

アワビとザイフェルト束の横断性について

石川昌治 (慶應義塾大学経済学部)

1. 序

アワビを S^3 内のホップ束に横断的に置くことができるかという問題 ([5, 問 3.13]) は、フロースパイน์と接触構造の研究 ([4]) を開始した当初から気にしていた問題である。オープンブック分解と接触構造の研究においては、ルジャンドル曲線に沿った 2-handle attaching が Stein fillable な接触多様体の構成に利用される。この 2-handle は 2 変数複素多項式のモース特異点の近傍と見做すことができ、その場合、ルジャンドル曲線はミルナーファイバーのコアに対応する。ミルナー束のモノドロミーは、ホップ束に沿ったベクトル場により与えられるため、ホップ束の位置を理解できると、2-handle attaching の貼り合わせ面や接触構造の framing を読み取ることが可能になる。さらに、この操作は境界の 3 次元多様体におけるホップバンドのプラミングと関連しており、フロースパイน์と接触構造の 1 対 1 対応を与える move を考える際のヒントにもなる。問題自体は非常に素朴で、マニアックな印象が強いが、フロースパイน์と接触構造の研究を進める上では欠かすことのできない要素であると考えている。

フロースパイน์と接触構造の研究を始めた当初、正アワビ¹ をホップ束と横断的な位置に置いた絵を描こうと試みたのだが、うまい絵が描けず断念した。その後、正アワビが重み $(2, 3)$ のザイフェルト束と横断的な位置に置けることなどを教えて頂き、またコイル手術などの経験を積むうちに、実は正アワビをホップ束と横断的な位置に置くことができな
いのでは、と思い始めた。この問題はしばらく棚上げにしていたのだが、今回の箱根セミナー参加を機に真面目に考えることにした。結論としては、正アワビをホップ束と横断的

住所: 〒 223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1 / E-mail: ishikawa@keio.jp

This work is supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C), JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03499, the Grant-in-Aid for Scientific Research (S), JSPS KAKENHI Grant Number JP17H06128 and Keio University Academic Development Funds for Individual Research.

¹頂点が ℓ -型のアワビを正アワビという。

な位置に置くことはできない。より一般に、正アワビをザイフェルト束と横断的な位置に置くかどうかについても部分的な解答が得られたので、それも併せて報告する。

$r \in \mathbb{R}$ に対し、 S^3 上のベクトル場 \mathfrak{X}_r を

$$\mathfrak{X}_r = \left(-y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + r \left(-y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$$

で定める。ここで S^3 は (x_1, y_1, x_2, y_2) を座標とする \mathbb{R}^4 の単位球面とする。実数 r が $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (p と q は互いに素) のとき、このベクトル場が生成するフローの閉軌道たちは S^3 上の重み (p, q) のザイフェルト束を与える。特に、 $r = \pm 1$ のとき、これはホップ束となる。

これまでに次のことが知られている。

- (i) $r > 0$ のとき、 \mathfrak{X}_r が生成するフローは正アワビのフローとホモトピー同値である。逆に $r < 0$ のとき、 \mathfrak{X}_r が生成するフローは正アワビのフローとはホモトピー同値ではない。
- (ii) 正アワビを重み $(2, 3)$ のザイフェルト束と横断的な位置に置く²。
- (iii) \mathfrak{X}_r と $\mathfrak{X}_{\frac{1}{r}}$ は S^3 内の向きを保つ等長変換で移り合う³。

上の (ii) と (iii) から、正アワビは $\mathfrak{X}_{\frac{2}{3}}$ および $\mathfrak{X}_{\frac{3}{2}}$ と横断的な位置に置くことが分かる。以下が本稿の主定理となる。

- 定理 1.1.** (1) $n \in \mathbb{N}$ とする。正アワビを \mathfrak{X}_n および $\mathfrak{X}_{\frac{1}{n}}$ と横断的な位置に置くことはできない。特に、正アワビをホップ束と横断的な位置に置くことはできない。
- (2) $\frac{1}{2} < r < 2$ かつ $r \neq 1$ のとき、正アワビを \mathfrak{X}_r と横断的な位置に置くことができる。
- (3) $r < 0$ のときは、正アワビを \mathfrak{X}_r と横断的な位置に置くことはできない。

2019年の箱根セミナーで発表した時点では、(1)の $n = 1$ の場合のみ証明が完了していた。その後、(2)については石井一平氏により証明が与えられている ([3])。石井氏の証明は S^3 のヘゴードトーラス内にアワビの位置を指定して周期流との交わり数を調べるというものであり、本稿の証明ではアワビに対してヘゴードトーラスの位置を指定して横断

²論文 [1, 2] において、ポアンカレホモロジー球面のフロースパインとザイフェルト構造との対応が与えられている。ポアンカレホモロジー球面のフロースパインはアワビの5重分岐被覆として得られるので、分岐被覆の商写像を考えることで主張 (ii) が従い、主張 (ii) から主張 (i) が従う。論文 [1, 2] の手法をアワビに直接適用すると、論文 [4] におけるアワビとザイフェルト構造の対応の説明になる。主張 (ii) は前回 (2018年) の箱根セミナーで教わったものであり、主張 (i) はだいたい前に古宇田氏から教わったものである。いずれも箱根セミナーでは forklöre (伝承) となっている。

³ (p, q) -トーラス結び目と (q, p) -トーラス結び目がイソトピックであるという話と同じ。

性を調べている．設定の手順が違うだけで，証明の方針自体は概ね同じと思われる．(3) は，上の (i) で述べた事実から従う．本稿では，第2章で記号の準備を行い，第3章で定理 1.1 (1) の証明を，第4章で定理 1.1 (2) の証明を与える．

本稿は，2019年10月の箱根セミナーへの参加を機に書かせて頂いたものです．箱根セミナーでは，発表と有意義なディスカッションの機会を頂きました．世話人の方々，参加者の方々にこの場を借りてお礼申し上げます．

2. 記号の準備

P を正アワビとする． \mathfrak{A}_r を一つ固定し， P を \mathfrak{A}_r と横断的な位置に置けると仮定する．性質 (iii) より，以下では $r \geq 1$ と仮定する． P の DS 図式の面，辺，頂点に図1のようにラベルをつけておく．また辺の向きも図のように定めておく．これはスパインの分岐構造から自然に定まる向きである． f を DS 図式から (S^3, P) を作る際の同一視写像 (identification map) とする．各 $i = 1, 2$ について， $f(R_i^+) = f(R_i^-)$ ， $f(e_i^+) = f(e_i^-) = f(e_i^0)$ が成り立つ．頂点については， $f(v^+) = f(v^-) = f(v_1^0) = f(v_2^0)$ が成り立つ．対応する P の面，辺，頂点を $R_i = f(R_i^+)$ ， $e_i = f(e_i^+)$ ， $v = f(v^+)$ と表すこととする．

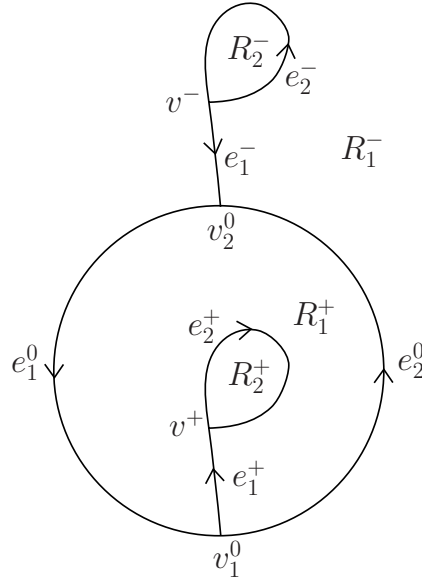


図 1. 正アワビの DS-図式.

フロースパイン P の非特異フロー \mathcal{F} に対し， S^3 上の関数 T_+ を

$$T_+(x) = \inf\{t > 0 \mid \mathcal{F}(x; t) \in P\}$$

で定める. ここで $\mathcal{F}(x; t)$ は点 $x \in S^3$ をフロー \mathcal{F} で流したときの時間 t における位置を表す. さらに $\hat{T}_+(x) = \mathcal{F}(x; T_+(x))$ とする. これはつまり, 点 x を \mathcal{F} で流したときに最初に辿り着く P 上の点である.

3. 定理 1.1 (1) の証明

この章では定理 1.1 (1) を背理法により証明する. 正アワビ P をザイフェルト束と横断的な位置に置けたと仮定する. DS-図式が描かれている 3次元球体 B^3 を単位球体とする. つまり, $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. さらに B^3 をイソトピーで動かして, ベクトル場 \mathfrak{X}_r が $\frac{\partial}{\partial z}$ と平行であると仮定する. このとき, ザイフェルト束の各ファイバーは B^3 内のいくつかの縦線の和集合で表される. 例えば図 2 の左図において, 点 x_1, x_2 が $f(x_1) = f(x'_1)$ および $f(x_2) = f(x'_2)$ を満たすとしたとき, 緑の縦線 γ_1 と γ_2 の和集合は単純閉曲線となり, これらは z 軸に平行なので, ザイフェルト束のファイバーの 1 つということになる.

