

3次元多様体の接触構造とフロースパイน์

石川昌治 (慶應義塾大学経済学部)

3次元接触多様体の研究の重要な方向性として、3次元接触多様体の分類と、Reeb ベクトル場を与える力学系の研究が挙げられる。フロースパイน์はフロー付き3次元多様体の研究のために導入された概念であり、この2つの研究の方向性のいずれに対しても有効であると期待できる。フロースパイน์の概念を知ったとき、最初に期待したのは後者の研究への応用である。Weinstein 予想の組み合わせ的な証明がフロースパイน์から作れば、それは抱腹絶倒のものであり、これを考えないという手はない。さらに Reeb 軌道のより深い性質までフロースパイน์から読み取れる可能性も期待できる。ただ、その方針で研究を進めるためには、まずはフロースパイน์と接触構造の間にきちんとした対応を与え、具体例を積み上げて理解を深める必要がある。そこで着手したのが、論文 [19] における正フロースパイน์と接触構造との対応についての研究である。ここで正フロースパイน์とは、頂点の数が1以上で、かつすべての頂点が ℓ -型であるフロースパイน์のことである。

この研究は Giroux 対応の類似として正フロースパイน์と接触構造の間に対応を与えるもので、接触構造を研究対象としている時点で Reeb ベクトル場の力学系などは研究の範疇から外れることになる。その一方で、対応がきちんとならされると、3次元接触多様体をフロースパイน์を用いて書き下すことが可能となるため、1つ目の問題であった3次元多様体の分類に役立つことになる。¹ 実際、接触多様体に対応する正フロースパイน์の頂点数の最小数をその接触多様体の複雑度と定義することで、複雑度により接触多様体の表

住所: 〒 223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1 / E-mail: ishikawa@keio.jp

This work is supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C), JSPS KAKENHI Grant Number 16K05140, the Grant-in-Aid for Scientific Research (S), JSPS KAKENHI Grant Number 17H06128 and Keio University Academic Development Funds for Individual Research.

¹ 3次元多様体の接触構造の分類となると、通常は3次元多様体を固定して、その中の接触構造の分類を行うのだが、今回の場合は、3次元接触多様体の分類を多様体を固定せずに行う。Cho と McCullough は論文 [3] で、トンネル数1の結び目を、結び目とトンネルの組で分類することを考え、結果、各組はある tree の頂点に対応するという非常に見通しの良い分類を得ることに成功している。彼らの論文を読んで、分類を考える際には固定観念に捕らわれず、筋の良い視点を見つけることが大事なのだな、と思った。フロースパイน์による接触多様体の分類が筋が良いかは微妙である。

を作成することが可能となる。この表を作ることの恩恵がどれくらいあるかは定かではないが、表に出てくるフロースパイン1つ1つをきちんと理解していくことで、フロースパインと接触構造の新しい研究の方向性が見えてくるものと期待している。

本稿の第1章では、3次元接触トポロジーの基礎を簡単に紹介し、第2章では Benedetti と Petronio による分岐スパイン上の葉層と接触構造に関する研究を紹介する。また、この章の最後では、半田伸氏（東北大学の元学生）と筆者によるフロースパイン上の S-安定葉層と、フロースパインと Reeb ベクトル場との横断性についての簡単な考察を紹介する。第3章では正フロースパインと接触構造の対応に関し、正フロースパインの定義が導入された経緯と、現時点で得られている結果について紹介する。この研究は、石井一平氏（慶應義塾大学）、古宇田悠哉氏（広島大学）、直江央寛氏（東北大学）との共同研究である。

本稿は、2018年10月の箱根セミナーへの参加を機に書かせて頂いたものです。箱根セミナーでは、発表と有意義なディスカッションの機会を頂きました。世話人の方々、参加者の方々にこの場を借りてお礼申し上げます。

1. 3次元接触トポロジーの簡単な紹介

1.1. 定義から Gray の定理まで。

定義 1.1. 向き付けられた閉3次元多様体 M 上の1-形式 α が $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ を満たすとき、 α を接触形式、 $\ker \alpha$ により定まる M 上の超平面場 ξ を接触構造という。特に $\alpha \wedge d\alpha > 0$ のとき、 α を正の接触形式、 ξ を正の接触構造という。

以後、接触構造はすべて正の接触構造に限るとする。向きを逆にすれば負の接触構造も考えられるが、それをしてもあまり意味はない。むしろ、負の接触構造が出てきた場合には、「多様体の向きを逆にして、正の接触構造のみを考えることにしましょう」と言って、すべての接触構造を正に統一してから話を進めるとというのが研究のスタンスである。

定義 1.2. 向き付けらえた閉3次元多様体 M とその上の接触構造 ξ の組 (M, ξ) を接触多様体という。

例 1.3. (x, y, z) を \mathbb{R}^3 の座標とする。ここで (x, y, z) は \mathbb{R}^3 の向きと一致しているとする。1-形式 α を $\alpha = dz + xdy$ と定めると、これは \mathbb{R}^3 上の接触形式となる。実際、 $\alpha \wedge d\alpha = (dz + xdy) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz > 0$ が成り立つ。最後の $dx \wedge dy \wedge dz > 0$ の不等号の意味は、3-形式に \mathbb{R}^3 の向きと一致する接空間の基底 $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を入力したときに、その出力が正になる、という意味である。接触構造は式

$dz + xdy = 0$ により与えられる. この式は $\frac{dz}{dy} = -x$ と書け, x -軸を正の方向に動くと, 平面が (y, z) -座標に関して負に傾くことが分かる. それを図に表したのが, 次の図 1 である. この接触構造を \mathbb{R}^3 の標準的接触構造という.²

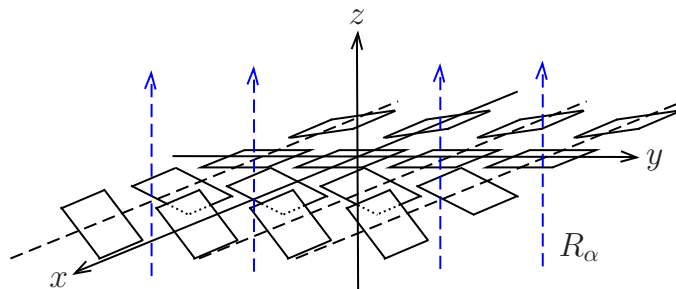


図 1. \mathbb{R}^3 上の標準的接触構造.

定義 1.4. M 上の接触形式 α に対し, $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$ かつ $\alpha(R_\alpha) = 1$ を満たす M 上のベクトル場 R_α を α の **Reeb** ベクトル場という.

このベクトル場 R_α は α が与えられると一意的に定まる. 例えば, 例 1.3 の標準的接触構造の場合には, 接触形式 $\alpha = dz + xdy$ に対し $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$ が条件を満たしているので, これが α の Reeb ベクトル場であることが分かる (図 1 の R_α を参照).

Reeb ベクトル場は $\alpha(R_\alpha) > 0$ を満たすことから, 接触構造の平面場に正の方向に横断的に交わることが分かる. また, Cartan の公式を使うと,

$$\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = (d \circ \iota_{R_\alpha} + \iota_{R_\alpha} \circ d) \alpha = d(\alpha(R_\alpha)) + \iota_{R_\alpha}(d\alpha) = d(1) + d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$$

より, Lie 微分が消えることが分かる. つまり, Reeb ベクトル場は 1-形式 α を保つベクトル場である.

本稿の後半では, Reeb ベクトル場が与えるフローをフリースパインのフローとみなすことで, 接触構造とフリースパインの対応を与える.

例 1.5. (z_1, z_2) を \mathbb{C}^2 の座標とし, 各 $i = 1, 2$ について, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とおく. $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ 上の 1-形式 $\sum_{i=1,2} (x_i dy_i + y_i dx_i)$ を \mathbb{C}^2 の単位球面 S^3 に制限して得られる S^3 上の 1-形式

$$\alpha = \sum_{i=1,2} (x_i dy_i + y_i dx_i) \Big|_{S^3}$$

²学生の頃に, 現東邦大学の野田健夫氏から, ボクシングで右のスクリーブローを放ったときの捻りだ, と教わった.

