

flow-spine 中の周期軌道の探索と追跡

石井 一平

3次元多様体 M に一つ flow-spine P を固定し、 P に横断的な M 上のベクトル場の集合を $\mathfrak{X}(P)$ (or $\mathfrak{X}(M; P)$) とする。ここで考えたいのは、Weinstein 予想に関連して石川氏によって指摘された次のような問題である ([5])。

問 1. すべての $X \in \mathfrak{X}(P)$ が周期軌道を持つような P とはどのようなものか? また、 ℓ -type flow-spine はこの性質を持つか?

この問題へのアプローチの一つとして、ここでは $\mathfrak{X}(P)$ 内でベクトル場を変形するときの周期軌道発生・消滅をどのように捉えることができるかをいくつかの例で考察したい。

1 flow-spine が定める flow の軌道

1.1 normal pair

M を closed oriented 3-manifold、 ψ_t を M 上の non-singular flow とし、 $\Sigma \subset M$ を ψ_t と横断的に交わる compact 2-disk とする。このとき、「 ψ_t の全ての orbit が Σ の内点と交わる」という条件に加えて幾つかの generic な条件を満たすとき (ψ_t, Σ) の対を "normal pair" と定義した。 Σ の orientation を、この orientation と ψ_t の進行方向が M に予め与えられた orientation を定めるように決めておく。さらに、 $\partial\Sigma$ には Σ の orientation から誘導される orientation が指定されているものとする。

M 上に normal pair (ψ_t, Σ) が与えられとき、 Σ は全ての orbit と交わるという条件から、各 $x \in M$ に対し

$$T(x) = \inf\{t > 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma\} \quad (\text{positive first returning time to } \Sigma)$$

が定まる ($0 < T(x) < \infty$)。そして、"first returning map" $F : M \rightarrow \Sigma$ が $F(x) = \psi_{T(x)}(x)$ によって定義される。 $T(x)$ の不連続点の集合

$$P(\psi_t, \Sigma) = \Sigma \cup \{\psi_t(x) \mid x \in F^{-1}(\partial\Sigma), 0 \leq t \leq T(x)\}$$

は special polyhedron であつ $P \equiv P(\psi_t, \Sigma)$ の補空間は open 3-ball、すなわち、 P は M の special spine となる。これを normal pair (ψ_t, Σ) が定める flow-spine と呼ぶ。このように定義された flow-spine $P = P(\psi_t, \Sigma)$ の頂点集合 $V(P)$ は

$$V(P) = \{F^{-1}(x) \mid x \in \partial\Sigma, F(x) \in \partial\Sigma\}$$

であり、特異点集合 $S(P)$ は

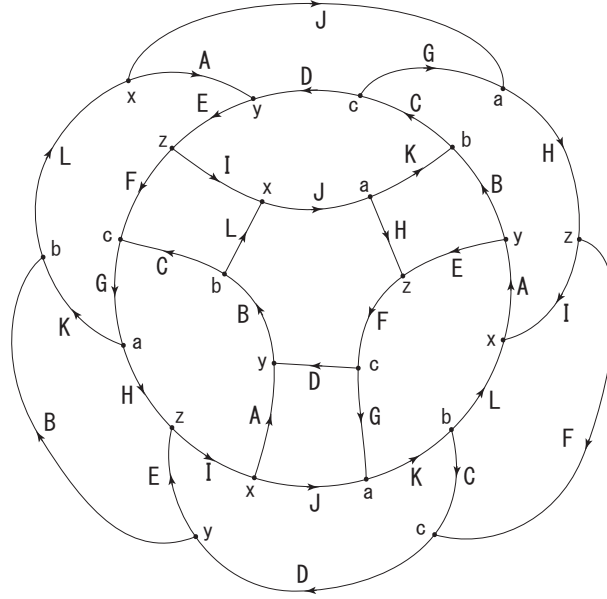
$$S(P) = F^{-1}(\partial\Sigma) \cup \{\psi_t(x) \mid x \in V(P), 0 \leq t \leq T(x)\}$$

である。 $P = P(\psi_t, \Sigma)$ の各頂点 $v \in V(P)$ に対し、頂点 v の "type" $\phi(v) = \ell$ or r を

$$\phi(v) = \begin{cases} \ell & \text{if } T|_{\partial\Sigma} \text{ is left continuous at } F(v) \\ r & \text{if } T|_{\partial\Sigma} \text{ is right continuous at } F(v) \end{cases}$$