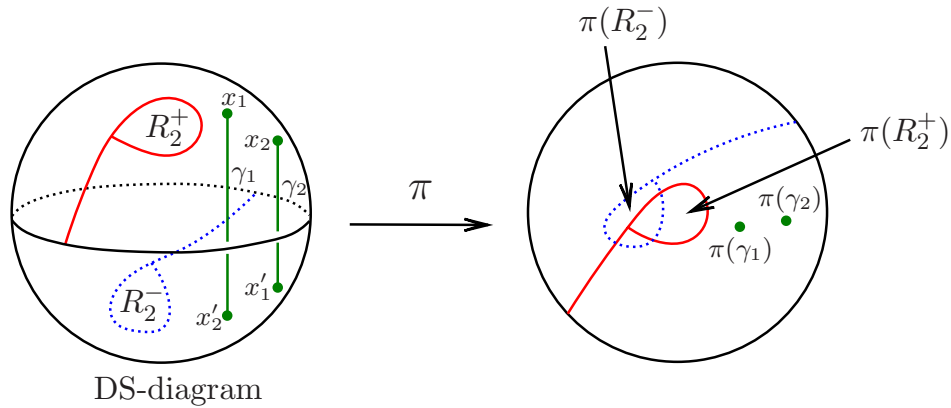


図 2. ザイフェルト束のファイバー.

まず最初に, P の位置を微小変形して, 頂点 v を含むザイフェルト束のファイバーは辺 e_1 の内部とは交わらないと仮定しておく.

面 $R_2 \subset P \subset S^3$ の近傍は図 3 の左図のようになっている. この R_2 の境界の分岐をより深く割いていくことで, 図 3 の右図のように, ザイフェルト束のファイバーとの横断性を保ったまま, 面 R_2 を徐々に小さくしていくことができる. 射影 $\pi: B^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\pi(x, y, z) = (x, y)$ で定める (図 2 の右図を参照). 上述の面 R_2 を小さくする変形は, P のイソトピー変形として実現できる. これを利用して, $\pi(R_2^+) \cap \pi(R_2^-) = \emptyset$ となるように P の位置を調整する.

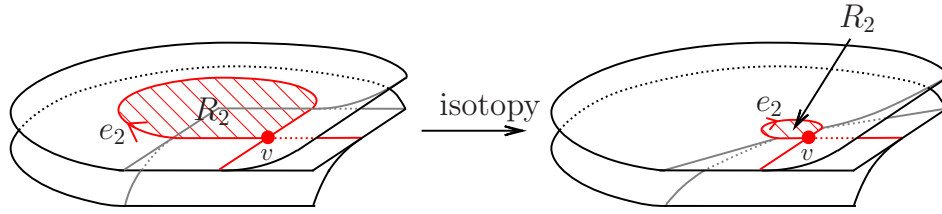


図 3. 面 R_2 を小さくする P のイソトピー変形.

補題 3.1. $r \geq 1$ とする. $r \neq \frac{3}{2}$ の場合, P の \mathfrak{A}_r との横断性を保つイソトピー変形により, P を $\pi(R_2^+) \cap \pi(R_2^-) = \emptyset$ をみたす位置に動かすことができる.

証明. $r \neq \frac{3}{2}$ より, 点 v を通るザイフェルト束のファイバーは三つ葉結び目ではない. 一方で, S^3 内に埋め込まれた正アワビの図から, P と 1 度だけ交わり, その交わりは横断的であり, かつその交点が R_2 上にある単純閉曲線は, 三つ葉結び目しかない. よって, 頂点 v を通るファイバーは v 以外の点に辿り着くことになる. 図 4 の左図で説明すると, P の頂点 v は DS 図式では点 v^+, v^- と E -cycle 上にある 2 点 v_1^0, v_2^0 の計 4 点により表され, v^- をフロー \mathcal{F} で流した到達点を $\hat{T}_+(v^-)$ とすると, $f(\hat{T}_+(v^-)) \neq v$ となる. 記号 \hat{T}_+ を乱用しているが, ご容赦頂きたい. $\hat{T}_+(v) = f(\hat{T}_+(v^-))$ である.

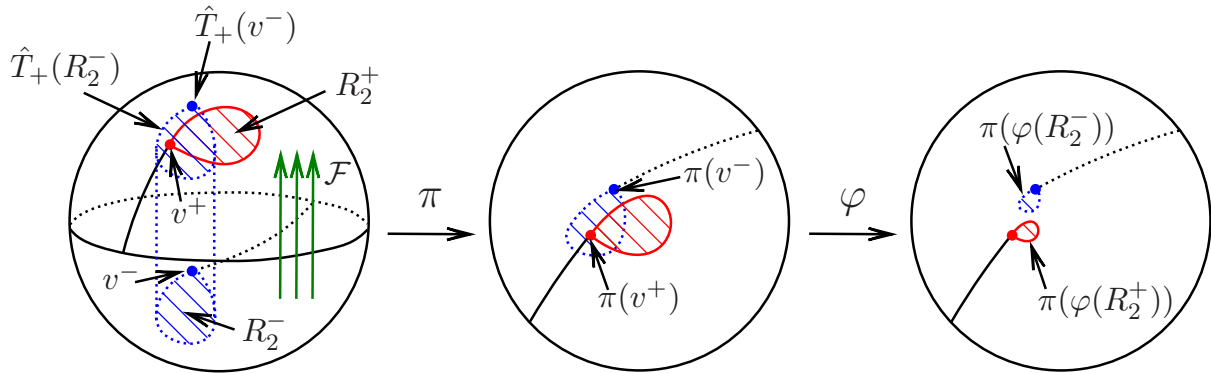


図 4. イソトピー変形 φ .

頂点 v および点 $\hat{T}_+(v) = f(\hat{T}_+(v^-))$ はザイフェルト束の同じファイバー γ 上にあり, かつ, $f(\hat{T}_+(v^-)) \neq v$ である. ここで, 図 3 にある P のイソトピー変形 φ により, R_2 を十分小さくする. この変形は, ザイフェルト束を動かさずに, 面 R_2 の近傍のみで行われる変形である. 変形により R_2 を十分小さくすると, ザイフェルト束の $\varphi(R_2)$ を通るファイバーたちをファイバー γ に十分近づけることができる. 変形 φ はザイフェルト束および

面 R_1 の変形前の部分を動かさないで、 $f(\hat{T}_+(v^-)) \in R_1$ のときは v と $f(\hat{T}_+(v^-))$ の位置関係は動かさない。 $f(\hat{T}_+(v^-)) \notin R_1$ のときは、変形 φ により $\hat{T}_+(v^-)$ がファイバーに沿って少しずれるが、そのずれは R_2 が小さくなるのに比べて十分小さいとしてよい。したがって、DS 図式では、図4の右図のように、 $\pi(v^+)$ と $\pi(v^-)$ の距離を一定以上保ったまま、 $\pi(R_2^+)$ と $\pi(R_2^-)$ が十分小さくなる。よって、 $\pi(\varphi(R_2^+)) \cap \pi(\varphi(R_2^-)) = \emptyset$ となる。 \square

問 3.2. $r = \frac{3}{2}$ のとき、 P を $\pi(R_2^+) \cap \pi(R_2^-) = \emptyset$ をみたす位置に動かすことができるのか？

これは当然無理だと思っていたのだが、よく分からなくなってきた。証明を真面目に考えないといけない感じである。

以下、 P は補題3.1のイソトピー変形を行ったものとする。図5のように、 $D_0 = \pi(R_2^+)$, $D_1 = \pi(R_2^-) = \pi(\hat{T}_+(R_2^-))$ とおく。図では e_1^+ などは正確には $\pi(e_1^+)$ などと書くべきであるが、記号が煩雑になるので、 π は省略することにする。北半球にある領域 $\hat{T}_+(R_2^-)$ に対し、 $f(\hat{T}_+(R_2^-)) = f(\hat{T}_+(R_2^-))$ となる領域 R_2^- が南半球に存在する。この領域 R_2^- をフロー \mathcal{F} で流して到達する領域 $\hat{T}_+(R_2^-)$ を $\hat{T}_+(\hat{T}_+(R_2^-))$ と書くこととし、 $D_2 = \pi(\hat{T}_+(\hat{T}_+(R_2^-)))$ とする。同様にして、 D_k を $D_k = \pi((\hat{T}_+)^k(R_2^-))$ と定義する。 \mathfrak{X}_r はザイフェルト束に沿ったベクトル場なので、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、 $D_n = D_0$ となる。ここで n はそのような自然数のうち、最小のもの、つまり $D_0 \neq D_k$ ($0 < k < n$) としておく。図5は D_k たちの例で、この場合は $n = 4$ である。補題3.1より $n \geq 2$ である。