は S^3 上の接触形式となる．確認方法は，半径方向の座標を r とおいて， $r^2 = \sum_{i=1,2}(x_i^2+y_i^2)$ から得られる関係式 $dr = \sum_{i=1,2}(x_i dx_i + y_i dy_i)$ を用いて $dr \wedge \alpha \wedge d\alpha > 0$ を示せばよい．この α により定まる接触構造を S^3 の標準的接触構造という．

この接触構造の Reeb ベクトル場は S^3 のホップ束のファイバーに接するベクトル場であり，接触構造はホップ束のファイバーに直交する平面場である（図 2 を参照）．ホップ束には，ホップ束とその鏡像の 2 種類があるが，ここでは S^3 の標準的接触構造と図 2 の位置関係にあるホップ束を正のホップ束と呼ぶことにする．正のホップ束のファイバー 2 本は (2, 2)-トーラスリンクを成すが，その向きは結び目理論で言うところの「正のトーラスリンク」と一致している．

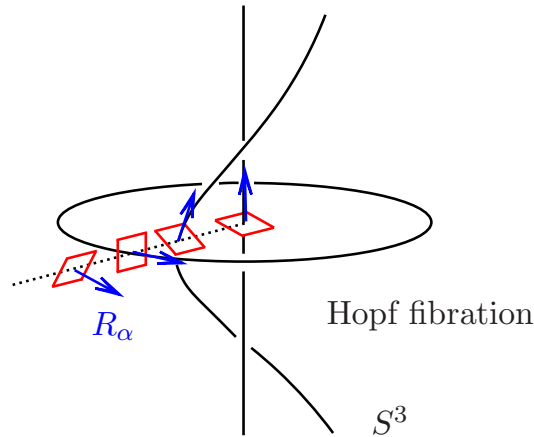


図 2. S^3 上の標準的接触構造とホップ束．

接触多様体は一般の奇数次元多様体に対して定義されるものであり，本来はそのように書くべきなのだが，本稿は 3 次元に限定しているので，その点をご容赦頂くことにする．上の標準的接触構造の例なども，一般の奇数次元で与えることができる．次の定理も一般の奇数次元多様体に対して成り立つ．

定理 1.6 (Darboux). α を多様体 M 上の接触形式とする． M 上の任意の点に対し，その座標近傍 $(U; x, y, z)$ で $\alpha|_U = dz + xdy$ となるものが存在する．

定理 1.7 (Gray '59 [13]). M を向き付けられた閉 3 次元多様体とし， ξ_0 および ξ_1 を M 上の接触構造とする． M 上の接触形式の族 $\alpha_t, t \in [0, 1]$, で $\ker \alpha_0 = \xi_0$ かつ $\ker \alpha_1 = \xi_1$ となるものが存在するとき， (M, ξ_0) と (M, ξ_1) の間には微分同相写像 $\psi : M \rightarrow M$ で $\psi_*(\xi_0) = \xi_1$ となるものが存在する．

Darboux の定理が接触形式に対する主張であるのに対し、Gray の定理は接触構造に対する主張である。特に Gray の定理は接触形式に対しては成り立たない。つまり、接触云々を微分同相という概念を用いて研究しようとした場合には、接触形式ではなく、その核である接触構造に着目することが必須ということになる。

定義 1.8. (M, ξ_0) と (M, ξ_1) の間に微分同相写像 $\psi : M \rightarrow M$ で $\psi_*(\xi_0) = \xi_1$ となるものが存在するとき、 (M, ξ_0) と (M, ξ_1) は接触同相 (contactomorphic) であるといい、写像 ψ を接触同相写像 (contactomorphism) という。

Gray の定理は接触構造を変形しても接触同相類が変化しないことから、**Gray 安定性** と呼ばれる。

1.2. **Martinet から Eliashberg まで.** この節からは3次元に特化した話である。3次元接触多様体の研究が大きく進展した理由はいくつもあるが、その最初の理由となるのが次の定理である。

定理 1.9 (Martinet '71 [22]). 任意の向き付けられた閉3次元多様体は接触構造を許容する。

この定理は、任意の3次元多様体が3次元球面内のリンクに沿ったデーン手術により得られるという Lickorish の結果を利用し、3次元球面には標準的接触構造を入れ、ソリッドトーラスにはデーン手術のスロープに合わせた接触構造を用意して、それらを貼り合わせることで証明される。その後、Thurston と Winkelnkemper により、任意の3次元多様体がオープンブック分解をもつことを利用した簡易な別証明が与えられる [23]。たった2ページ強の論文で、アイデア一発である。このアイデアは後の Giroux 対応において要として利用される。

接触構造の研究は、次の tight という概念を導入することにより、さらに大きく進展する。

定義 1.10. 3次元接触多様体 (M, ξ) 内に埋め込まれた円板 D が次の条件を満たすとき、 D を **overtwisted disk**³ という (図 3 を参照) :

- (1) ∂D は ξ に接している ;
- (2) ∂D に沿った D のフレーミングと ξ のフレーミングが一致している。

³当初の overtwisted disk は、円板の上の葉層の形まで限定して定義されていた。その後、凸曲面理論により葉層の条件を加えなくても接触構造が overtwisted であることは変わらないことが分かったので、葉層の形には言及しない定義を採用するようになった。現時点でどちらが正統なのかは私は知らない。

Overtwisted disk が存在するとき (M, ξ) は **overtwisted** であるといい, overtwisted disk が存在しないとき (M, ξ) は **tight** であるという.

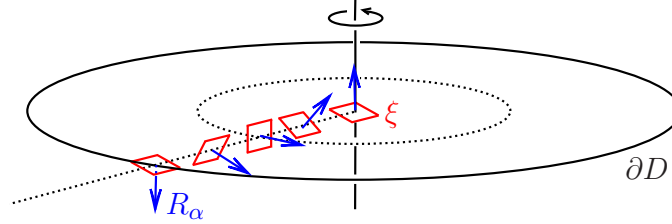


図 3. Overtwisted disk.

図 3 の平面場が $D^2 \times [0, 1]$ にあるものと思い, $D^2 \times \{0\}$ と $D^2 \times \{1\}$ を同一視して $D^2 \times S^1$ 上の接触構造とみなす. 接触多様体内の, 平面場に横断的な単純閉曲線の管状近傍をこの $D^2 \times S^1$ に置き換える操作を **half Lutz twist** という. この操作は平面場を 180 度回転させる. 同様の操作を図の中心軸に沿ってもう一度行くと, 平面場は 360 度回転する. この操作は **Lutz twist** と呼ばれる [21]. Half Lutz twist は平面場のホモトピー類を変えるが, Lutz twist は平面場のホモトピー類を変えない.

接触同相写像 $\psi : (M, \xi_0) \rightarrow (M, \xi_1)$ を考えると, 一方が overtwisted disk を持っていれば, 他方も持っていることになる. つまり, tight であるかどうかは, 接触多様体の接触同相類の不変量となる.

定理 1.11 (Bennequin, '83 [2]). \mathbb{R}^3 および S^3 の標準的接触構造は tight である.

(M, ξ) を接触多様体とし, Σ を M 内の曲面とする. 接触構造 ξ により与えられる Σ 上の葉層を ξ の特性葉層という.

定理 1.12 (Eliashberg '92 [6]). Tight な 3 次元球体で, その境界の特性葉層が一致しているものは接触同相である. よって, S^3 の tight な接触構造はすべて標準的接触構造と接触同相である.