と定め、写像 $\phi: V(P) \rightarrow \{\ell, r\}$ を **code** という。 $V(P) \neq \emptyset$ であつすべての $v \in V(P)$ に対し $\phi(v) = \ell$ であるとき、 $P = P(\psi_t, \Sigma)$ は **ℓ -type flow-spine** であるという。

$P = P(\psi_t, \Sigma)$ の頂点を $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とし、 $v_k^+ = F(v_k)$, $v_k^- = F^2(v_k)$ は $\partial\Sigma$ 上にある。 $2n$ 個の点 $v_1^+, \dots, v_n^+, v_1^-, \dots, v_n^-$ の $S^1 = \partial\Sigma$ 上の配列 (円順列) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi_t, \Sigma)$ を normal pair (ψ_t, Σ) の (あるいは flow-spine $P(\psi_t, \Sigma)$ の) **arrangement** という。そして、この arrangement \mathcal{A} と先に与えられた code ϕ の対 $\mathcal{E} = (\mathcal{A}, \phi)$ を normal pair (ψ_t, Σ) の (あるいは flow-spine $P(\psi_t, \Sigma)$ の) **E-data** という。



$$V(P) = \{x, y, z, a, b, c\}$$

$$\mathcal{A} = (x^+a^+)(b^-x^-)(y^+b^+)(c^-y^-)(z^+c^+)(a^-z^-)$$

$$\phi(x) = \phi(y) = \phi(z) = \ell, \quad \phi(a) = \phi(b) = \phi(c) = r$$

図 1.1: DS-diagram of a flow-spine P with E-data $\mathcal{E}_{Tcan} = (\mathcal{A}, \phi)$

flow-spine の DS-diagram が与えられると、E-data はその E-cycle の近傍から読み取ることができる (図 1.1 参照)。また逆に、形式的な E-data が一つ与えられたとき、

その E-data が実際の flow-spine に対応しているならば、(たいていの場合は) 一意的に DS-diagram を定めることができる。

注意 1. 上に述べた "たいていの場合" とは、対応する DS-diagram が連結な場合ということであり、 ℓ -type flow-spine の DS-diagram は必ず連結となる。

1.2 E-data からの normal pair の再現

前節に述べたように normal pair から E-data が定まる。そして、E-data から flow-spine の DS-diagram を構成する方法は [2] に示されている。一方、たとえそれが実際の normal pair に対応しているとしても、E-data が normal pair (ψ_t, Σ) を一意に定める訳ではない。微分同相なものを区別しない議論では円板 $\Sigma \subset M$ は任意の位置に取ってよいので、E-data から flow ψ_t の軌道を (各軌道上のパラメタ付けは考えないで) 確定するためには与えられた E-data を実現するように写像 $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ を構成すればよい。

与えられた E-data から $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ を定める手順は以下の (1) ~ (4) のようなものである。

(1) まず、その境界 $\partial\Sigma$ 上に E-data、すなわち各 $v \in V(P)$ に対する $\phi(v)$ と $v^+, v^- \in \partial\Sigma$ 、が与えられた Σ の中に $F^{-1}(\partial\Sigma)$ および $F(\partial\Sigma)$ をそれぞれ別個に (up to isotopy で) 描く。例えば、 ℓ -abalone の E-data では 図 1.2 のように描くことができる。

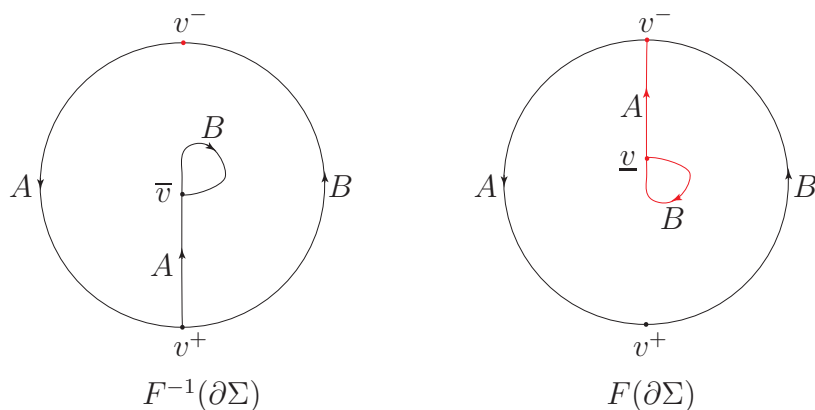


図 1.2: $F^{-1}(\partial\Sigma)$ and $F(\partial\Sigma)$ derived from the E-data of the ℓ -abalone