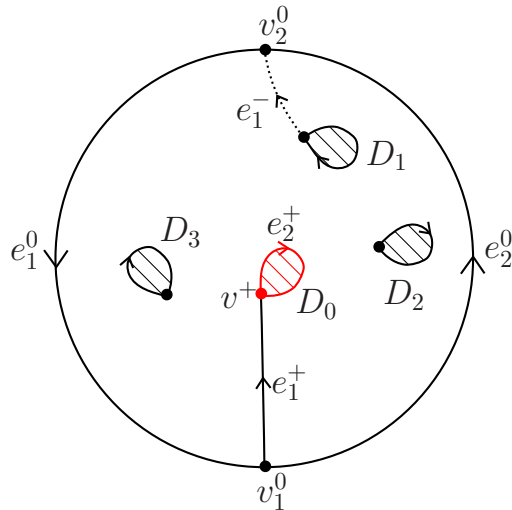


図 5. R_2 を通るファイバーと P の交わり。

補題 3.3. $r \geq 1, r \neq \frac{3}{2}$ とする. このとき, P の \mathfrak{X}_r との横断性を保つイソトピー変形により, $0 \leq i < j < n$ について $D_i \cap D_j = \emptyset$ とすることができる. さらに, $\pi^{-1}(D_0)$ を通るファイバー (つまり, 面 R_2 を通るファイバー) は e_1 の内部とは交わらないとすることができる.

証明. 前半の主張は, 図 3 のイソトピー変形で R_2 をさらに小さくすればよい. 後半の主張についても, この章の証明の最初で仮定したように, 頂点 v を通るザイフェルト束のファイバーは辺 e_1 の内部とは交わらないので, 図 3 のイソトピー変形で R_2 をさらに小さくすれば, $\pi^{-1}(D_0)$ を通るファイバーと辺 e_1 の内部が交わらないようにすることができる. \square

面 R_2 の P 内での微小近傍 $\text{Nbd}(R_2; P)$ を固定し, この近傍を通るザイフェルト束のファイバーの和集合を ν とする. 各 $k = 0, 1, \dots, n-1$ について, $\nu \cap P$ の連結成分のうち, $f((\hat{T}_+)^k(R_2))$ を含むものを \tilde{F}_k とし, $F_k = \pi(\tilde{F}_k)$ とおく.

補題 3.4. $r \geq 1, r \neq \frac{3}{2}$ とする. このとき, 近傍 ν を十分小さく選ぶことで, $0 \leq i < j < n$ について $F_i \cap F_j = \emptyset$ とすることができる. さらに, $k = 1, \dots, n-1$ について, $\tilde{F}_k \cap e_1 = \emptyset$ とすることができる.

Proof. 補題 3.3 より, 近傍 ν を十分小さく選べば, 条件を満たすことができる. \square

F_i たちは, 例えば図 6 のようになる. 近傍 ν は辺 e_2 の近傍を含むので, E-cycle の右半分の半円の近傍も F_0 の一部となることに注意.

ここで, ザイフェルト束のファイバーを同一視する軌道写像 (orbit map) を $p: S^3 \rightarrow S^2$ とする. 近傍 ν の像は図 7 のようになる. これは \tilde{F}_k たちの像でもある. 図 7 の領域 $\hat{\nu} = p(\nu)$ を頂点 $p(v)$ から $p(e_1)$ に沿って, $p(e_1)$ の向きを与える矢印の先端からバックするように徐々に広げていく. 注意として, $p(e_1)$ は埋め込まれた弧ではなく, はめ込まれた弧になることもある. 拡張における時間 $s \geq 0$ 後の $\hat{\nu}$ を $\hat{\nu}_s$ とし, その p による逆像 $p^{-1}(\hat{\nu}_s)$ を ν_s とおくことにする.

$s > 0$ を十分小さいとし, ν_s と P との交わりの連結成分のうち F_k を含むものを $F_k^{(s)}$ と書くことにする. $\hat{\nu}_s$ の拡張が進むにしたがって, 各 $F_k^{(s)}$ も拡張していく. この $F_k^{(s)}$ たちの拡張の様子を表したのが図 8 である. 辺 e_1^+ の矢印の先端からバックするように拡張されていくので, 図の上でそれを確認すればよい. 左側に頂点近傍での拡張の様子を描いたので, それを見ながら右図を見ると分かり易い.

$\hat{\nu}_s$ の拡張を徐々に進め, 拡張の端点が $\hat{\nu}_s$ 自身のどこかに辿り着いた時点で拡張を止める. 説明の都合上, $\hat{\nu}_s$ 自身に接した状態ではなく, さらに少しだけ拡張をして, のりし

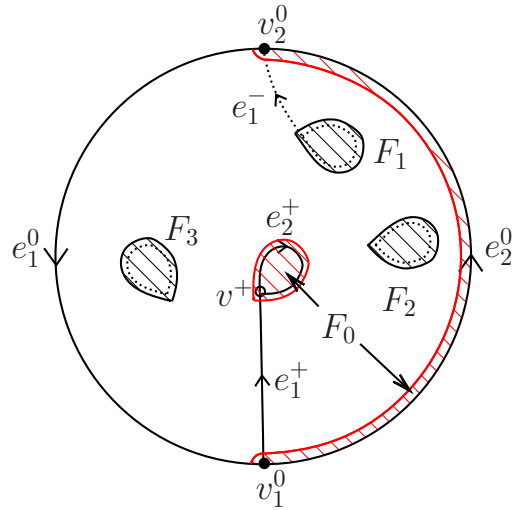


図 6. 近傍 ν と P との交わり.

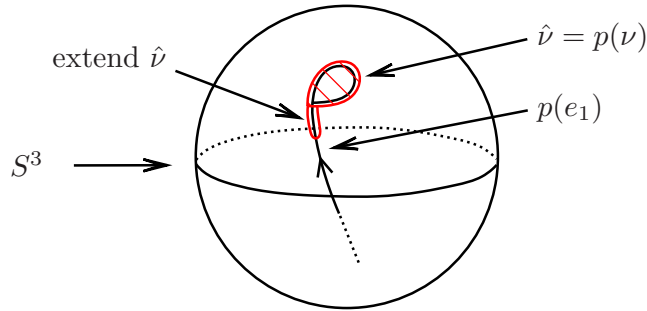


図 7. 軌道空間 S^2 上での $p(\nu)$ の拡張.

る部分がある状態で止める. この時間を $s = 1$ とする. この拡張により, $F_k^{(s)}$ たちも徐々に拡張され, $s = 1$ において, 和集合 $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ のどこかに辿り着くことになる. ν_s の拡張はファイバー束の構造を保ったまま行っているので, $s = 1$ において, 各 $F_k^{(1)}$ の端点は, 同時に, 和集合 $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ に辿り着く. さらに, 辿り着いた点は, S^3 内では, k によらず, ザイフェルト束の同じファイバー上にある.

ここで次の (I), (II) に場合分けする.

(I) $p(e_1)$ が単純閉曲線となる場合.

(II) $p(e_1)$ が単純閉曲線にならない場合.

注意として, (II) の場合は, 端点が辿り着く場所は $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k$ 以外としてよい. (I) の場合は頂点 v を通るファイバーと各 F_k との交わりの近くに同時に到着する.

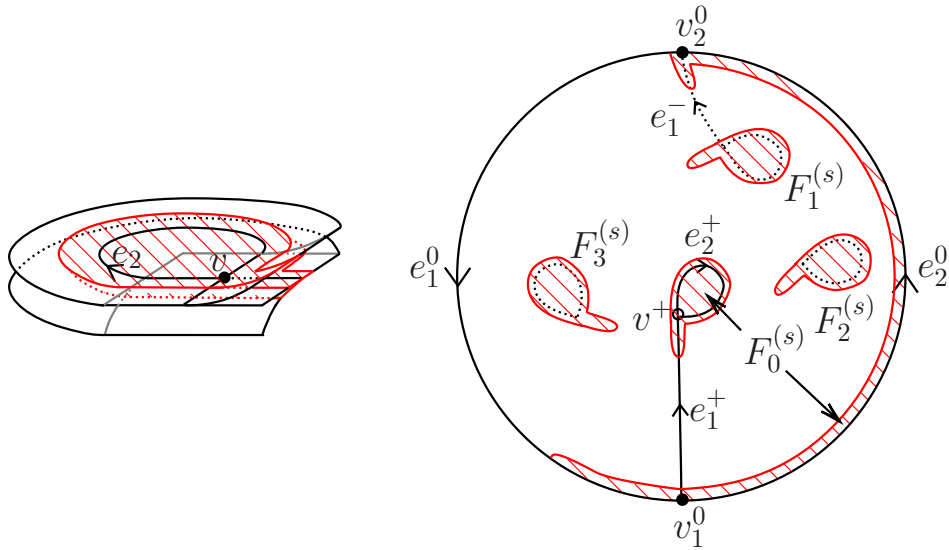


図 8. 近傍 ν_s と P との交わり.