この定理から, S^3 の tight な接触構造は接触同相を法として一つしかないことが分かる. 後半の主張について説明する. (S^3, ξ_1) と (S^3, ξ_2) を tight な接触構造をもつ S^3 とする. 各 $i = 1, 2$ について Darboux の定理で保証されている $\xi_i = \ker(dz + xdy)$ となる座標近傍をどこでも良いから選び, その中に 3 次元球体 B_i^3 を, $(B_1^3, \xi_1|_{B_1^3})$ と $(B_2^3, \xi_2|_{B_2^3})$ が接触同相となるように選ぶ. $S^3 \setminus \text{Int}B_1$ と $S^3 \setminus \text{Int}B_2$ は共に 3 次元球体であり, 境界で

ある球面上の特性葉層も一致しているので、定理の前半の主張を適用することができる。よって S^3 の tight な接触構造はすべて接触同相であるという後半の結論が従う。

定理 1.13 (Eliashberg '89 [4]). 2つの overtwisted な接触構造 (M, ξ_0) と (M, ξ_1) の平面場のホモトピー類が一致しているならば、それらは接触同相である。

ξ_0 と ξ_1 の平面場のホモトピー類が一致していなければ (M, ξ_0) と (M, ξ_1) は接触同相になり得ないので、この定理はつまりは、overtwisted な接触構造の分類と平面場のホモトピー類の分類が等価であることを主張している。したがって、overtwisted な接触構造の分類を研究する際には、わざわざ接触構造を持ち出す必要はない、という結論になる。

例 1.14. S^3 上の平面場のホモトピー類はホップ不変量 $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ により分類される。つまり、 S^3 上の overtwisted な接触構造は $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ 個存在することになる。一方で、Eliashberg の定理 1.12 により tight な接触構造は一意的であった。つまり、 S^3 には $\mathbb{Z}+1$ 個の接触構造が存在し、これで S^3 上の接触構造の分類が完了したことになる。

1.3. Fillable \Rightarrow Tight. Tight 性を証明する方法は2つで、Bennequin が証明したように overtwisted disk が存在しないことを証明するか、あるいはこの節で説明する fillability を利用するか、である。 W を、 M を境界とする4次元多様体とする。狭義多重劣調和関数 $h: W \rightarrow \mathbb{R}$ で、下に有界であり、かつ、 $W = h^{-1}(0) = M$ となるものが存在するとき、 M には自然に接触構造が入る。このとき、 $h^{-1}((-\infty, 0])$ を **Stein** 多様体といい、接触多様体 (M, ξ) は **Stein fillable** であるという。より広い設定として、 W がシンプレクティック多様体 (W, ω) であり、 $\mathcal{L}_v \omega = \omega$ を満たす M に横断的なベクトル場 v が存在するとき、 M には自然に接触構造が入る。このとき、接触多様体 (M, ξ) は **symplectically fillable** であるという。 (M, ξ) は Stein fillable ならば symplectically fillable である。⁴

次の定理が要となる。

定理 1.15 (Gromov, Eliashberg '85 [14, 5]). (M, ξ) は、symplectically fillable ならば tight である。

特に、Stein fillable ならば symplectically fillable なので、tight である。

例 1.16. S^3 を \mathbb{C}^2 内の単位球体 B^4 の境界とみなす。このとき、原点からの距離関数の2乗 $\|\mathbf{x}\|^2$ は狭義多重劣調和関数であり、 $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ とおくと $h^{-1}(0) = S^3$ である

⁴Strongly symplectically fillable とか、weakly symplectically fillable とか、いろいろある。正しい参考文献は分からないが、[9] に定義や包含関係が書かれている。

ことから、 S^3 には接触構造が入る。この接触構造が S^3 の標準的接触構造である。 S^3 上の点 \mathbf{x} における接平面 $T_{\mathbf{x}}S^3$ を H とし、 H を \mathbb{C}^2 の複素構造で回転させた平面を JH とすると、 $H \cap JH$ は接平面 $T_{\mathbf{x}}S^3$ 内の超平面となる。点 \mathbf{x} を S^3 全体に動かして得られる平面場 ξ_{std} が S^3 の標準的接触構造である。

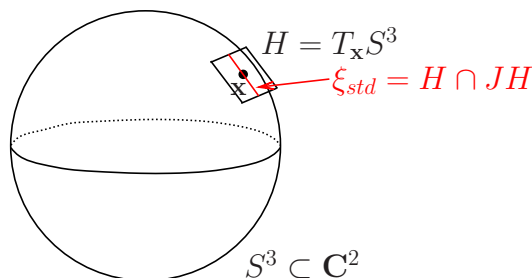


図 4. $H \cap JH$.

例えば $f(z_0, z_1, z_2)$ を $f(0, 0, 0) = 0$ をみたす 3 変数の複素多項式とし、原点は孤立特異点であるとする。このとき、特異点のリンク

$$L_f = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid f(z_0, z_1, z_2) = 0, |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = \varepsilon^2\}$$

は 3 次元多様体となる。 $h(x, y, z) = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 - 1$ は狭義多重劣調和関数であるから、この 3 次元多様体には自然に接触構造が入り、定理 1.15 によりこの接触構造は tight であることが従う。

例 1.17. $f(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^3 + z_2^5$ としたとき、 L_f は Poincaré ホモロジー球面であり、そこには上述のように、 \mathbb{C}^3 の複素構造から自然に tight な接触構造が入る。

1.4. 凸曲面と Poincaré ホモロジー球面. Giroux の最初の仕事は、いわゆる凸曲面理論と呼ばれるもので、3 次元接触多様体内の曲面上に現れる特性葉層をコントロールする理論である。 M 上の接触構造 ξ に対し、 ξ を保つベクトル場 X を M 上の接触ベクトル場という。式で書くと、 $\mathcal{L}_X \alpha = \lambda \alpha$, $\lambda \in C^\infty(M)$, となる。この式は $\ker \alpha$ に制限すると Lie 微分が消えることを意味する。Reeb ベクトル場 R_α は $\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = 0$ であったので、Reeb ベクトル場も接触ベクトル場であるが、Reeb ベクトル場が一意的なのに対し、接触ベクトル場は“非常に沢山”存在する。接触多様体内の閉曲面 Σ に対し、それと横断的な接触ベクトル場が存在するとき、 Σ を凸曲面という。重要なことは、接触ベクトル場を使うことで、凸曲面の近傍の接触構造が接触ベクトル場方向に不変になっていると仮定できることである。このような凸曲面は、実は与えられた曲面を微小変形して作れることが知られ

ており、汎用性の非常に高い設定になっている。この性質を利用することで曲面の近傍を使った3次元多様体の切り貼りが簡単に実行できるようになり、3次元接触多様体の研究が大きく進展していくことになる。

この研究の流れの最大の成果は、Etnyre と Honda による次の結果である（と私は思っている）。

定理 1.18 (Etnyre, Honda '01 [8]). Poincaré ホモロジー球面で向きを逆向きにしたものには tight な接触構造は入らない。よって、Poincaré ホモロジー球面とその向きを逆にした多様体との連結和には、正負に関わらず、tight な接触構造は入らない。

証明は、tight な接触構造が入ると仮定し、凸曲面理論により Poincaré ホモロジー球面内に凸曲面を準備し、それを整備することで矛盾を導く。

Gompf は Stein 多様体の境界として得られるザイフェルト多様体を調べていくうちに、Poincaré ホモロジー球面で向きを逆向きにしたものは Stein 多様体の境界にはなりにくいことを発見し、実際に境界にはならないと予想とした [12]。それに対し、Lisca は Poincaré ホモロジー球面で向きを逆向きにしたものには symplectically fillable な接触構造は入らないことを、正曲率多様体におけるモノポール不変量を使って証明した [20]。特に Stein fillable な接触構造は入らないので、Gompf の予想は肯定的に解決されたことになる。これを受けて、Poincaré ホモロジー球面で向きを逆向きにしたものは「任意の3次元多様体は tight な接触構造を許容する」という主張の反例候補として注目され、Etnyre と Honda によってそれが実際に反例となることが示されたという流れである。

