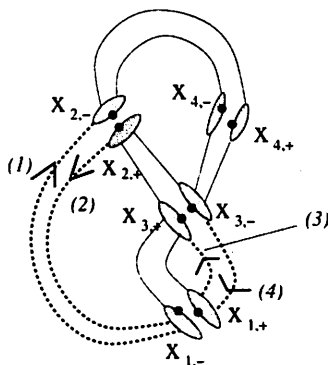


FIGURE 7. 2-ハンドルの読み取り方。黒丸どうしが張り合うことに注意して辺を追っていく。この場合  $x_2^{-1}x_1^{-1}x_3x_1$  となる。

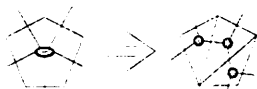


FIGURE 8.  $n$  角形の細分。対応する面が張り合うようにして行う。

操作を行うとき、この面と張り合う面の細分が一致するように行わなければならない。元の  $n$  角形のラベルを  $x_{i,\pm}$  とする。新たにできた生成元を  $x_{i,\pm}^{(k)}$  のように記す。各面  $x_{i,\pm}^{(k)}$  同士をつなぐ辺が新たに加わった 2-ハンドルに対応している。(この操作はハンドル分解の言葉を用いれば stabilization をしたことになる。)

4.4. これまでのことを用いると双対グラフが簡単に書けることがわかる。Figure 3 の図において各面を頂点に“集中”させることにより双対グラフ  $G$  が得られる (Figure 6)。プロジェクションが交替的でない場合には Figure 9 のように細分をする事により各交点に  $G$  の頂点を割り当てることにする。

以上の操作は次のように簡単に行うことができる。

- (1) 各交点に 4 個の頂点を置く。
- (2) プロジェクションの各アークに沿って辺を結ぶ。

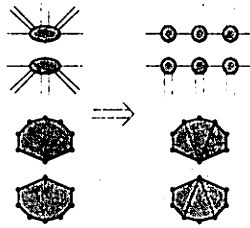


FIGURE 9. 交代的でない場合、細分を用いて各交点に頂点が1つ対応するようにできる。

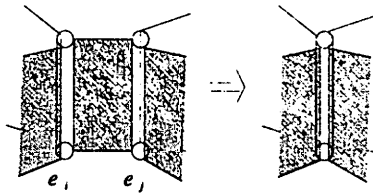


FIGURE 10. 2角形の消去。

(3) できた双対グラフから2-ハンドルをひとつ取り除く。(2-ハンドルの読み方はすでに4.2で述べた。)

例として Figure 14 のはじめの3つの部分をあげる。

### 5. 理想多面体を理想四面体に分割する

理想多面体分割の各面が3角形ならば理想多面体を理想四面体に分割することにより理想四面体分割が得られる。しかし8の字結び目の例が示すように、このようにして得られた理想多面体の面は2角形や4角形以上の面を含むことがわかる。4角形以上を取り除くには細分すればよく、これは前節で扱った。ここでは2角形の取り除く方法を述べる。さらに分割を簡単にする方法を述べる

5.1. 二角形を消す。理想多面体の2角形は双対グラフ上で2価頂点に対応する。ここでこの頂点につながる2つの辺を  $e_i$ 、 $e_j$  と書く。次の仮定の下この2角形(とペアになっている2角形)を消去することができる。

仮定2  $e_i$  と  $e_j$  は異なる2-ハンドルに属する。

このとき2角形を消去することは Figure 10 に対応する。

5.2.  $G$  の2角形を消す。 $G$  の  $n$ -角形とは  $S_0 - G$  で  $n$  のこの頂点を含む領域のことをいう。(この領域は理想多面体の頂点に対応している。) Figure 11 の左上のグラフが  $G$  の2角形である。ここでは  $G$  の2角形を消去する方法を述べる。以下方法を述べるが、言葉で書くと説明が煩雑になるので Figure 11 を参照して欲しい。 $G$  の2角形を構成する各  $G$  の頂点は細分をする事により3価に頂点にしておく。この2つの頂点を  $x_{i,e_i}$ 、 $x_{j,e_j}$  と置く。ここで  $\epsilon_i, \epsilon_j \in \{+, -\}$  と置いた。各頂点は  $G$  の2角形に含まれない別の  $G$  の辺を持つ。これらを  $e_i$  と  $e_j$  と置く。