3.1. **Case (I).** この場合, F_0 からの辺 e_1^+ に沿った拡張が, 他の $F_k^{(s)}$ たちに辿り着くことなく, 辺 e_1^+ の反対側の端点まで辿り着く. $F_k^{(1)}$ たちは例えば図9のようになる.

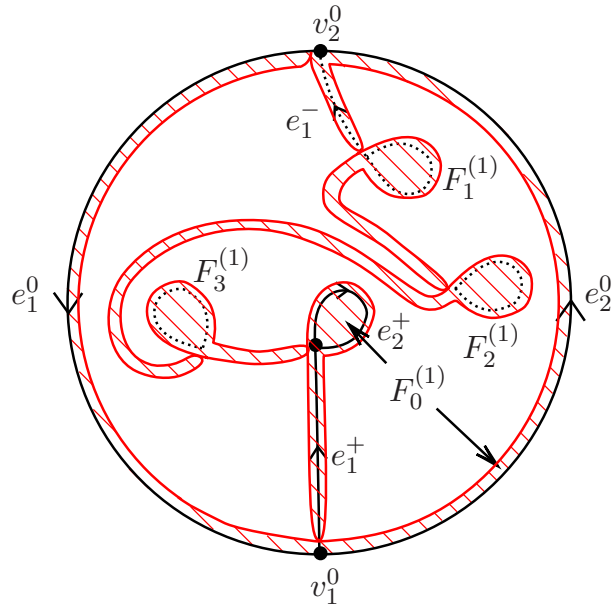


図 9. $p(e_1)$ が単純閉曲線となる場合の図.

補題 3.5. $r \geq 1, r \neq \frac{3}{2}$ とする. Case (I) の場合, $D^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k$ は 2 つの開円板となる.

証明. F_0 の点 v_2^0 からの拡張は辺 e_1^- に沿って進み, その到着先は F_1 となる (図4の左図を参照). よって, 各 $0 < k < n-1$ について, F_k の到着先は F_{k+1} , F_{n-1} の到着先は F_0 になる. よって, 主張が成り立つ. \square

$F_0^{(1)}$ を通るファイバーの和集合を A とする. ザイフェルト束の軌道写像 $p : S^3 \rightarrow S^2$ による A の像 $p(A)$ は S^2 上のアニュラスとなる. その補集合は2つの開円板であり, 図10のように, \hat{v} と隣接する開円板を Δ_1 とし, もう一方の開円板を Δ_2 とする.

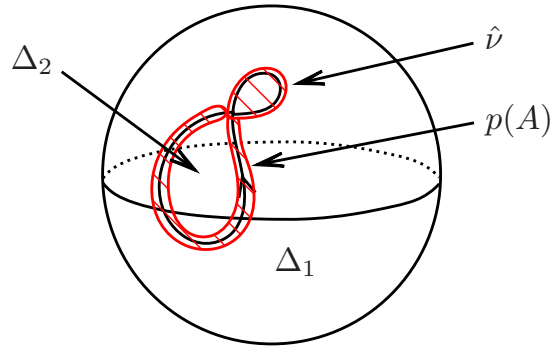


図 10. Δ_1 および Δ_2 .

補題 3.6. $r \geq 1, r \neq \frac{3}{2}$ とする. Case (I) のとき, $r = \frac{n+2}{n+1}$ ($n \geq 2$) となる.

証明. $p^{-1}(\Delta_1)$ と $p^{-1}(\Delta_2)$ はいずれも, ザイフェルト束の例外ファイバーを高々1つしか含んでいないとする. このとき, $p^{-1}(\Delta_1)$ と $p^{-1}(\Delta_2)$ の閉包はいずれも $D^2 \times S^1$ と同相であり, ザイフェルト束のファイバーはメリディアン円板 $D^2 \times \{*\}$ と横断的である. 和集合 $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ のコアとなるグラフは, 辺 e_1 に入った向きを各 $F_k^{(1)}$ 上で見ると, 図11のように, 2点 v_1^0, v_2^0 を結ぶ向き付けられた1つの弧として繋がっていることが分かる. さらに, F_k はその向きから見て, 常に右側にあることが分かる. 図の $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ の補集合は2つの開円板であり, 右側の開円板を D_1 , 左側の開円板を D_2 とする. 特に, 各 $i = 1, 2$ について, $\pi(p^{-1}(\Delta_i)) = D_i$ が成り立つ. また, D_i をDS図式の上半平面の面と見做したとき, 同一視写像 f による像 $f(D_i)$ の閉包は, $p^{-1}(\Delta_i)$ の閉包として得られるソリッドトーラスのメリディアン円板になる.

ファイバーが辺 e_1 の中点付近の, 面が2枚ある側を通るとき, ファイバーは図12の左図のように分割される. 図9はDS図式の上半球面とファイバーとの交わりを描いている図なので, 図12の左図の2点が図9に描かれるわけだが, そのうちの1つは図の中央にある F_0 の近くに描かれ, もう1つは図の右側にある辺 e_1^0 の近くに描かれる. その他に, 各

$k = 1, \dots, n-1$ について、このファイバーは F_k の近くを相対的に同じ位置で P と 1 回ずつ交わる。図 9 の例の場合だと、図 12 の右図の星印の位置を 1 つのファイバーが通ることになる（図は $n = 4$ の場合である）。 D_1 の閉包は同一視写像により $p^{-1}(\Delta_1)$ の閉包として得られるソリッドトーラスのメリディアン円板と見做せるので、このファイバーはこのソリッドトーラスのメリディアン円板と $n+1$ 回交わることが分かる。よって、 $p^{-1}(\Delta_1)$ の中心には位数 $n+1$ の例外ファイバーがあることになる。

D_2 上でも同様の考察を行う。ファイバーが D_2 側で頂点 v の近くを通るとき、ファイバーは図 13 の左図のように分割され、図 12 の左図の 3 点のうちの一つは図の中央にある F_0 の連結成分の近くに描かれ、残りの 2 つは 2 点 v_1^0, v_2^0 の近くに描かれる。その他に、各 $k = 1, \dots, n-1$ について、このファイバーは F_k の近くを相対的に同じ位置で P と 1 回ずつ交わる。図 9 の例の場合だと、図 13 の右図の星印の位置を 1 つのファイバーが通ることになる（図は $n = 4$ の場合である）。 D_2 の閉包は同一視写像により $p^{-1}(\Delta_2)$ の閉包として得られるソリッドトーラスのメリディアン円板と見做せるので、このファイバーはソリッドトーラスのメリディアン円板と $n+2$ 回交わることが分かる。よって、 $p^{-1}(\Delta_2)$ の中心には位数 $n+2$ の例外ファイバーがあることになる。

以上より、 $r = \frac{n+2}{n+1}$ となる。

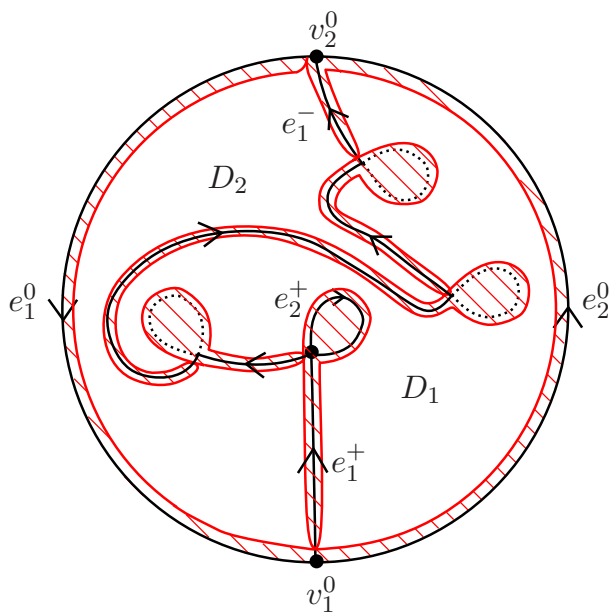


図 11. D_1 および D_2 .