頂点集合 $V(P)$ が n 個の点 v_k ($k = 1, \dots, n$) から成るとするとき、各 v_k に対応する点が 4 点あり、その内 E-cycle 上の 2 点を v_k^+, v_k^- とした。その他に $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ の上にそれぞれ 1 点ずつ存在するので、これらをそれぞれ $\bar{v}_k, \underline{v}_k$ で表すことにする。 $2n$ 個の点 v_k^\pm の E-cycle 上の配列は、与えられた E-data によって指定されて

いる。またこのとき、 $\partial\Sigma - \{v_k^+, v_k^- \mid 1 \leq k \leq n\}$ は $2n$ 個の成分 E_1, \dots, E_{2n} を持つ、この各成分 E_j を 辺 という。各 E_j は $\partial\Sigma$ の向きで向き付けることとし、 $F^{-1}(E_j)$ および $F(E_j)$ も図中では同じ記号 E_j で表示することとする。

(2) 次に、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ をそれぞれ $\partial\Sigma$ を固定したイソトピーで変形してから、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ が描かれた Σ と $F(\partial\Sigma)$ が描かれた Σ を重ね合わせる。図 1.3 (a), (b), (c) に ℓ -abalone にこの操作を施した例を示した。この (a), (b), (c) はすべて ℓ -abalone の E-data から得られるものであるが、この (a), (b), (c) は互いに異なるものである。もちろんこれ以外にも $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ がもっと複雑に交わり合うことも考えられる。

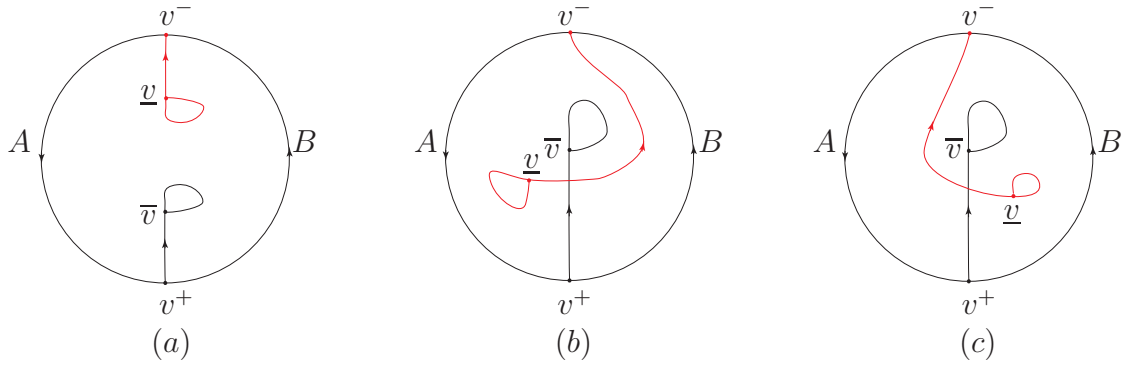


図 1.3: three examples of overlapping $F(\partial\Sigma)$ onto $F^{-1}(\partial\Sigma)$

頂点集合 $V(P)$ が n 個の点 v_k ($k = 1, \dots, n$) から成るときには、上のように $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ の重ね合わせが指定された Σ では、頂点に対応する \bar{v}_k, v_k^-, v_k^+ において returning map $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が $F(\bar{v}_k) = v_k^+, F(v_k^+) = v_k^-, F(v_k^-) = \underline{v}_k$ と決定されている。

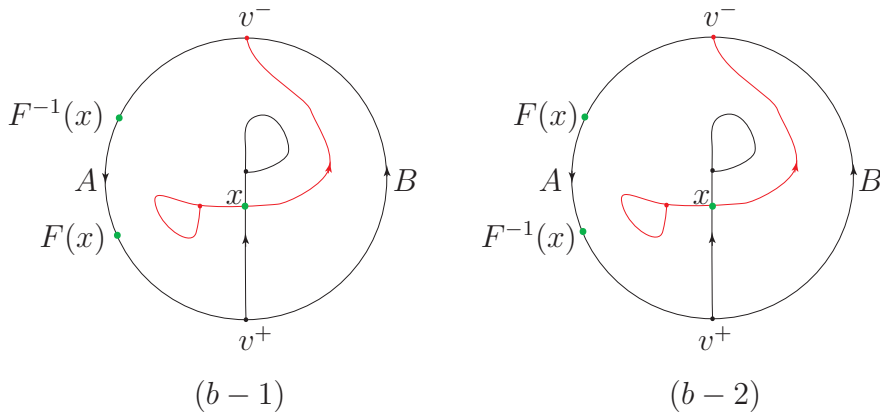


図 1.4: $F^{-1} : \partial\Sigma \rightarrow F^{-1}(\partial\Sigma)$ and $F : \partial\Sigma \rightarrow F(\partial\Sigma)$