凸曲面理論は tight な接触構造の分類に有効に機能する。例えば、Honda によるレンズ空間等の tight な接触構造の分類 [17] は、凸曲面理論の典型的な応用といえる。また、上述の定理 1.18 も tight な接触構造が存在しないという分類問題であり、凸曲面理論が有効に機能している。一方で、tight な接触構造の存在を証明したいという場合は、凸曲面理論が役に立たないことが多い（というか、私は役立った記憶が無い）。Tight なピースを貼り合わせても得られた多様体が tight とは限らないことが一番の原因である。Tight 性を証明する場合は、前節の fillability を直接利用するか、被覆などを利用して tight な空間に埋め込むか、あるいは次節で紹介する定理 1.22 を使ってオーブンブック分解から結論を得るのが主流である。

1.5. **Giroux 対応.** Σ を向き付けられた境界付き曲面とし、 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を $\phi|_{\partial\Sigma}$ が恒等写像であるような微分同相写像とする。 $\Sigma \times [0, 1]$ の境界上の点に対し、同値関係 \sim を以下で定める。

- $(x, 1) \sim (\phi(x), 0)$, $x \in \Sigma$
- $(y, 0) \sim (y, t)$, $y \in \partial\Sigma$, $t \in [0, 1]$

3次元多様体 M が $\Sigma \times [0, 1]/\sim$ と同相であるとき, (M, Σ, ϕ) を M のオープンブック分解という. ここで M の向きは $\Sigma \times [0, 1]$ の向きで定める.

定義 1.19. (M, ξ) を接触多様体, (M, Σ, ϕ) を M のオープンブック分解とする. M 上の接触形式 α で以下の条件を満たすものが存在するとき, (M, ξ) と (M, Σ, ϕ) は両立するという.

- $\xi = \ker \alpha$
- α の Reeb ベクトル場 R_α は, 各 $t \in [0, 1]$ について, $(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \times \{t\}$ と正の方向に横断的に交わる.
- R_α は $\partial\Sigma$ と接していて, その向きは Σ の向きから定まる $\partial\Sigma$ の向きと一致している.

Thurston と Winkelnkemper はこの対応を用いて, 任意の3次元多様体は接触構造を許容することを証明した. Giroux はさらに, そのような接触構造は一意的に定まることを証明した.

定理 1.20 (Giroux '02 [11]). (M, ξ_0) と (M, ξ_1) が同じオープンブック分解 (M, Σ, ϕ) と両立するならば, (M, ξ_0) と (M, ξ_1) は接触同相である.

Giroux はさらに次の定理を証明する.

定理 1.21 (Giroux '02 [11]). 任意の3次元接触多様体に対し, それと両立するオープンブック分解が存在する.

証明の流れは, まず, 接触多様体をルジャンドル曲線⁵を辺とする四面体により四面体分割し, さらにそれを細分することで, 各四面体が Darboux の定理の近傍に入っていると仮定する. 特にこの近傍内では接触構造は tight である. この tight 性を利用して, 四面体分割の 1-skeleton のリボンとして得られる曲面がオープンブック分解のファイバー曲面であることを, Gabai の sutured 理論を使って証明する. 証明の概要は Etnyre の Lecture note [7] に書かれている.

これらの定理から次の対応が考えられる.

⁵接触多様体内の曲線で, 曲線上の各点において曲線の接ベクトルが接触構造の平面場の平面に含まれているとき, 曲線をルジャンドル曲線という.

$\{ 3 \text{次元接触多様体} \} / \text{接触同相写像} \xrightarrow{1:1} \{ 3 \text{次元多様体のオープンブック分解} \} / \text{move}$

上の2つの定理は、この対応の右から左への写像の存在と全射性を証明している。対応において“move”と書いた部分には、ファイバー曲面に正のホップリンクのファイバー曲面を貼り合わせる、正の plumbing という操作が対応する。接触多様体とオープンブック分解の間のこの1対1対応のことを、**Giroux 対応**という。

実際に1対1対応であることを主張するためには、同じ3次元接触多様体と両立する2つのオープンブック分解は正の plumbing とその逆操作の繰り返しで移り合うことを証明する必要がある。この主張は Harer 問題と呼ばれるファイバーリンクの問題 [16] を強くした主張になっている。私の知る限り、証明が書かれた文献は存在しない。⁶

定理 1.15 を使って接触構造の tight 性を証明する場合は、その接触多様体を境界にもつ Stein 多様体やシンプレクティック多様体を構成すれば良いことになる。Giroux 対応を経由して接触構造を研究する場合には、次の定理が有効に機能する。

定理 1.22 (folklore). オープンブック分解 (M, F, ϕ) のモノドロミー ϕ が右手デーネ捻りの積で表せるとき、その接触構造は Stein fillable である。よって、それは特に tight である。

正則ファイバーの近傍は自明束であり、その境界はファイバー曲面 Σ が境界つき曲面であることから、 $S^2 \times S^1$ の有限個の連結和になる。この境界に現れる接触構造は Stein fillable である。⁷ 各右手デーネ捻りは $\Sigma \times D^2$ の境界への 2-handle attaching で実現できるが、これを境界上のルジャンドル曲線に沿って実現することで、2-handle attaching 後の境界付き4次元多様体を Stein 多様体とすることができ、右手デーネ捻りを差し込んだオープンブック分解と両立する接触構造が Stein fillable であることが従う。証明はどこかに書いてあった気もしたのだが、見つけれない。真面目に書くと多少面倒な気がするので、深入りをするのは止めておく。

2. スパイン上の特性葉層と接触構造

Benedetti と Petronio は論文 [1] において、接触多様体内に埋め込まれたスパインに描かれる特性葉層についての研究を行っている。彼らは、曲面上の特性葉層がその近傍の接

⁶Etnyre の Lecture note [7] の最後の演習問題が解ければ証明は完了するが、私はそれは難しいと思っているし、そもそも接触トポロジーでは証明できないと思っている。

⁷従って、この接触構造は tight である。Eliashberg により $S^2 \times S^1$ の tight な接触構造は接触同相を法として一意的であることが知られており [6]、それらの連結和の tight な接触構造も一意となる。

触構造を一意的に決定する性質に着目し、スパインと特性葉層に対し、そこから3次元接触多様体が復元できるか、そしてそれは一意的か、という問題設定で研究を行っている。

2.1. **Benedetti と Petronio の結果.** 彼らの記号に合わせ、 \hat{M} を向き付けられた閉3次元多様体、 $M = \hat{M} \setminus \text{Int}B^3$ とする。

定義 2.1. 分岐 (branched) スパイン P 上の葉層 \mathcal{F} の特異点が P の特異集合上になく、かつ、 \mathcal{F} と P の特異集合との接点が図 5 のような接し方しかないとき、これを **S-安定葉層** という。

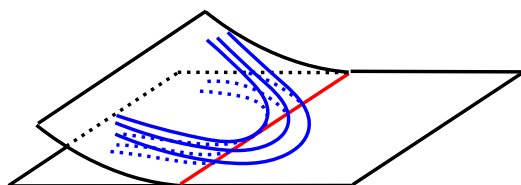


図 5. S-安定葉層の葉と特異集合との接点.