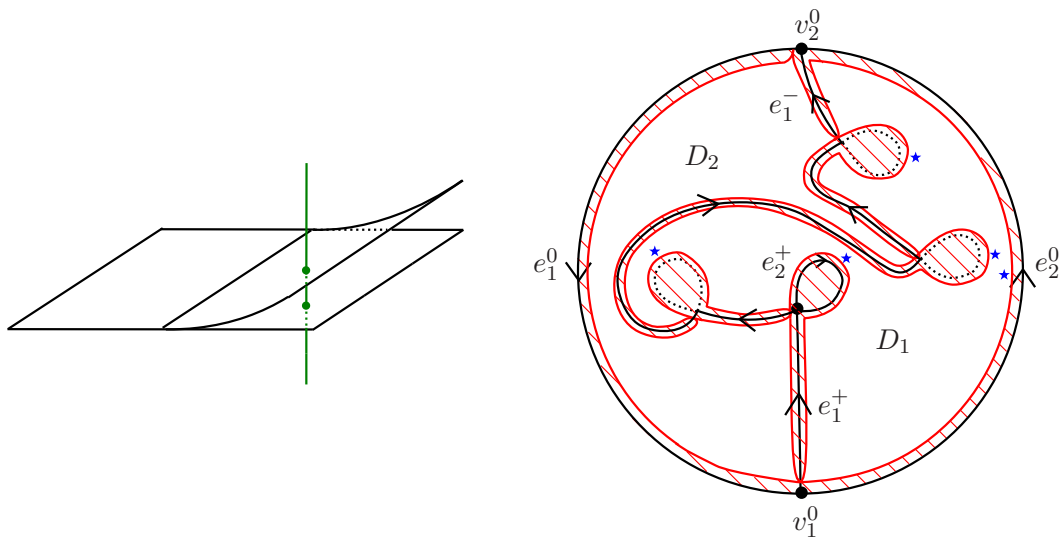


図 12. D_1 上での P とファイバーとの交わり.

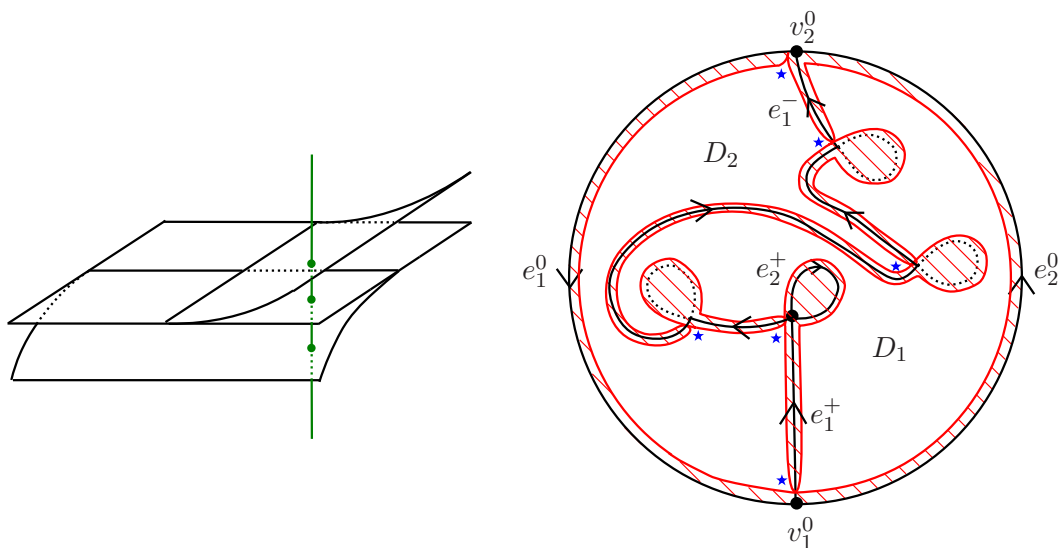


図 13. D_2 上での P とファイバーとの交わり.

$p^{-1}(\Delta_1)$ と $p^{-1}(\Delta_2)$ のいずれかがサイフェルト束の例外ファイバーを 2 つ含んでいる場合は、もう一方は $D^2 \times S^1$ と同相であり、例外ファイバーを含まないので、ファイバーはメリディアン円板 $D^2 \times \{*\}$ と 1 度だけ交わる。しかし、このメリディアン円板が補題 3.5 の $D^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \pi(F_k)$ の右側の開円板に対応する場合はファイバーはメリディアン円板

と $n+1$ 回交わり、左側の開円板に対応する場合はファイバーはメリディアン円板と $n+2$ 回交わることになり、 $n \geq 2$ より、矛盾となる。よってこの場合は存在しない。□

注意 3.7. 補題 3.6 の証明は、 $n \geq 2$ の場合について、 $(n+1, n+2)$ のザイフェルト束に対し、 P を横断的な位置におけることも示している。よって、序章の (ii) と合わせると、各 $n \geq 1$ について、 $(n+1, n+2)$ のザイフェルト束に対し、 P を横断的な位置におけることを示したことになる。次章ではより一般に、 $1 < r < 2$ に対して、 \mathfrak{X}_r と横断的な位置に P を置けることを示す。また、この章では説明の都合で $\pi(R_2^+) \cap \pi(R_2^-) = \emptyset$ としているため、 $n \geq 2$ と仮定しているが、 $\pi(R_2^+) = \pi(R_2^-)$ と設定すれば、補題 3.6 の証明は $n = 1$ の場合にも適用可能である。

3.2. Case (II). この場合、 F_0 からの辺 e_1^+ に沿った拡張が、辺 e_1^+ の反対側の端点まで辿り着く前に、他の $F_k^{(s)}$ のいずれかに辿り着く。

まず補題を1つ用意する。 M を3次元閉多様体、 \mathcal{F} を M 上の非特異フローとする。 M 内のソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ で、 $D^2 \times S^1$ 内の \mathcal{F} の軌道がすべて $\{*\} \times S^1$ であるものが存在するとする。 P を (M, \mathcal{F}) のフロースパインで、特異集合 $S(P)$ は $\partial D^2 \times S^1$ と横断的に交わり、かつ、 P の頂点は $D^2 \times S^1$ とは交わらないとする。

$P' = P \cap (D^2 \times S^1)$ とする。 P' が、図14の左図のように、面の向きから誘導される境界の向きと分岐の向きがすべて一致しない面をもつとすると、右に描いた図のように面を2枚にすることで分岐を解消することができる。この操作のことを P の $2n$ 角形に沿った剥がし変形と呼ぶことにする⁴。ただし、 $n \geq 0$ とする。 $n = 1$ のときは $2n$ 角形は2角形となり、剥がし変形は図15のようになる。 $n = 0$ のときは、 $2n$ 角形は境界 $\partial D^2 \times S^1$ とは交わらない、円板と同相な P' の領域とし、その円板を剥がす変形と定義する。

補題 3.8. $P \cap (D^2 \times S^1)$ は剥がし変形を繰り返し行うことで、いくつかのメリディアン円板の非交和な和集合に変形できる⁵。

証明. $P' = P \cap (D^2 \times S^1)$ とする。ファイバー $\{*\} \times S^1$ を同一視する射影を $q: D^2 \times S^1 \rightarrow D^2$ とする。 P' が分岐を含んでいなければ、 q の P' への制限写像 $q|_{P'}: P' \rightarrow D^2$ の逆像は有限個の円板となるので、 P' はメリディアン円板の非交和な和集合となる。よって、 P' が分岐をもつ場合について考える。

⁴高村茂氏のリーマン面の退化における「剥がし変形」と同じ用語だが、全く無関係である。響きが良いので流用させて頂いた。

⁵この補題の証明がダサイ。もう少しまともな証明は書けないものだろうか。

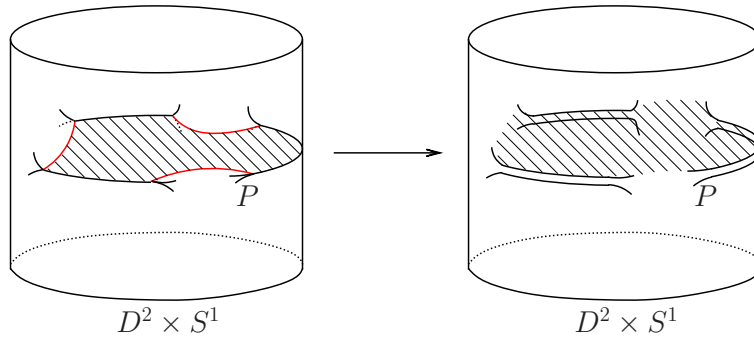


図 14. $D^2 \times S^1$ 内の P 上の $2n$ 角形に沿った剥がし変形 ($n = 3$ の図).