仮定3  $e_i$  と  $e_j$  は異なる2-ハンドルに属する。

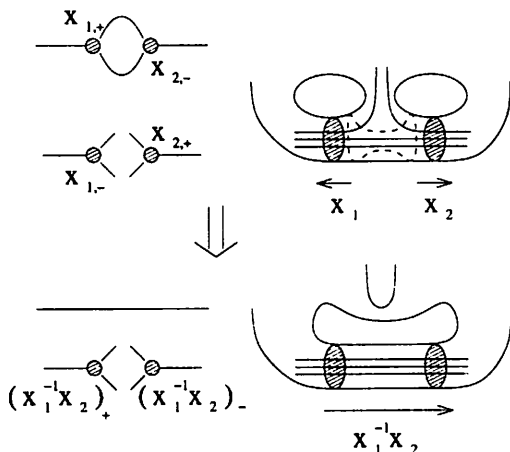


FIGURE 11.  $G$  の 2 角形を消す。

この仮定の下  $G$  の 2 角形が取り除けることを示す。  $x_{i,e_i}$ 、  $x_{j,e_j}$  にはそれぞれ張り合う面  $x_{i,-e_i}$ 、  $x_{j,-e_j}$  が存在する。ハンドル・ボディーの中での  $x_{i,\pm e_i}$ 、  $x_{j,\pm e_j}$  を  $D_i$ 、  $D_j$  と記す。ハンドル・ボディーの中で  $D_i$  と  $D_j$  は互いに 2 つの 2-ハンドルの一部と交わる (この 2 つの 2-ハンドルの一部は  $G$  の 2 角形の辺にあたる)。この 2 つの 2-ハンドルの一部と  $D_i$  と  $D_j$  の境界によって張られる長方形が存在する。この長方形と  $D_i$  と  $D_j$  の境界の和集合に対して近傍をハンドル・ボディーの境界上で取る。その近傍の境界はと 3 つの円周からなる。これらのうちの 1 つは  $e_i$ 、  $e_j$  のそれぞれと 1 点で交わる。仮定 3 によりこれらは異なる 2-ハンドルに属しているため、ハンドルの消去ができる。ハンドルの消去をした後の図が Figure 11 の下部である。

5.3. 理想四面体に分割. これまでの方法を用いて理想多面体の面を 3 角形にしておく。ここで理想四面体の 1 頂点から cone をとることにより理想四面体分割を構成できる。双対グラフにおいては頂点は  $S_0 - G$  に対応する。cone を取る頂点を  $\mathbb{R}^2$  上で外側にとると大変見やすい。このとき双対グラフ  $G$  の双対をとると外側に面していない  $G$  の頂点に対応して 3 角形の面が対応していることがわかる (Figure 14 最下部)。cone をとるとこれらの 3 角形の上に 4 面体が現れることがわかる。これにより  $G$  の外側に面していない頂点の数が理想四面体分割の四面体の個数になる。

5.4. ここまでの操作を Figure 12 に示す。また Figure 13 に生成元に対応する面の張り合わせを示す。

## 6. 例

今までのプロセスを  $6_2$  結び目に対して行ったものが Figure 14 である。念のためこれまでのプロセスをまとめておく。

- (1) 絡み目のプロジェクションの絵をかく (左上)。
- (2) 双対グラフを作る (右上)。
- (3) 2-ハンドルを 1 つ取り除く (左中)。
- (4) 2 角形を取り除き、4 角形を 3 角形に細分する (右中)。
- (5) 双対グラフの 2 角形を取り除く (左下)。
- (6) 双対グラフの双対をとる (右下)。