S-安定葉層という概念を導入した理由は、アブストラクトに与えられた分岐スパインとその上の葉層から接触構造を復元することを目標としているためである。葉層の葉が図 5 とは逆側から接してしまうと、2枚の羽側のそれぞれに特異集合上の2点を両端とする葉が現れ、それらの整合性を保証する付加的な条件が必要となる。そのため、図 5 の接点のみに限定して話を進めている。

定理 2.2 (Theorem A [1]). P を \hat{M} 内の分岐特殊 (branched special) スパインとし、 \mathcal{F} を P 上の非零発散 (nonzero divergence) の孤立特異点⁸しか持たない S-安定葉層とする。このとき、 P 上の特性葉層が \mathcal{F} となるような接触構造が存在する。

さらに、 P のフロースパインとしての \hat{M} への別の埋め込み (区別するために P' と書く) と \hat{M} の接触構造 ξ' で、その特性葉層 \mathcal{F}' について、 (P, \mathcal{F}) と (P', \mathcal{F}') がアブストラクトに微分同相なものが存在するならば、 P の近傍 U および P' の近傍 U' で $(U, \xi|_U)$ と $(U', \xi'|_{U'})$ が接触同相となるものが存在する。

彼らはさらに注意として、 $(U, \xi|_U)$ と $(U', \xi'|_{U'})$ の間の接触同相写像は P を P' に移すとは限らず、 (P, \mathcal{F}) が germ として接触構造を決定することはできない、と書いている。

⁸発散が 0 となる特異点は同心円状の葉層の中心にある特異点で、そのような点は接触構造の特性葉層には現れない。

Theorem A の後半の主張は論文の Theorem 4.1 (ii) に対応し、その証明は Theorem 4.1 (i) に帰着される。(i) の証明の中で Proposition 3.5 を引用しているのだが、ここでは P と P' の特異集合近傍での接触構造を一致させ、それを各面に拡張した後に、一変数族で繋いで接触構造が接触同相であることを示している。この一変数族は P を P' に移すわけではないため、germ としては決定できないという結論になる。Theorem 4.1 (i) の証明の最初に、“*We first choose a diffeomorphism $f : M \rightarrow M$ such that $f \circ i_1$ is arbitrarily C^∞ -close to i_0* ” と書かれている。ここで i_0 と i_1 は分岐スパインの M への埋め込みである。この引用文から判断すると、 P と P' の葉層を一致させる微分同相は C^∞ -close にしか作れないらしい。⁹ また、この引用文では埋め込んだ後のスパインをお互いに移す微分同相の存在が仮定されているので、例えば、アワビとその鏡像は“アブストラクトに”微分同相とはみなしてはいない。

彼らの論文の最初のページには以下の主張が書かれている。

主張 (81 ページの (1) [1]). 接触多様体 (\hat{M}, ξ) に埋め込まれている任意の分岐曲面 P に対し、その近傍の接触構造 ξ の germ は、 ξ の P 上での特性葉層により、 P を保つ isotopy を法として決定される。

この主張では P は分岐曲面でありスパインである必要はなく、また特性葉層も S-安定とは仮定されていない。つまり、分岐曲面 P を固定して特性葉層を見た場合は、その近傍の接触構造は一意的に定まる。定理 2.2 との違いは、この主張では P を固定している点である。 P と P' を微分同相で対応させる必要がある場合は、葉層を C^∞ -close にしか近づけることができず、germ として一意的とは結論付けられない、ということらしい。

定理 2.3 (Theorem B [1]). (\hat{M}, ξ) を接触多様体、 P を \hat{M} 内の特殊分岐スパイン、 \mathcal{F} を ξ の P 上の特性葉層とする。 P の近傍 U で $(U, \xi|_U)$ は tight であるとする。このとき \hat{M} の tight な接触構造で、 P 上の特性葉層が \mathcal{F} と一致するものが接触同相を法として一意的に存在する。さらに、 P がフロースパインであり、かつ、すべての特異点が正の発散であるならば、 ξ は P のフローと同じホモトピー類に属する。

これらの定理はスパインの近傍の葉層にのみ注目しているため、スパインによる接触構造への縛りが少ない。実際、次節の S-安定葉層の構成の際に述べるように、定理 2.2 で得られる接触構造の Reeb ベクトル場は、大抵の場合はフロースパインと横断的にはなら

⁹前後の文章から察するに、最初に特異集合近傍の葉層を一致させ、次にそれを内部に拡張するという方法で、内部に拡張する際に C^∞ -close にしか作れないと読み取れる。そうなると、これは分岐スパインの性質ではなく、通常の曲面でも同じ結論となるように思える。(つまり、葉層の方々の常識?)

ず、接触構造の平面場が割と自由に動いてしまうことが分かる。定理 2.3 では P の近傍の tight 性を仮定することで、縛りを強くしている。

Overtwisted な接触構造に興味がある場合には、彼らの論文の次の命題が良い考察を与えている。

命題 2.4 (Proposition 4.3 [1]). (\hat{M}, ξ) を接触多様体とし、 $M = \hat{M} \setminus \text{Int}B^3$ とする。このとき、 (\hat{M}, ξ) が tight であることと、 $(B^3, \xi|_{B^3})$ および $(M, \xi|_M)$ の両方が tight であることは必要十分である。

この命題の証明では、 B^3 の内側から外側に向かう接触ベクトル場によって overtwisted disk を流すことで、overtwisted disk をスパインの近傍 M に押し込めるという手法を用いている。つまり、 (\hat{M}, ξ) が overtwisted disk を持つならば、それはスパインの近傍 M で発見できるということになる。具体的にどのようにして発見できるかは未だ不明であり、面白い問題となる。ただし、スパイン上の葉層を単に見るだけでは overtwisted disk は発見できないので、注意が必要である。実際、アブストラクトに用意されたアワビとその上の葉層について、それを l -型の頂点をもつアワビとして S^3 に埋め込むか、 r -型の頂点をもつアワビとして埋め込むかで、一方は tight な接触構造に対応し、他方は overtwisted な接触構造に対応する、という状況が考えられる。この場合、一方からは overtwisted disk が発見できるが、他方からは発見できないという結論になるはずであり、これをスパインと葉層の情報から読み分ける必要がある。

2.2. S-安定葉層の構成. 東北大学時代の学生の半田伸氏の修士論文では、S-安定葉層についての考察が行われている（現在、プレプリントを執筆中 [15]）。特に、Poincaré ホモロジー球面の DS 表示（正 1 2 面体）上の S-安定葉層は、例えば図 6 のように与えられる。

定理 2.2 によれば、このような S-安定葉層に対し、それを特性葉層とするような接触構造が Poincaré ホモロジー球面に入ることになる。ここで重要なことは、この葉層の葉はすべてルジャンドル曲線である。次章では接触構造の Reeb ベクトル場をフロースパインのフローとみなすが、その場合には葉層の位置に強い制限が加わる。このことは、admissibility 条件の節の例 3.6 で説明する。逆に言うと、定理 2.2 で得られる接触構造の Reeb ベクトル場は、ほとんどの場合はフロースパインと横断的にはなっていないことになる。また、Benedetti と Petronio の論文では、S-安定ではないフロースパインを接触多様体内で C^0 -微小変形することで S-安定にできることが書かれているが、この微小変形は C^0 -変形のため、Reeb ベクトル場とスパインとの横断性については何が起こるか把握することはできない。

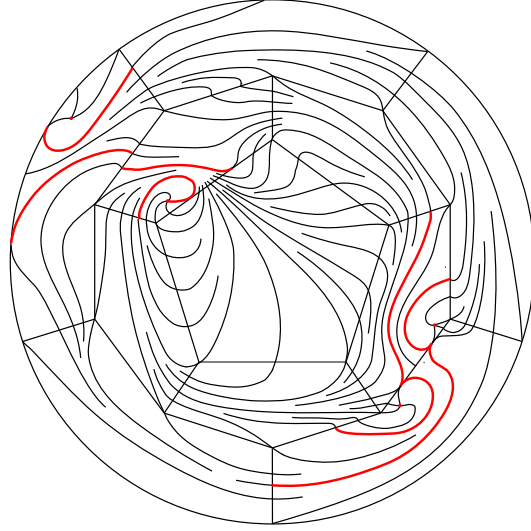


図 6. Poincaré ホモロジー球面のフロースパイン上の S-安定葉層.