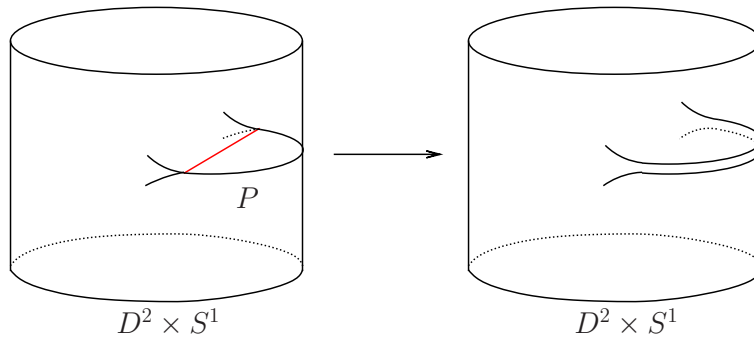


図 15. $D^2 \times S^1$ 内の P 上の $2n$ 角形に沿った剥がし変形 ($n = 1$ の図).

以下, P' の辺とは, P の辺の P' への制限を表すものとする. e を P' の辺とする. e が単純閉曲線であるとする, P は e 以外の特異集合を持たないことになる. スパインであることから分岐は外側に 2 枚ということになり, $n = 0$ の剥がし変形を行うことで, 主張が従う. よって, P' の辺はすべて $D^2 \times S^1$ に固有 (proper) に埋め込まれた弧であるとしてよい.

まず, $q(e)$ は自己交叉を持たないことを示す. 自己交叉があると仮定すると, 図 16 のように, e の一部 \bar{e} で, $q(\bar{e})$ が D^2 上の 1 角形の境界となるものが存在する. この 1 角形を $D_{\bar{e}}$ とする. $P' \cap q^{-1}(D_{\bar{e}})$ の \bar{e} と隣接する成分 $\hat{D}_{\bar{e}}$ の位置を考えると, $\hat{D}_{\bar{e}}$ が $q^{-1}(D_{\bar{e}})$ 内で \bar{e} 以外の辺を持たないといけないことが分かる. さらに, その辺の一つ e' で, q による像 $q(e')$ が同様の自己交叉を持つものが存在することが分かる. この議論を帰納的に適用することで, $q(e)$ が自己交叉をもつような P' の辺 e は存在しないことが分かる.

R を P' の面とし, e_1, \dots, e_m を R の境界上にある P' の辺とする. このとき, 上の議論と同様にして, $q(e_1 \cup \dots \cup e_m)$ は自己交叉を持たないことが従う. よって, $q|_R : R \rightarrow D^2$ は R から $q(R)$ への全単射を与える.

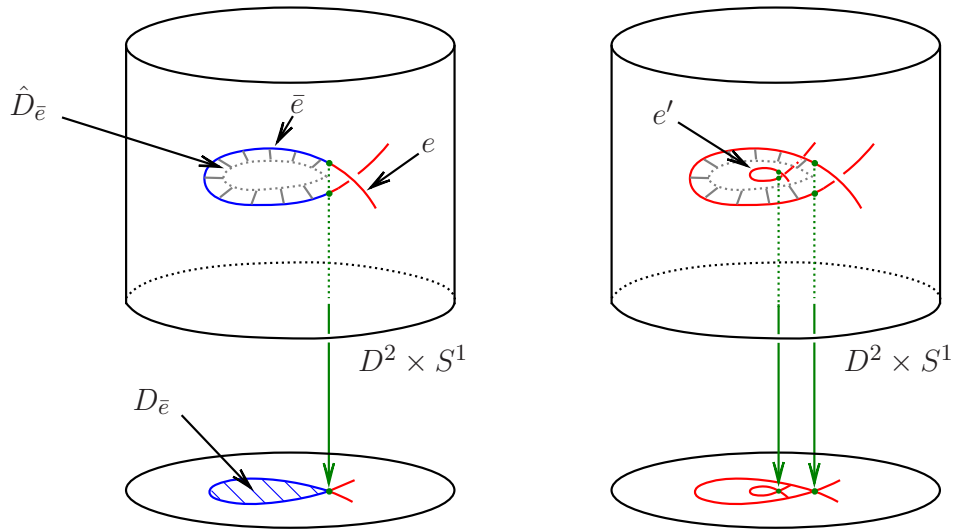


図 16. $q(e)$ が自己交叉をもつ P' の辺 e .

辺の像を a_1, \dots, a_m とする. 各 a_i には分岐の面が 1 枚に対応する側と 2 枚の側があるので, 図 17 のように, a_i の両側にそれぞれ 1 および 2 という数字を振っておく. a_i たちにより分けられた D^2 の面がラベル 1 だけを持つ場合は, 剥がし変形により対応する分岐を解消することができる. つまり, 面がラベル 1 だけをもつ場合は, その面の境界にある弧たちを同時に消してよいことになる.

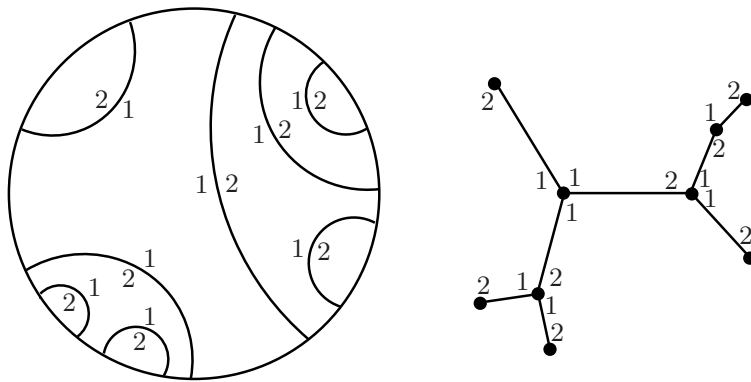


図 17. 分岐の像.

以下, これ以上剥がし変形を行えないが, まだ分岐が存在していると仮定する. a_i たちに分割された D^2 の各面を頂点とし, 2 つの面が隣接しているときは, それらの頂点を辺で結ぶことで得られるグラフ T を考える. このグラフは木 (tree) になっている. 辺は a_i

たちに対応する. a_i の両側にラベル 1, 2 を振る代わりに, 辺の両端にラベル 1, 2 を振ることにする. T の端点に対応する辺から順番に 1 あるいは 2 のラベルを振っていくと, 剥がし変形をこれ以上行えないという仮定から, 端点のラベルは 2 であり, その後は図 17 の右図のように 2, 1 が交互になるようにラベルが振られていくことが分かる. よって, T のどこかに, 隣接する辺の隣接する側のラベルがすべて 1 であるような頂点が存在することになる. これは剥がし変形をすべて行っていたという仮定に矛盾する. よって, 剥がし変形の適用後には分岐は存在しなく, メリディアン円板の非交和な和集合になっていることが従う. \square

命題 3.9. Case (II) のとき, $r \notin \mathbb{N}$ となる.

証明. Case (II) の場合は, F_0 の拡張が途中で止まるのだが, 拡張の先端が e_1^+ の左から到着するか, 右から到着するかで, 図 18 と図 19 の 2 つのパターンがある. 図の左図は拡張の軌道写像 $p: S^3 \rightarrow S^2$ による像を描いた図で, 右側が射影 $\pi: B^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ により得られる拡張の図である. 右図では簡単のため, 赤い斜線の領域を太線で書いている.

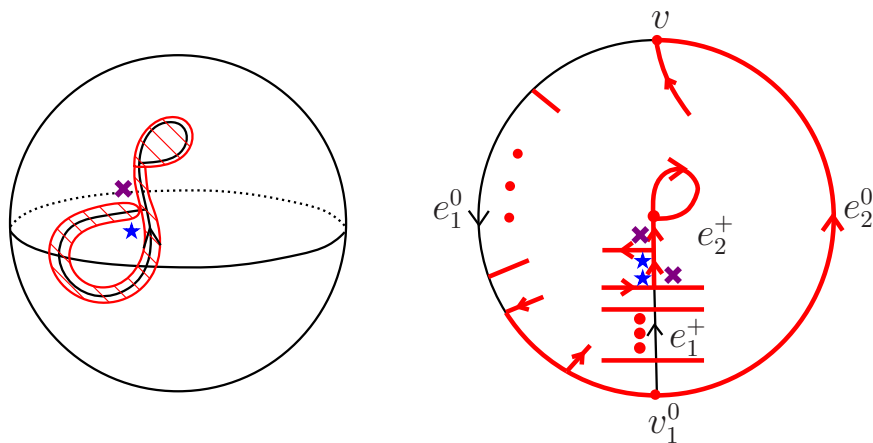


図 18. Case (II) で, 拡張の先端が e_1^+ の左から到着する場合.