(3) そして、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ の重ね合わせの指定された Σ が与えられたとき、 $\partial\Sigma$ の各辺上に F および F^{-1} を定める。このとき本質的なのは、 $x \in F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F(\partial\Sigma)$ なる点 x 達に対する $F^{-1}(x), F(x) \in \partial\Sigma$ の配列である。例として、図 1.4 (b-1), (b-2) はともに 図 1.3 (b) の辺に returning map を定めたものであるが、 $F^{-1}(x)$ と $F(x)$ の配列が異なるので、(b-1) と (b-2) は互いに本質的に異なるものであり、§3 に述べるように F の固定点を考えるときにその差異が明らかとなる。

図 1.3 (c) についても同様に、図 1.5 に示した (c-1), (c-2) の区別がある。

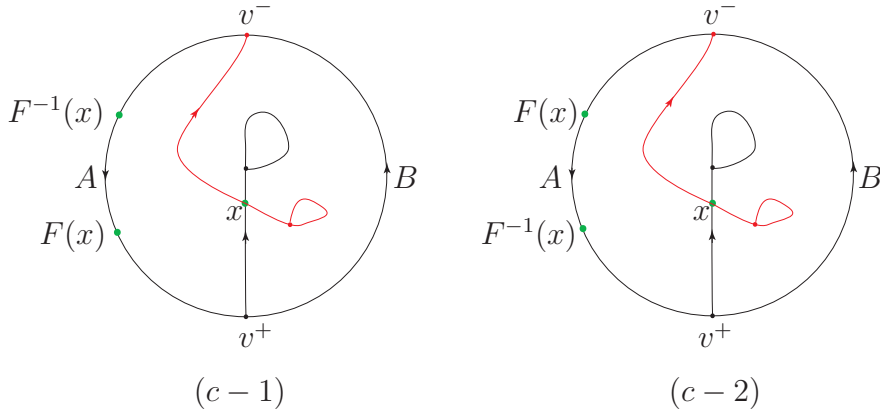


図 1.5: $F^{-1} : \partial\Sigma \rightarrow F^{-1}(\partial\Sigma)$ and $F : \partial\Sigma \rightarrow F(\partial\Sigma)$

(4) そして最後に $\Sigma - F^{-1}(\partial\Sigma)$ の各成分 R から $\Sigma - F(\partial\Sigma)$ の対応する成分への写像 F を ∂R の上では (3) で辺上に定めたものと整合するように定める。 R 上での F の定め方には R 内部でのイソトピックな変形という不定性があるが、これを一つ指定すれば returning map $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が確定する。

F は連続ではなく、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ に不連続点を持つ。しかしながら辺上での整合性から、次のような意味での連続性が保証される。 $E \subset \partial\Sigma$ を一つの辺とし $x \in E$ とする。このとき、 F は $y = F^{-1}(x)$ において不連続であり、 $F^2(y)$ は Σ の内点となる。このとき、 y の十分小さい近傍 U で $F^{-1}(E)$ によって二つの成分に分割されるものを選び、写像 $g : U \rightarrow \Sigma$ を

$$g(u) = \begin{cases} F^2(u), & u \text{ が } F^{-1}(E) \text{ の左側、または } u \in F^{-1}(E) \\ F(u), & u \text{ が } F^{-1}(E) \text{ の右側} \end{cases}$$

のように定めれば g は連続となる。頂点のまわりでは F^3, F^2, F を繋ぐことによって、その近傍で連続な写像を得ることができる。

上のような (1) ~ (4) の手順で一つ F を定めると、flow ψ_t の軌道が確定し、その周期軌道は F^n ($n = 1, 2, \dots$) の固定点として表される。E-data \mathcal{E} から (1) ~ (4) の手順

で得られる写像 $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ 全体の集合を $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ で表すことにすれば、冒頭に掲げた問題は次の問題に置き換えられる。

問 2. すべての $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が周期点を持つような E-data \mathcal{E} はどのようなものか？

注意 2. この稿ではそこまでの議論はしないが、 F^n ($n \geq 2$) の固定点を調べるためには、上の (3) で $F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F(\partial\Sigma)$ に対してしたように、さらに $F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F^k(\partial\Sigma)$ ($2 \leq k \leq n$) に対して場合分けをすることが必要になってくる。