3. 接触構造とフロースパインの対応

3.1. 正フロースパイン. 接触構造とフロースパインの間に対応を与える際に, 接触構造の Reeb ベクトル場が作るフローをフロースパインのフローとみなす. 特に, Reeb ベクトル場はフロースパインと横断的に交わる. ここでフロースパインの面の 1 つを R とすると, Reeb ベクトル場は R に横断的に交わることになる. R 上の局所座標を (u, v) とすると,

$$0 < \alpha \wedge d\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, R_\alpha \right) = d\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

より, $d\alpha|_R > 0$ が成り立つことが分かる. よって, ストークスの定理より, R の境界 ∂R に沿った接触形式 α の積分値は

$$\int_{\partial R} \alpha = \int_R d\alpha > 0$$

となる. つまり, 接触構造の Reeb ベクトル場が作るフローをフロースパインのフローとみなした場合, フロースパインの各辺への実数値の配分で, 各面の境界に沿った符号付き和が正となるものが存在することが必要条件となる.

定義 3.1. フロースパイン P に対し, P の辺への実数の配分で, 各面の境界に沿った符号付き和が正となるものが存在するとき, P は **admissible** であるという.

例 3.2. 図 7 は $S^2 \times S^1$ のフロースパインを表す. 左の図の S^2 の補空間は 3 次元球体ではないので, これはスパインではないが, 中央の図のように多面体を変形させることで,

$S^2 \times S^1$ のフロースパインを構成することができる。このスパインは頂点を持たないが、頂点を持つものは右図のようにスパインを変形すれば簡単に作ることができる。この S^2 と横断的に交わる Reeb ベクトル場が存在すると仮定する。その接触形式 α を S^2 上で積分すると、ストークスの定理から $0 < \int_{S^2} d\alpha = \int_{1\text{点}} \alpha = 0$ となり、矛盾が生じる。よってこのフロースパインに対しては、Reeb ベクトル場がそのフローとなるような接触構造は存在しないことが分かる。実際、このスパインは admissible ではない。

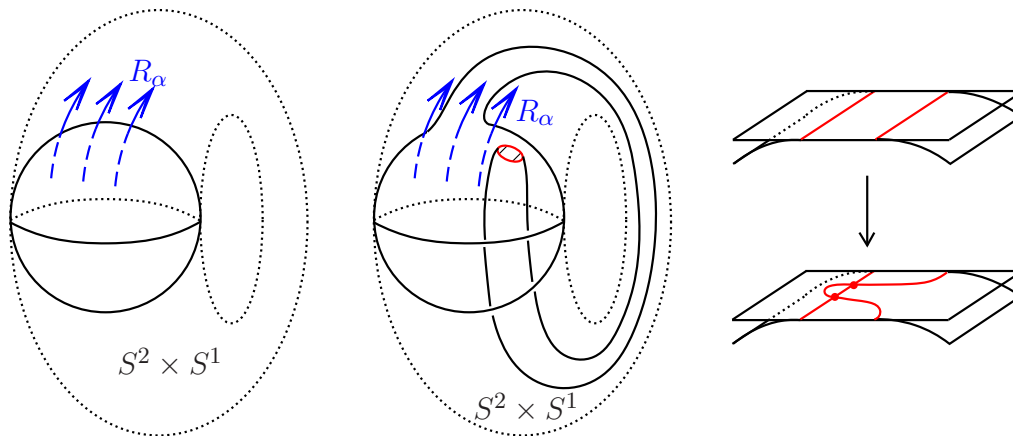


図 7. $S^2 \times S^1$ のフロースパイン.

例 3.3. 図 8 はアワビ (abalone) の DS 表示である。面 R_1 の境界は $e_1 + 2e_2$ であり、面 R_2 の境界は $-e_2$ である。接触形式 α の各辺に沿った積分値を $A = \int_{e_1} \alpha$, $B = \int_{e_2} \alpha$ とおくと、 R_1 の境界および R_2 の境界での α の積分値が正になるという条件は、

$$A + 2B > 0, \quad -B > 0$$

となる。例えば $A = 3, B = -1$ とすれば、積分値の分配を設定することができる。よって、このスパインは admissible である。

次の補題から分かるように、割と多くの場合に、分岐スパインは admissibility 条件を満たす。

補題 3.4 ([19]). 有理ホモロジー球面内の特殊分岐スパインはすべて admissible である。

フロースパイン上の特性葉層の葉はすべてルジャンドル曲線であり、接触形式 α をその曲線で積分した場合、積分値は常に 0 になる。このことは、フロースパイン上に現れる葉層に強い制限を与える。

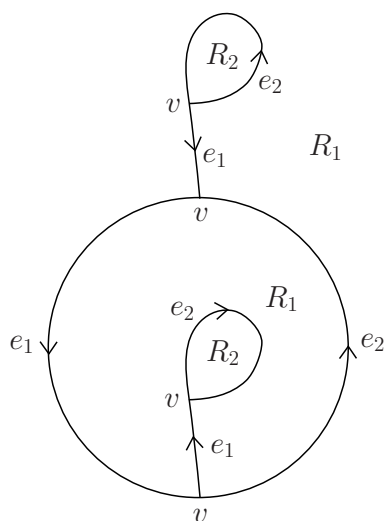


図 8. アワビの DS 表示.

例 3.5. Reeb ベクトル場がフロースパインと横断的に交わるという設定のもと，図 9 のアワビの上のコイルはルジャンドル曲線で実現できるか，という問題を考える．この場合，斜線で塗られた領域 R' の境界を積分すると，積分値が $2B < 0$ になることが分かる．よって $0 > \int_{\partial R'} \alpha = \int_{R'} d\alpha > 0$ となり，矛盾が生じる．つまり，図のコイルはルジャンドル曲線にはならないことが従う．特に，この設定下では，このコイルの曲線を葉とする特性葉層は存在しないことになる．

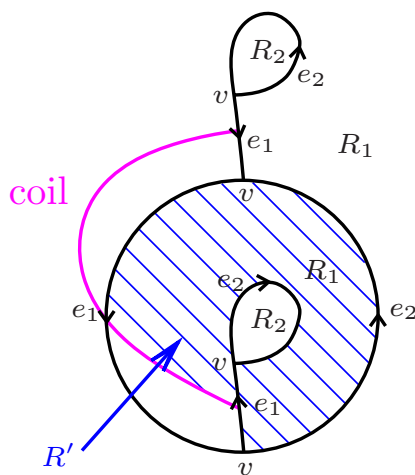


図 9. Reeb ベクトル場がスパインと横断的なら，このコイルはルジャンドル曲線にはならない．

例 3.6. 図 6 の特性葉層について考える. 赤で書かれている曲線をルジャンドル曲線にできるかどうかを判定するためには, 赤い曲線で面を分割し, 細分された面たちに対して admissibility 条件を確認すればよい. このとき, 赤い曲線に沿った積分の値は常に 0 になるので, そこへの実数の配分は 0 となる. つまり, 特異集合を赤い曲線の端点で分割し, その弧たちに各面の境界に沿った符号付き和が正となるような実数の配分が存在することを確認すればよい. 実際, 図 6 の赤い曲線によるスパインの分割は admissibility 条件を満たし, よって赤い曲線をルジャンドル曲線とすることができる. さらに, この葉層を特性葉層とする接触構造で, Reeb ベクトル場がフロースパインと横断的であるものが構成できる [15].

フロースパインと接触構造との対応に話を戻す. 対応を与えるためにフロースパインに課す条件は admissibility 条件のみで大丈夫かということ, そういうわけでもなく, 次の定理が確認できている.

定理 3.7 ([19]). M を tight な接触構造を許容する 3次元多様体とする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.

- (1) M のフロースパインで, フローを Reeb ベクトル場のフローで実現できないものが存在する;
- (2) M のフロースパインで, 接触同相でない 2つの接触構造の Reeb ベクトル場が共にフローとなるものが存在する.