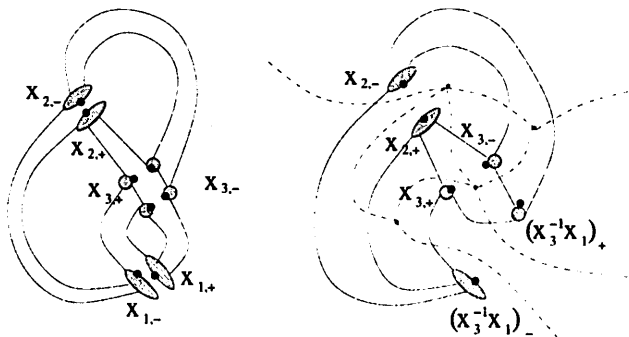


FIGURE 12. 8 の字結び目の補空間の場合。

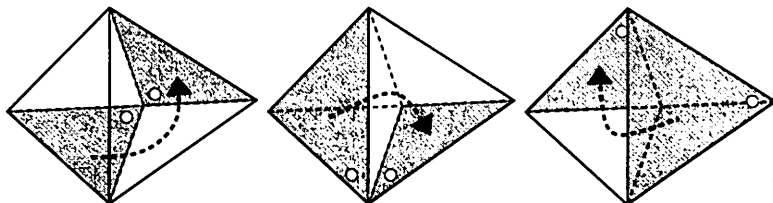


FIGURE 13. 左からそれぞれ  $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_3^{-1}x_1$  の元を表す面の張り合わせ。

### 7. WIRTINGER 表示との関係

この節では 8 の字結び目を例にとって Wirtinger 表示との対応を示す。まずはじめに Wirtinger 表示から

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_4 x_2 x_4^{-1} x_1^{-1} = x_2 x_4 x_2^{-1} x_3^{-1} = x_3 x_4 x_3^{-1} x_1^{-1} = x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = 1 \rangle.$$

が得られる。次にひとつの 2-ハンドルを取り除くことにより関係式をひとつ取り除ける。

$$= \langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_2 x_4 x_2^{-1} x_3^{-1} = x_3 x_4 x_3^{-1} x_1^{-1} = x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = 1 \rangle$$

次に 2 角形を取り除く (今の場合  $x_{4,\pm}$  に対応)。

$$= \langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_4 = x_2^{-1} x_3 x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3, x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = 1 \rangle$$

$$= \langle x_1, x_2, x_3 | x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3^{-1} x_1 x_3 = 1 \rangle.$$

次に双対グラフ  $G$  の 2 角形を取り除く。

$$= \langle x_2, x_3, x_3^{-1} x_1 | (x_3^{-1} x_1) x_2 x_1^{-1} = x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 (x_3^{-1} x_1) x_3 = 1 \rangle$$

$$= \langle x_2, x_3, x_3^{-1} x_1 | (x_3^{-1} x_1) x_2 (x_3^{-1} x_1)^{-1} x_3 = x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 (x_3^{-1} x_1) x_3 = 1 \rangle.$$

最後の関係式は双対グラフからも読み取ることができる。それぞれ 2 つの辺に対応する 2-ハンドルから得られる関係式になっている。

### 8. $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現

最後に  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現について簡単に述べる。理想四面体分割の利点として基本群の  $PSL(2, \mathbb{C})$  表現の空間を簡単にパラメトライズできる点がある。残念ながらこの辺の話についての文献があまりない。出版されているものだと [8] に簡単に書いて