$F_1, F_2 \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ の近さをそれぞれの F_j に対応する単位ベクトル場 X_j の近さ $\|X_1 - X_2\|$ で測ることにすれば $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ は距離空間となる。

2 周期軌道と写像の固定点

2.1 孤立周期軌道

3-manifold M 上の non-singular flow ψ_t が周期軌道 γ を持つとし、 γ 上の 1 点 x で γ に横断的に交わる 2-disk D をとり、 $U \subset D$ を十分小さい x の近傍とする。このとき、 ψ_t に軌道に沿う写像 (いわゆる Poincaré map) $h : U \rightarrow D$ が定まり、 x は h の固定点となる。十分小さい近傍 U に対し h の U 内の固定点が x のみとなるとき、 γ は ψ_t の孤立周期軌道であるという。さらに、微分 $dh(x)$ のすべての実固有値 λ について $\lambda \neq 0, 1$ であるとき γ は非退化孤立周期軌道であるという。

注意 3. 非退化孤立周期軌道は、摂動によって消滅することはない。すなわち、 ψ_t が非退化孤立周期軌道 γ を持てば、 ψ_t に十分近い flow は γ の近くに非退化孤立周期軌道を持つ。

E-data \mathcal{E} から前節のように定めた $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ を returning map とする flow の周期軌道 γ に対しては、 Σ の内点 x で $x \in \gamma$, $F^n(x) = x$ ($1 \leq n$), $F^k(x) \neq x$ ($1 \leq k < n$) を満たすものが存在する。そしてこのとき、 x の十分小さい近傍 $U \subset \Sigma$ に対し、連続写像 $g : U \rightarrow \Sigma$ で $g(x) = F^n(x) = x$ を満たし、さらに任意の $y \in U$ に対し $g(y) = F^m(y)$ なる m がとれるようなものが一意的に存在する。

定義 2.1. $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ に対し Σ の内点 x が F の (非退化) 孤立周期点であるとは、 x がある $n \geq 1$ に対し $F^n(x) = x$ を満たし、さらに x が上のような連続写像 $g : U \rightarrow \Sigma$ の (非退化) 孤立固定点あることとする。

2.2 平面写像の固定点定理・固定点指数

A を平面 \mathbb{R}^2 の単連結領域とし、 $h: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を可微分写像とする。正の向きに向け付けられた単純閉曲線 $c \subset A$ 上に h は固定点を持たないとすると、 c から \mathbb{S}^1 への写像 \tilde{h}_c を

$$\tilde{h}_c(x) = \frac{h(x) - x}{\|h(x) - x\|} \quad (x \in c)$$

で定義することができる。この \tilde{h}_c の写像度を h の c に沿う写像度 といひ、 $\deg(h; c)$ で表す。次の定理はよく知られている。

定理 2.1. $\deg(h; c) \neq 0$ ならば、 h は c の内部 X に少なくとも 1 個の固定点を持つ。ただし、 $\deg(h; c) = 0$ であっても h が X に固定点を持つこともある。

注意 4. この定理は c を”開単連結領域 $X \subset A$ の境界”として成り立つ。すなわち、 \bar{X} が単連結でなく、 c が単純閉曲線でなくてもよい。

孤立固定点 a の指数 $\text{ind}(h; a)$ を次のように定める：その中の h の固定点が a のみとなるように a の ε -近傍 U_ε を十分小さくとり、 $\text{ind}(h; a) = \deg(h; \partial U_\varepsilon)$ と定義する。固定点 a が非退化固定点である場合には

$$(2.1) \quad \text{ind}(h; a) = \begin{cases} +1 & \text{if } \det(dh(a) - id) > 0 \\ -1 & \text{if } \det(dh(a) - id) < 0 \end{cases}$$

となる。閉曲線 c の内部の固定点が有限個の孤立固定点 a_1, \dots, a_n である場合には、定理 2.1 は

$$\deg(h; c) = \sum_{k=1}^n \text{ind}(h; a_k)$$

と精密化される。

2.3 固定点の分岐 (bifurcation)

2.3.1 分岐とは

$\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ の部分集合 $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ を

$$\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}) = \{F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \mid F \text{ のすべての周期点が孤立周期点} \}$$

と定める。とくに $F_{pf} \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が周期点をまったく持たない (periodic-point free) ならば、 $F_{pf} \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ である。また $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ は $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ の中で generic である。