いずれの場合も星印の場所は, 軌道写像 $p: S^3 \rightarrow S^2$ により同じ点に移るので, よってザイフェルト束の同じファイバー上の点となる. 同様に, \times 印の場所も軌道写像により同じ点に移るので, ザイフェルト束の同じファイバー上の点となる. 構成から $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ を通るファイバーたちの補集合は 2 つの開ソリッドトーラスになるが, 星印と \times 印は $\bigcup_{k=0}^{n-1} F_k^{(1)}$ をまたいで隣接しているので, それぞれ異なるソリッドトーラスに含まれることが分かる. ここで, 補題 3.8 より, 星印のある領域は $D^2 \times S^1$ のメリディアン円板の一部とみな

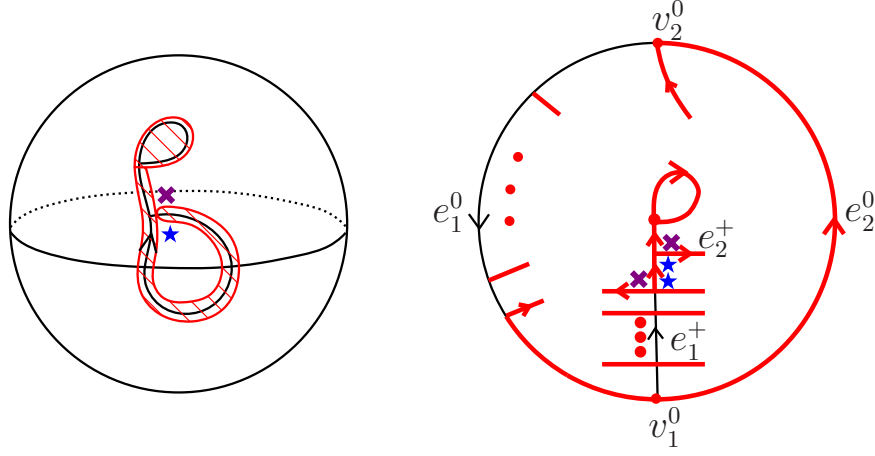


図 19. Case (II) で，拡長の先端が e_1^+ の右から到着する場合．

すことができ，星印が少なくとも2つあることから，ファイバーはメリディアン円板と2回以上交わることが分かる．同様にして， \times 印のある領域から得られるメリディアン円板も，ファイバーと2回以上交わることになる．つまり，2つのソリッドトーラスはそれぞれ，ザイフェルト束の例外ファイバーを1つ含むことになる．特に，ザイフェルト束は例外ファイバーを2つ持つことになる．しかし， $r \in \mathbb{N}$ の場合は，ザイフェルト束は高々1つの例外ファイバーしか持たない．よって， $r \notin \mathbb{N}$ が従う． \square

定理 1.1 (1) の証明. 命題 3.6 および命題 3.9 より主張は従う． \square

4. 定理 1.1 (2) の証明

定理 1.1 (2) は正アワビのザイフェルト束への埋め込みを具体的に構成して証明する．図 20 のような正アワビ上のコイル γ を考える．コイル γ の管状近傍 $N(\gamma)$ は S^3 のソリッドトーラス2つへの分解を与える． $N_1 = N(\gamma)$ とし， $S^3 = N_1 \cup N_2$ とする．図の領域 \hat{D}_2 は N_2 のメリディアンに穴が2つ空いている曲面である．

まず，(2,3) のザイフェルト束を目印にして， N_2 内の P を配置する．図 21 の左の図のように， N_2 のメリディアン円板 D_2 上に，バームクーヘンの切れ端2つ d_1, d_2 を中心に対して対称な位置に用意する．この d_1 と d_2 は厳密に， D^2 上の半径 r_1 と r_2 ($r_1 < r_2$) の円を描き，中心をとる直線を2つ描いて，それらを境界とする領域として選ぶ．以下の議論では，半径 r_1, r_2 の具体的な数値は重要ではない．一方で，2つの直線のなす角度は，後の議論で適切に動かすことになる．よって，2つの円と直線に囲まれているという設定は重要である．

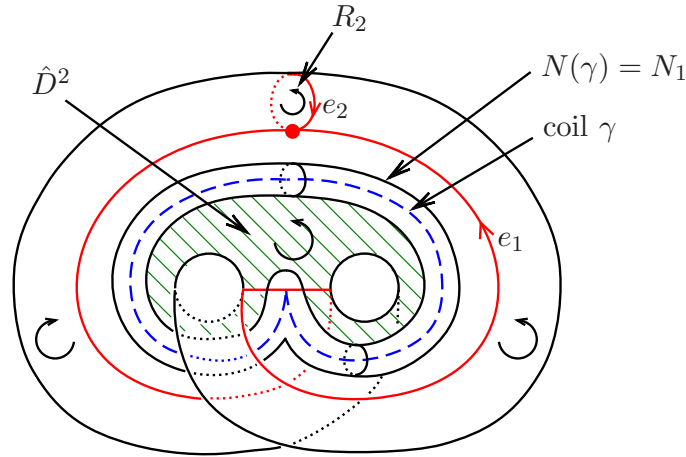


図 20. 正アワビ上のコイル.

ここで、 $\hat{D}_2 = D_2 \setminus \text{Int}(d_1 \cup d_2)$ とみなす. 円柱 $D_2 \times [0, 1]$ の $D^2 \times \{1\}$ を 1 回転半捻って、 $D^2 \times \{0\}$ と貼り合わせることで、 N_2 を構成する. この貼り合わせによる円筒 $(\partial d_1) \times [0, 1]$ の N_2 内での像を A とすると、 $\hat{D}_2 \cup A$ は $P \cap N_2$ の一部とみなすことができる. P の面 R_2 は図のように A の途中に置かれる. (2, 3) のザイフェルト束のファイバーは $\{*\} \times [0, 1] \subset D_2 \times [0, 1]$ 方向にあり、上下の貼り合わせにより、中心に (2, 3) の例外ファイバーが現れる.

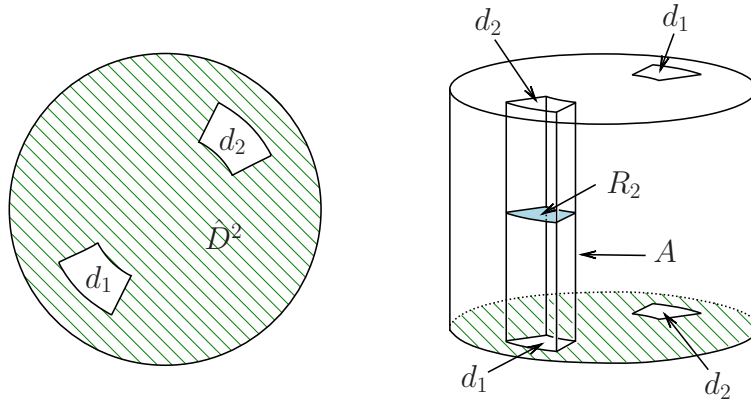


図 21. $D_2 \cup A \cup R_2$.

次に、 N_1 内の P の位置を把握する. 図 22 の N_1 に描かれている赤い半円板がコイルの半円板で、青と緑の曲線の間には $P \cap N_1$ のもう一つの面がある. 曲線に描かれた向きは $P \cap N_1$ の各面の向きから誘導される向きである. この分岐付き θ 曲線を見易いように描いたのが右の図である.

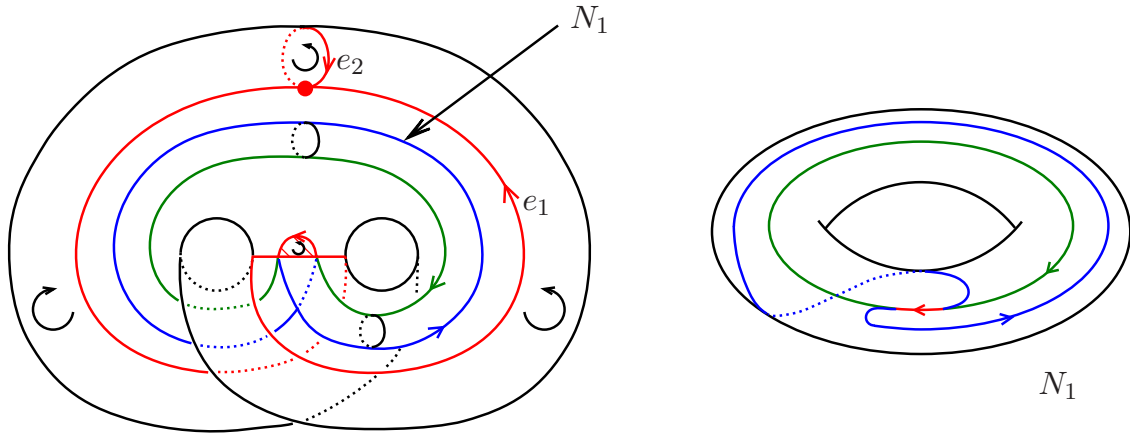


図 22. N_1 での P の位置.