この定理の証明では, フローがホモトピックであるならば, そのフロースパインはある move で移り合うという結果 [18] を利用する. この定理により, 接触構造とフロースパインの対応を単に「Reeb ベクトル場がフローになっている」と定義するだけでは対応の存在あるいは一意性が成り立たず, この枠組みだと分類を行ったとしても平面場のホモトピー類の分類程度の話しか作れないことがほぼ確定する. 接触トポロジーの面白さは tight な接触構造というホモトピー類では決定できない性質にあるので, これだと接触構造を研究する意味は無くなることになる.

そこで, そしてもう少し技術的な理由により, l -型の頂点のみをもつフロースパインに着目する. ここで l -型の頂点とは, 図 10 の左図の頂点のことであり, 右図の方を r -型という. 技術的な理由については, 第 3.2 節で説明する.

箱根セミナーのときは, フロースパインが admissible であり, かつ, すべての頂点が l -型であるとき, これを正フロースパインと定義していたのだが, その後, 石井氏により次の補題が示されている.

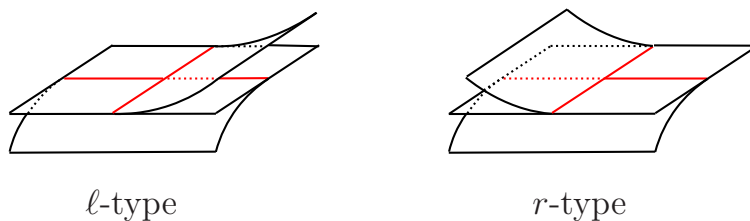


図 10. l -型の頂点と r -型の頂点.

補題 3.8 ([19]). 頂点の数が1つ以上であり, かつ, l -型の頂点しか持たないフロースパインは admissibility 条件をみたす.

この証明は l -型の DS 表示上の組み合わせ的性質を利用するもので, l -型に着目することの恩恵が見える面白い証明である.

この補題により正フロースパインを定義する際には admissibility 条件の記載は不要となり, 結果, 以下のように定義される.

定義 3.9. 頂点の数が1つ以上であり, かつ, l -型の頂点しか持たないフロースパインを正フロースパインという.

この定義のもと, 接触構造とフロースパインの対応を以下のように定義する. 前章では Benedetti と Petronio に合わせて \hat{M} を3次元多様体としたが, 以後は元に戻し, M を3次元多様体とする.

定義 3.10. (M, ξ) を接触多様体, P を M の正フロースパインとする. M 上の接触形式 α で以下の条件を満たすものが存在するとき, (M, ξ) と P は両立するという.¹⁰

- $\xi = \ker \alpha$
- R_α の作るフローは P のフローである.

よって, 目標とするのは次の1対1対応となる.

$$\{ \text{3次元接触多様体} \} / \text{接触同相写像} \xrightarrow{1:1} \{ \text{正フロースパイン} \} / \text{move}$$

3.2. 写像の存在と全射性. 論文 [19] では次の2つの定理を証明した.

定理 3.11 ([19]). 任意の正フロースパインに対し, それと両立する接触構造が一意的に存在する.

¹⁰英語では Giroux 対応の際の Giroux の言葉に合わせ, P supports ξ と言うのが格好良い.

定理 3.12 ([19]). 任意の 3 次元接触多様体に対し, それと両立する正フロースパインが存在する.

この 2 つの定理により, 以下の写像の存在とその全射性が示されたことになる.

$$\{ \text{3次元接触多様体} \} / \text{接触同相写像} \xrightarrow{\text{全射}} \{ \text{正フロースパイン} \}$$

1 対 1 対応を得るためには, 接触同相類を変えない正フロースパインの move を導入し, 同じ接触多様体と両立する正フロースパインはすべてその move で移り合うことを示す必要がある. これはまだまだ難しいので, かなり先の課題になると考えている.

オープンブック分解に話を一度戻す. Giroux 対応の証明の手順は以下のようになっている.

1. (M, F, ϕ) をオープンブック分解とする. オープンブックのページ (ファイバー曲面) 上に, 1-形式 β で, $d\beta > 0$ となるものを用意する.
2. オープンブックのモノドロミーの方向の座標を $\theta \in S^1$ として, 1-形式 α を $\alpha = \beta + d\theta$ で定めると,

$$\alpha \wedge d\alpha = (\beta + d\theta) \wedge d\beta = d\beta \wedge d\theta > 0$$

より, これは接触形式となる.

3. Martinet, Lutz のデーン手術の要領でオープンブック分解のバインディングの部分 を埋めることで, M の接触構造が得られる. ここまでが Thurston-Winkelnkemper の手法である.
4. オープンブック分解と両立する接触形式 α に対し, $\alpha_R = \alpha + Rd\theta$ とすると,

$$\alpha_R \wedge d\alpha_R = (\alpha + Rd\theta) \wedge d\alpha = \alpha \wedge d\alpha + Rd\alpha \wedge d\theta > 0$$

より, 任意の $R \geq 0$ に対し, これは接触形式となる. ここで $d\alpha \wedge d\theta > 0$ は, 曲面上の局所座標を (x, y) とすると $\alpha \wedge d\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \theta}) > 0$ より $d\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) > 0$ となり, $d\alpha \wedge d\theta(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, R\alpha) = d\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})d\theta(R\alpha) > 0$ となることから確認できる.

5. オープンブック分解と両立する 2 つの接触形式 α_0 と α_1 が与えられたとする. このとき, $\alpha_s = (1-s)\alpha_0 + s\alpha_1$ とし, $\alpha_{s,R} = \alpha_s + Rd\theta$ とおくと,

$$\alpha_{s,R} \wedge d\alpha_{s,R} = (\alpha_s + Rd\theta) \wedge d\alpha_s$$

となる. ここで第 1 項には $\alpha_0 \wedge d\alpha_1 + \alpha_1 \wedge d\alpha_0$ という項が入り, これの正負が分からなくなるのだが, 第 2 項の $Rd\theta \wedge d\alpha_s$ の R を十分大きく選ぶことで, 第 1 項の正負に関わらず, 全体を s によらずに正とすることができる. 以上から, α_0 と α_1 を

接触形式の族 $\alpha_0 + Rd\theta$ ($R \geq 0$), $\alpha_{s,R}$ ($s \in [0, 1], R \gg 0$), $\alpha_1 + Rd\theta$ ($R \geq 0$) により繋ぐことができたので、定理 1.7 (Gray の定理) により $\ker \alpha_0$ と $\ker \alpha_1$ は接触同相であることが従う。以上で、一意性の証明が完了する。

この証明は、 $Rd\theta$ という項を加えることが重要なポイントになっている。感覚的なことを言えば、 $\alpha + Rd\theta$ の R が十分大きくなると $d\theta = 0$ に近づき、接触構造の平面場はオープンブックのファイバーが作る葉層に近づくことになる。このような状態に持ち込めば、2つの接触構造を一変数族により繋ぐことができるという仕組みである。ここでは特に、 $d\theta$ が閉形式であることが重要なキーになっている。

フロースパインに対して同様の考察を行うのであれば、まず最初に、 $d\theta$ に対応する 1-形式は何なのかを考える必要がある。論文 [19] ではこの 1-形式を η と書き、リファレンス 1-形式と呼んでいる。フロースパインの面の近傍 $R_i \times [0, 1]$ では、 $[0, 1]$ の座標を t_i とすると、1-形式は $\eta = dt_i$ で定義するのが妥当であろう。特異集合の近傍での定義は、特異集合を辺および頂点の近傍に分け、それぞれについて同様に $\eta = dt_j^k$ の形で定義する。特に頂点の近傍での 1-形式 dt_j^v と $R \times [0, 1]$ の dt_i との貼り合わせは図 11 のようになる。この図の頂点は l -型である。左図の $R_i \times [0, 1]$ の境界付近の接触構造の葉層は右図から誘導されるもので、図のように斜めになるのだが、 $R_i \times [0, 1]$ の中心付近では $\eta = dt_i$ と設定しているので、水平になっていないといけない。この間の平面場を自然に繋ぐと、図 1 と同じ捻りになっていることが分かる。実際、この設定で計算をすると、 $\eta \wedge d\eta \geq 0$ という不等式が得られる。Giroux 対応のときは $d\theta$ が閉形式のため、 $d(d\theta)$ の項はすべて消えて、計算が上手く機能していた。今回の場合は $d\eta$ は消えないのだが、不等式 $\eta \wedge d\eta \geq 0$ を用いることで、同様の計算が上手く機能することになる。