例 2.1. (周期点をもたないものを含む例) 図 1.1 に例示した E-data \mathcal{E}_{Tcan} は 3 次元トーラス T^3 の "canonical" な flow-spine ([6] 参照) を表していて、 $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{Tcan})$ には minimal flow (すべての orbit が T^3 上稠密、したがって周期軌道を持たない) が含まれる。したがって、周期点を持つ $F \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{Tcan})$ を $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{Tcan})$ 内で連続的に変形して周期点を持たない $F_{pf} \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{Tcan})$ を得ることができることになる。

一般に、定理 2.1 を用いてその存在が確認される周期点を持つような $F \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ から出発して、 $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ の中で連続的に変形して周期点を持たない $F_{pf} \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E})$ に到達することができるか否かを考える上で周期点の発生・消滅に関わる固定点の分岐 (bifurcation) が重要な役割を果たすと思われる。ここで固定点の分岐とは、パラメタ μ に依存する写像の族 $h_\mu : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ があるパラメタ値 μ_0 を境に固定点 (周期点) の個数や性質を変化させる現象のことである。このような理論で扱われるのは、 μ_0 以外の値の固定点、周期点がすべて非退化の場合である。

以下に代表的な分岐を 3 種類紹介する (詳しくは [7] 参照)。

2.3.2 サドル-ノード分岐 (saddle-node bifurcation)

サドル-ノード分岐とは μ でパラメタ付された写像族 $h_\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $\mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 0$ とする) の前後で図 2.1 のように変化する分岐のことである (D は破線内部)。すなわち、 $\mu < 0$ では h_μ は D 内に固定点を持たず、 $0 < \mu$ では指数 +1 の非退化固定点と指数 -1 の非退化固定点を一ずつ持つ (h_0 は指数 0 の退化固定点を一持つ)。

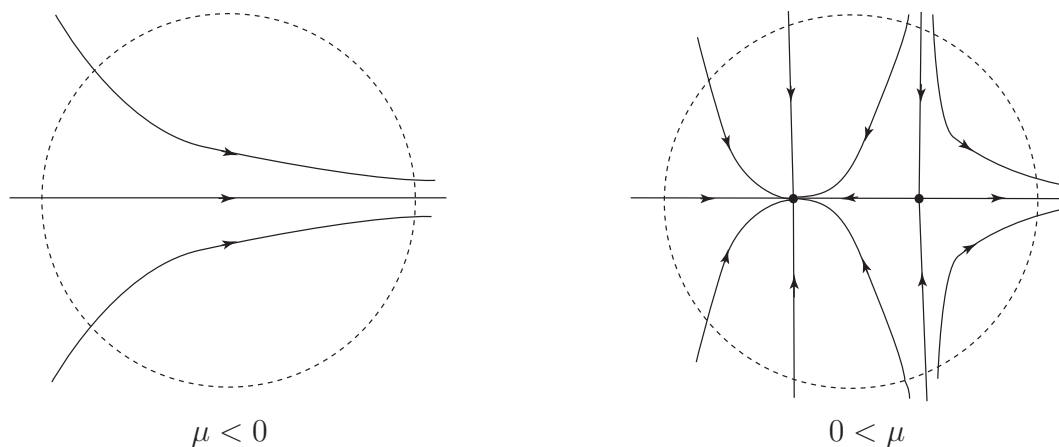


図 2.1: saddle-node bifurcation

この分岐では $\mu = 0$ の前後で固定点の個数が 0 から 2 へと変化するが、この変形の過程を通じて ∂D に沿う写像度は $deg(h_\mu; \partial D) \equiv 0$ と μ に依らず一定である。

2.3.3 ピッチフォーク分岐 (pitchfork bifurcation)

ピッチフォーク分岐とは 図 2.2 に示したように一つの指数 $+1$ が、二つの指数 $+1$ の固定点 (これらを x_1, x_2 とする) と一つの指数 -1 の固定点 (これを x_0 とする) に分かれるような変形である。力学系的には、安定な固定点 x_0 が $\mu = 0$ を境に不安定化し新たに安定な固定点 x_1, x_2 が出現する現象と捉えられる。