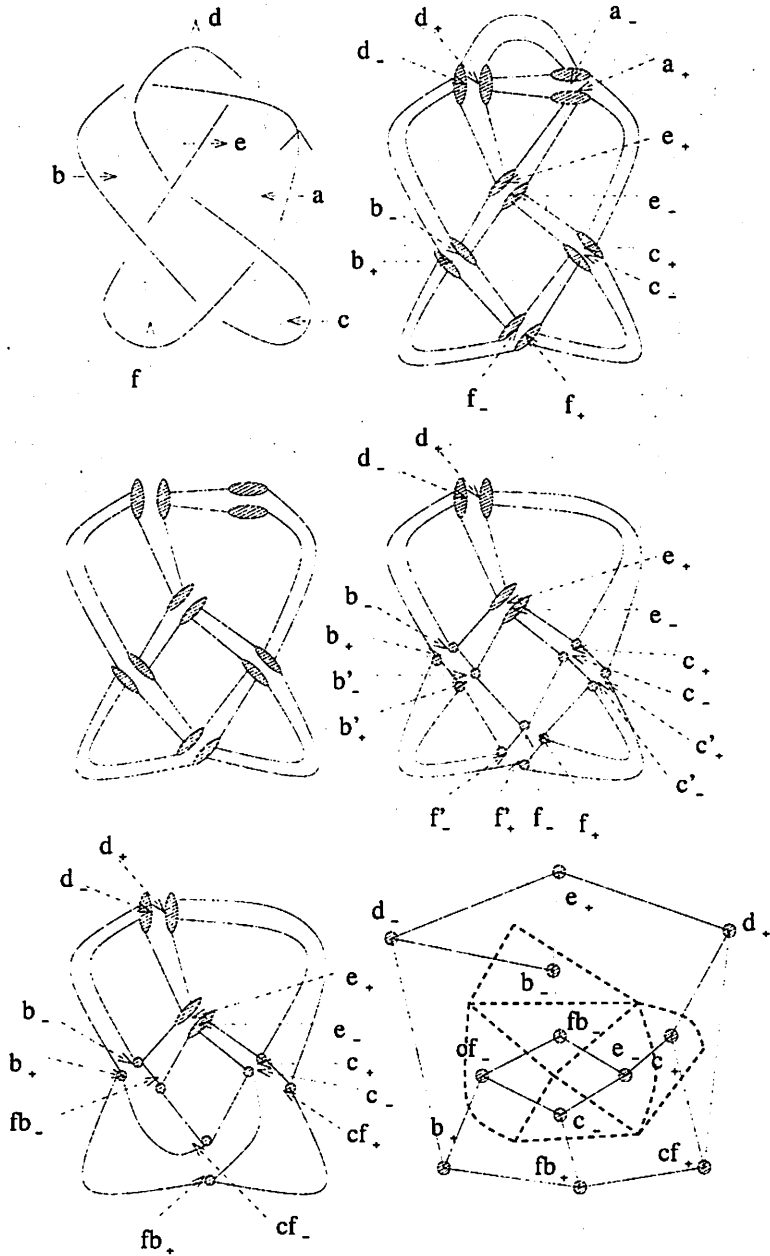


FIGURE 14.  $6_2$  結び目の補空間の理想四面体分割。6つの四面体に分割された。

ある。未出版でよければ [2] が良い参考文献である。理想四面体の複素数によるパラメータ付けについては [5]、[3]、[1] などに詳しい。以下トーラスが境界の 3 次元多様体を  $M$ 、その理想四面体分割を  $K$  と置く。

各理想四面体に複素数のパラメータを入れておくと各理想四面体を  $\mathbb{H}^3$  の中に実現できる。各辺に対して複素パラメータが対応するが、 $K$  の各 1 単体に対応していくつかの辺のパラメータが集まる。これらの積が 1 に等しいという式

$$\prod_{\nu=1}^n (z_\nu)^{p_{i,\nu}} \left(\frac{1}{1-z_\nu}\right)^{p'_{i,\nu}} \left(1-\frac{1}{z_\nu}\right)^{p''_{i,\nu}} = \prod_{\nu=1}^n (-1)^{p''_{i,\nu}} (z_\nu)^{r'_{i,\nu}} (1-z_i)^{r''_{i,\nu}}$$