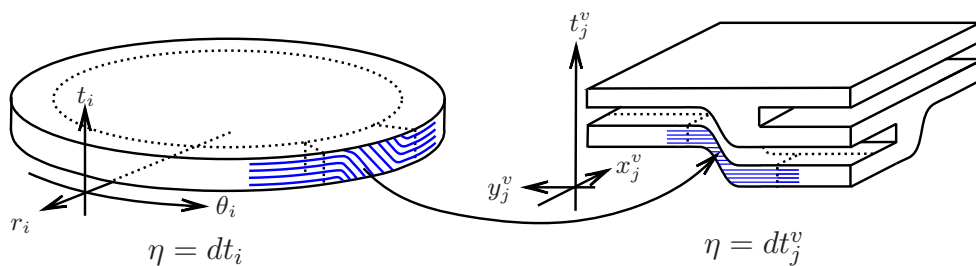


図 11. l -型の頂点の近傍における 1-形式 η の動き。

頂点が r -型の場合には、この捻りは逆になるので、不等式 $\eta \wedge d\eta \geq 0$ が成り立たず、証明を組み立てることができなくなる。これが l -型の頂点のみをもつフロースパインを考える技術的な理由である。

この 1-形式 η はまだ正フロースパインの近傍でしか定義されていないので、これを $M \setminus \text{Int Nbd}(P; M)$ の自然な積構造を利用して、3次元多様体 M 全体に拡張する。この η を Giroux 対応の $d\theta$ の代わりに用いることで、定理 3.11 が証明される。ただし、オープンブックのようなきれいな構造をベースにしていないので、証明は技術的にかなり複雑なものになる。

定理 3.12 は以下の手順で証明される。

1. 接触構造が与えられたとき、定理 1.21 より、それと両立するオープンブック分解が存在する。そのモノドロミーをデーン捻りの積で表し、そのワードの長さ $\times 6$ 枚のページを正フロースパインの一部となる多面体として準備する。
2. 各デーン捻りのワードに合わせて、多面体にさらに面を加える。得られら多面体の各面には、オープンブック分解のモノドロミーベクトル場が正の向きに横断的に交わるように向きを入れることができる。さらに多面体を変形して、これを正フロースパインにする。モノドロミーベクトル場はこの正フロースパインのフローとなる。
3. 定理 3.11 により、この正フロースパインと両立する接触構造が存在する。その Reeb ベクトル場はオープンブックのページと横断的ではあるが、バインディングに接しているとは限らない。そこで、この接触形式をバインディングの近傍で取り直し、正フロースパインと両立し、かつ、オープンブック分解とも両立する接触形式に置き換える。
4. 得られた接触構造は最初に与えられた接触構造と同じオープンブック分解と両立するので、定理 1.20 により、これら 2 つの接触構造は接触同相であることが分かる。よって、上で構成したフロースパインは最初に与えられた接触構造と両立する。

一番の難所は手順 2 の正フロースパインの構成である。すべての頂点が ℓ -型であるフロースパインの構成は非自明で、当初はすべてのオープンブック分解に対してそのような正フロースパインを構成するのは無理なのでは、とっていたほどである。

3.3. 気になっている問題.

問 3.13. S^3 上のホップ束に沿ったフローと横断的に交わるように、 S^3 にアワビを置くことはできるか？

この問題はあまり重要ではないが、YES とも NO とも言えず、微妙な問題である。ちなみに、石井氏からはホップ束と横断的に交わるフロースパインの DS 表示を頂いている。

問 3.14. r -型のアワビに対し、Reeb ベクトル場がフローとなるような S^3 上の接触形式は存在するのか？

この問題もあまり重要ではないが、YES とも NO とも言えず、微妙な問題である。フロースパイน์と接触構造の対応を l -型に限定せずに別のアイデアで定義しようと思った場合には、この質問は重要になる。

問 3.15. 与えられた Reeb ベクトル場に対し、それと横断的に交わり、かつ、それをフローとする正フロースパイน์は存在するか？

定理 3.12 の証明では、与えられた接触構造に対して、それと両立するオープンブック分解を準備したり、Giroux 対応を使うなど、接触形式ではなく、接触構造であることを大いに利用している。しかし、もともとフロースパイน์はフローの力学系を読み取るための道具であり、Reeb ベクトル場を変形させた後に正フロースパイน์を作ったのでは、もともとの Reeb ベクトル場の力学系を読み取ることは不可能になる。上の問題は、正フロースパイน์は Reeb ベクトル場の力学系の研究のための道具となり得るか、という質問であり、その重要性は高い。特に、Weinstein 予想のフロースパイน์による別証明を目指すのであれば、この問いは不可避かもしれない。

その他、tight と overtwisted をどのように区別するかについて、皆さんといろいろ議論しているところである。具体的に与えられた正フロースパイน์の接触構造の tight 性の証明では、山下氏のコイル手術を利用するなど、箱根セミナーの研究の蓄積を大いに利用させて頂いている。この辺の話については、話がまとまるまでにもうしばらく時間がかかると思われるので、次の機会にまわすことにする。

参考文献

- [1] Benedetti, R., Petronio, C., *Branched spines and contact structures on 3-manifolds*, Ann. Mat. Pure Appl. **178** (2000), no. 4, 81–102.
- [2] Bennequin, D., *Entrelacements et equations de Pfaff*, Astérisque **107–108** (1983), 87–161.
- [3] Cho, S., McCullough, D., *The tree of knot tunnels*, Geom. Topol. **13** (2009), no. 2, 769–815.
- [4] Eliashberg, Y., *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), no. 3, 623–637.
- [5] Eliashberg, Y., *Filling by holomorphic discs and its applications*, Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 45–67, 1990.

- [6] Eliashberg, Y., *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **42** (1992), 165–192.
- [7] Etnyre, J. B., *Lectures on open book decompositions and contact structures*, Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology, 103–141, Clay Math. Proc., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [8] Etnyre, J. B., Honda, K., *On the nonexistence of tight contact structures*, Ann. of Math. **153** (2001), 749–766.
- [9] Etnyre, J. B., Honda, K., *Tight contact structures with no symplectic fillings*, Invent. Math. **148** (2002), 609–626
- [10] Giroux, E., *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici **66** (1991), 637–677.
- [11] Giroux, E., *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 405–414, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [12] Gompf, R.E., *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. **148** (1998), 619–693.
- [13] Gray, J.W., *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421–450.
- [14] Gromov, M., *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [15] Handa, S., Ishikawa, M., in preparation.
- [16] Harer, J., *How to construct all fibred knots and links*, Topology **21** (1982), 263–280.
- [17] Honda, K., *On the classification of tight contact structures. I*, Geom. Topol. **4** (2000), 309–368.
- [18] Ishii, I., *Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 297–312.
- [19] Ishii, I., Ishikawa, M., Koda, Y., Naoe, H., in preparation.
- [20] Lisca, P., *Symplectic fillings and positive scalar curvature*, Geom. Topol. **2** (1998), 103–116.
- [21] Lutz R., *Structures de contact sur les fibre's principaux en cercles de dimension 3*, Ann. Inst. Fourier **27-3** (1977), 1–15.

- [22] Martinet, J., *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Lect. Notes in Math. **209** (1971), 142–163.
- [23] Thurston, W., Winkelnkemper, H., *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.