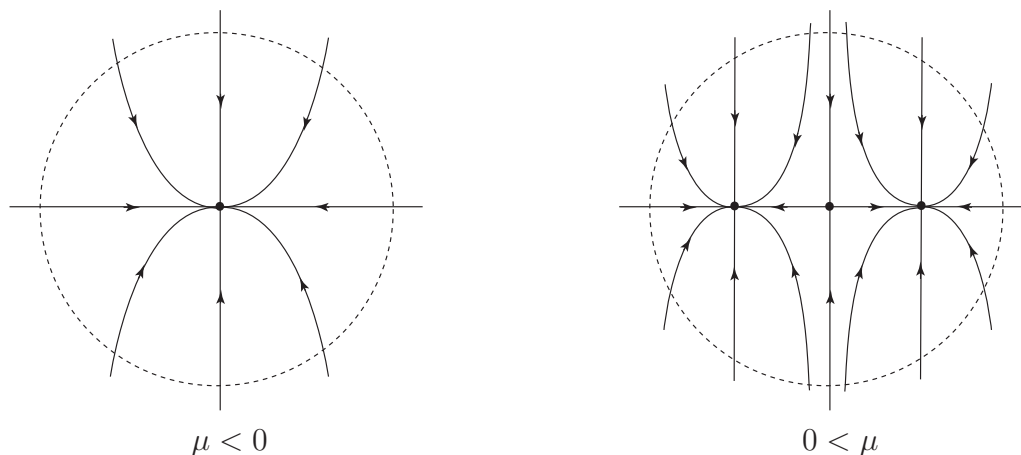


図 2.2: pitchfork bifurcation

この分岐においても ∂D に沿う写像度は不変で $\deg(h_\mu; \partial D) \equiv +1$ である。

2.3.4 周期倍分岐 (period-doubling bifurcation)

周期倍分岐は h_μ^2 がピッチフォーク分岐であるような写像族 h_μ のことである。すなわち 図 2.2 において、 $0 < \mu$ では x_1, x_2 は h_μ の固定点ではなく $x_2 = h_\mu(x_1)$, $x_1 = h_\mu(x_2)$ となる 2-周期点となる。

ここで注意しておくべきは、 $0 < \mu$ において h_μ の固定点は x_0 のみでその指数は $+1$ であることである。実際、 $dh_\mu(x_0)$ の固有値は $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$ となっているので (2.1) 式より $\text{ind}(h_\mu; x_0) = +1$ である。さらに、 h_μ^2 の固定点は x_0, x_1, x_2 の 3 点で、それらの指数は $\text{ind}(h_\mu^2; x_0) = -1$, $\text{ind}(h_\mu^2; x_1) = \text{ind}(h_\mu^2; x_2) = +1$ となる。

また ∂D に沿う写像度については、この分岐でも不変に保たれ

$$\deg(h_\mu; \partial D) = \deg(h_\mu^2; \partial D) \equiv +1$$

となっている。

力学系的に見て、安定状態が固定点から 2-周期点に移るということで "周期倍" という名が付いている。この周期倍分岐によって説明される物理現象も少なくない。

3 アワビの中の周期軌道の探索と追跡

図 1.2 に示したようにアワビ (ℓ -type) は唯一つの頂点 $\{v\}$ を持つ flow-spine でその E-data $\mathcal{E}_{\ell a}$ は

$$\mathcal{E}_{\ell a} = (\mathcal{A}, \phi), \quad \mathcal{A} = v^+v^-, \quad \phi(v) = \ell$$

で与えられた。この節では、 $F \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{\ell a})$ に対する $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ の重ね合わせが図 1.3 の (a), (b), (c) の場合の周期点を考察し、それらが前節に述べた分岐によってどのように解釈 (証明ではないが) されるかを見る。

3.1 写像度による固定点の探索

$F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}_{\ell a})$ とし、 $\Sigma - F^{-1}(\partial\Sigma)$ の二つの連結成分うち $\partial\Sigma$ に接するものを R で表す。 F が固定点を持つとすると、その固定点はまず R の中に発見されることが期待される。 F は R で連続であるから、 F が ∂R 上に固定点を持たないように F を定めれば $\deg(F; \partial R)$ が確定し、その値は図から容易に読み取ることができる。

命題 3.1. $F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F(\partial\Sigma) = \emptyset$ すなわち図 1.3 (a) の場合は $\deg(F; \partial R) = +2$ である。

Hopf vector field に摂動を加えて S^3 上に次のような non-singular flow ψ_t^0 を構成することができる：

- (1) ψ_t^0 は positive Hopf link をなす 2 個の周期軌道 γ_1, γ_2 を持ち、
 - (2) $x \notin \gamma_j$ ならば $\psi_t^0(x) \rightarrow \gamma_1$ ($t \rightarrow -\infty$) かつ $\psi_t^0(x) \rightarrow \gamma_2$ ($t \rightarrow +\infty$) である。
- そして、この ψ_t^0 に対して横断的な円板 Σ を適切に選べば、 (ψ_t^0, Σ) がアワビを生成する normal pair となり、
- (3) $F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F(\partial\Sigma) = \emptyset$ であつ、
 - (4) γ_1, γ_2 はそれぞれ Σ と 1 点で交わり、 $\gamma_j \cap \Sigma \subset R$ を満たしている。