この ∂N_1 上の分岐付き θ 曲線を ∂N_2 上に描き, (2,3) のザイフェルト束のファイバーが垂直になるように, 得られた図をさらに 1 回転半させる. この操作を描いたのが図 23 である. 繰り返しになるが, (2,3) のザイフェルト束のファイバーは $\{*\} \times [0,1] \subset D_2 \times [0,1]$ 方向である. 図の赤い線は P の特異集合で, 2 つ穴あき円板 \hat{D}_2 , 円筒 $A = (\partial d_1) \times [0,1]$, 図の赤と青の曲線に挟まれた円板 A' , および面 R_2 の和集合が $N_2 \cap P$ である. これと $N_1 \cap P$ を貼り合わせると P が得られる.

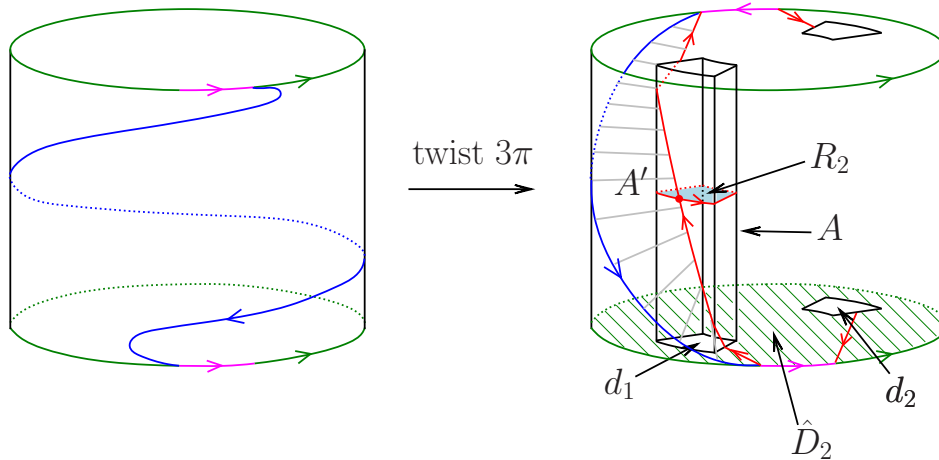


図 23. N_2 での P の位置.

N_2 内では P は A 以外の面では \mathfrak{X}_2 に横断的である. ここでさらに, A を図 24 のように微小変形すると, P と \mathfrak{X}_2 を N_2 内で横断的にすることができる.

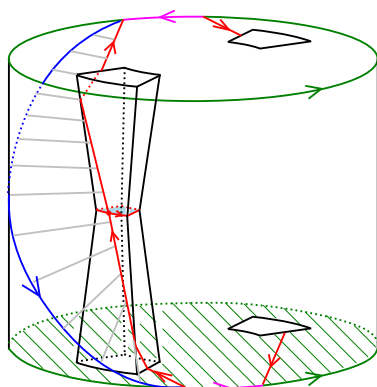


図 24. N_2 での P の, \mathfrak{X}_3 と横断的な位置.

r を変えたときに, それに合わせて P を変形できるかを考える. ∂N_1 では分岐付き θ 曲線は図 25 の左図のようになり, $0 < r < 1$ まで対応できることが分かる. $r \rightarrow 1$ になると危険ではないか, と思わなくもないが, 注意 3.7 で述べたように, 実際に構成しているので, 心配しなくてよい.

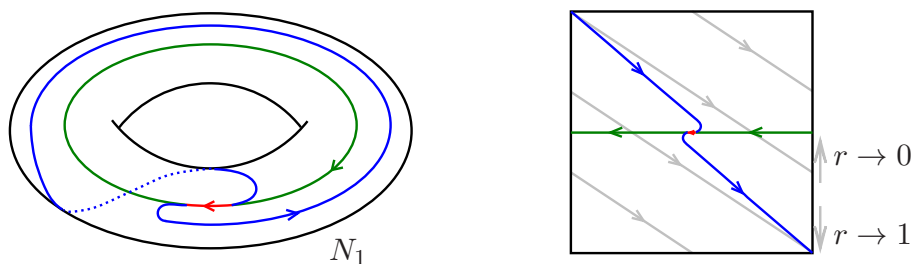


図 25. N_1 での \mathfrak{X}_r の許容範囲.

∂N_2 は ∂N_1 と同じなので, 同様に $0 < r < 1$ まで対応できることになる.

$P \cap A$ 上では図 26 のようになる. 図の青で書いた部分が A の位置で, R_2 を限界まで小さくし, さらにバームクーヘン上の領域 d_1, d_2 を定義したときの同心円に沿って限界まで広げたとき, 図の点線の位置に十分近づく. このときの \mathfrak{X}_r の許容範囲は $\frac{1}{2} < r < 1$ であることが分かる. この多面体の角を微小変形で丸めることで, $\frac{1}{2} < r < 1$ について, \mathfrak{X}_r と横断的な P の埋め込みが出来上がる. よって主張が従う. \square

5. おわりに

定理 1.1 (2) の証明におけるザイフェルト束に対する正アワビの位置から, ザイフェルト束のファイバーをこれ以上傾けることはできないと考えられる.

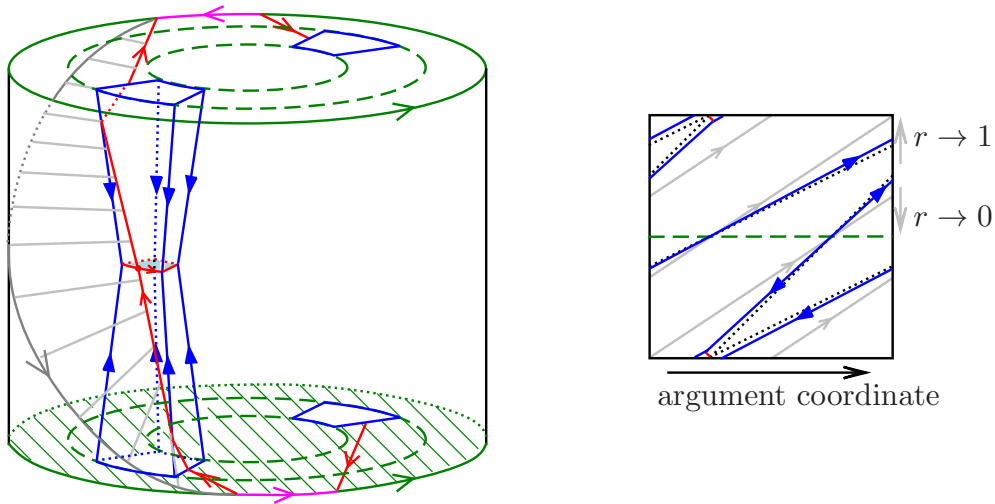


図 26. N_2 での α_r の許容範囲.

予想 5.1. $0 < r \leq \frac{1}{2}$ および $r \geq 2$ のとき, 正アワビを α_r と横断的な位置に置くことはできない.

定理 1.1 (1) で $r \notin \mathbb{N}$ を示しており, この予想の supporting evidence になっている. この予想は, r -型のアワビに対し, Reeb ベクトル場がフローとなるような S^3 上の接触形式は存在するのか? という問題 ([5, 問題 3.14]) と関連している感じもするが, 気のせいかもしれない.

アワビをホップ束に横断的に置けないからといって, 2-handle attaching の構成ができなくなったわけではない. 実際, アワビは重み (2, 3) のザイフェルト束に横断的な位置におけるので, これを利用すればよいということになる.

問 5.2. 重み (2, 3) のザイフェルト束を使って, Stein filling 用の 2-handle は構成可能か?

具体的にどのように設定すればよいかについては, まだ具体的な考察は行っていない. 論文 [4] で具体例の接触構造の決定の際に利用した Coil-Seifert 手術を実現するような 2-handle attaching を構成できれば, 手術により得られる接触多様体の tight 性が自動的に従うことになるので, 有用なツールとなる.

参考文献

- [1] 石井一平, *DS-diagram Seifert fibred structure*, Hakone Seminar **2**, 1986, pp. 35–40. (in Japanese)

- [2] Ishii, I., *Flow-spines and Seifert fibred structure of 3-manifolds*, Tokyo J. Math. **11** (1988), 95–104.
- [3] 石井一平, アワビに横断的な周期流, トポロジー白山研究集会 2019(冬), 2019年11月.
- [4] Ishii, I., Ishikawa, M., Koda, Y., Naoe, H., *Positive flow-spines and contact 3-manifolds*, arXiv:1912.05774 [math.GT]
- [5] 石川昌治, 3次元多様体の接触構造とフロースパイン, Hakone Seminar **34**, 2018, pp. 7–31. (in Japanese)