は gluing equation などと呼ばれている。この方程式が  $K$  の各 1 単体で満たされるとき developing map  $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$  が構成できる。この developing map に対応した holonomy として  $M$  基本群の  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現が構成できる。 $M$  の基本群の元  $\gamma$  に対応した  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元を求めるには  $\gamma$  の  $\tilde{M}$  へのリフトを取り、 $\gamma$  に沿って理想四面体を  $\mathbb{H}^3$  に実現していけばよい。始点を含む理想四面体から終点を含む理想四面体への  $\mathbb{H}^3$  中での写像として  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元が得られる。次の補題を用いれば面の張り合わせに対応した生成元に  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元を具体的に割り当てることで表現が構成できる。

補題 8.1.  $(a_1, a_2, a_3)$  と  $(b_1, b_2, b_3)$  を  $\mathbb{C}P^1$  の異なる 3 点とする。 $(a_1, a_2, a_3)$  を  $(b_1, b_2, b_3)$  に送る  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元は

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(b_1 - b_2)(b_2 - b_3)(b_3 - b_1)}} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

でかける。ここで

$$\begin{aligned} p_{11} &= a_1 b_1 (b_2 - b_3) + a_2 b_2 (b_3 - b_1) + a_3 b_3 (b_1 - b_2), \\ p_{12} &= a_1 a_2 b_3 (b_1 - b_2) + a_2 a_3 b_1 (b_2 - b_3) + a_3 a_1 b_2 (b_3 - b_1), \\ p_{21} &= a_1 (b_2 - b_3) + a_2 (b_3 - b_1) + a_3 (b_1 - b_2), \\ p_{22} &= a_1 b_1 (a_2 - a_3) + a_2 b_2 (a_3 - a_1) + a_3 b_3 (a_1 - a_2). \end{aligned}$$

特に  $(a_1, a_2, a_3)$  を  $(0, \infty, 1)$  に送る  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元は

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{-(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}} \begin{pmatrix} a_2 - a_3 & a_1(a_3 - a_2) \\ a_1 - a_3 & a_2(a_3 - a_1) \end{pmatrix}$$

で与えられる。

例えば 8 の字結び目の場合の理想多面体の  $\mathbb{H}^3$  へのある実現を Figure 15 で与える。上記の補題を使って計算すると、

$$\begin{aligned} \rho(x_2) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{y(1-x)}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -y(1-x) \end{pmatrix} \\ \rho(x_3) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x(1-y)}} \begin{pmatrix} 1 & -xy \\ 0 & x(1-y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

が基本群の生成元に対応する  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の元になる。

#### REFERENCES

- [1] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xiv+330 pp.
- [2] A. Champanerkar *A-polynomial and Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds*, preprints.
- [3] W.D. Neumann, D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Topology 24 (1985), 307-332.

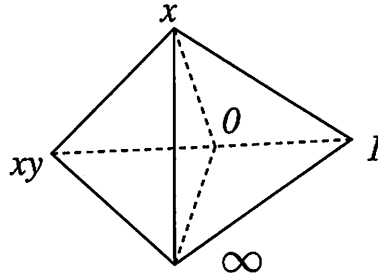


FIGURE 15. 各理想四面体にパラメータを入れ  $S^3$  に置いたもの。

- [4] C. Petronio, *An algorithm producing hyperbolicity equations for a link complement in  $S^3$* , *Geom. Dedicata* 44 (1992), no. 1, 67–104.
- [5] W.P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Mimeographed lecture notes, Princeton University (1977)
- [6] J. Weeks, *SnapPea*, computer program.
- [7] J. Weeks, *Computation of hyperbolic structures in knot theory*, *Handbook of knot theory*, 461–480, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [8] T. Yoshida, *On ideal points of deformation curves of hyperbolic 3-manifolds with one cusp*, *Topology* 30 (1991), no. 2, 155–170.

東京工業大学理工学研究科数学専攻  
*E-mail address:* kabaya@math.titech.ac.jp