すなわち、命題 3.1 は次のように詳しく述べることができる。

命題 3.2. $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{\ell a})$ には次の (1)~(3) を満たす F_0 が存在する。

- (1) $F_0^{-1}(\partial\Sigma) \cap F_0(\partial\Sigma) = \emptyset$,
- (2) F_0 は $R \equiv \Sigma - F_0^{-1}(\partial\Sigma)$ に指数 +1 の固定点を丁度 2 個持つ、
- (3) F_0 は上の 2 個の固定点の他には周期点を持たない。

F が $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{\ell a})$ を動くとき、上の命題の F_0 の二つの固定点はどのように追跡されるのだろうか？まず、図 1.3 (b) の場合には、

命題 3.3. 図 1.4 (b-1) のときは $\deg(F; \partial R) = +2$ であり、図 1.4 (b-2) のときは $\deg(F; \partial R) = +1$ である。

と、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ と $F(\partial\Sigma)$ の重ね合せ図が同じでも E-cycle 上の $F^{-1}(x)$, $F(x)$ の配置の違いから $\deg(F; \partial R)$ の値の違いが生じる。図 1.3 (c) の場合も同様に次の命題が成り立つ。

命題 3.4. 図 1.5 (c-1) のときは $\deg(F; \partial R) = +2$ であり、図 1.5 (c-2) のときは $\deg(F; \partial R) = +3$ である。

次節では (b-1) から (b-2) への変化を、次々節では (c-1) から (c-2) への変化を固定点の分岐を通して考察する。

命題 3.1, 3.3, 3.4 は $\deg(F; \partial R)$ を用いて (a), (b), (c) それぞれの場合に $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}_{\ell_a})$ の固定点の存在を保証するものであるが、すべての場合に $\deg(F; \partial R)$ の値によって固定点の存在が言える訳ではない。

命題 3.5. $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E}_{\ell_a})$ が 図 3.1 の場合には $\deg(F; \partial R) = 0$ である。

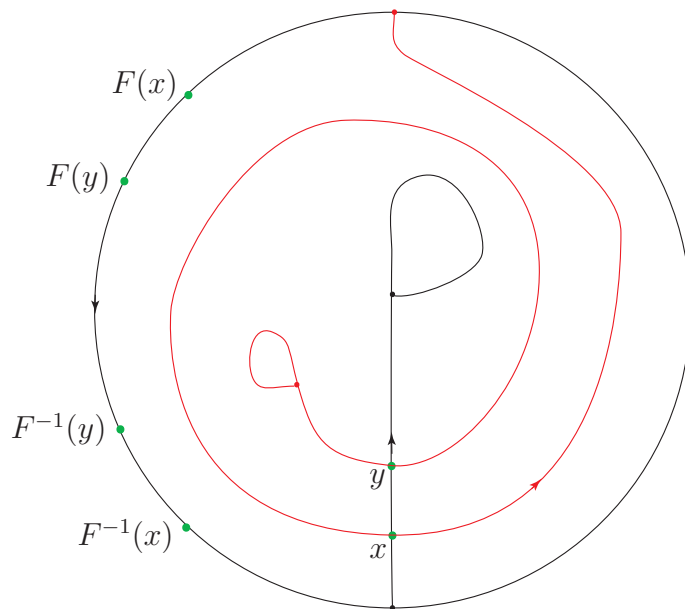


図 3.1: the case $\deg(F; \partial R) = 0$

すなわち、図 3.1 の場合には F の固定点の存在を $\deg(F; \partial R)$ の値から示すことは期待出来ないので、周期軌道を発見するためには F^n ($n \geq 2$) の固定点を調べることになる。次節の議論は、この場合にどのような場所にどのように F^2 の固定点を探索すべきかの方針を示すものと思う。実際に F^2 の固定点の存在を示すことができるのだが、この稿ではその証明までは与えない。

3.2 (b-1) から (b-2) への変化

まず、(b-1), (b-2) に共通するいくつかの記号を準備する。 $F^{-1}(\partial\Sigma) \cap F(\partial\Sigma)$ は唯一点であるので、これを x とする (図 1.4 参照)。さらに a, b, c, d で $a = F^{-2}(x)$, $b = F^{-1}(x) = F(a)$, $c = F(x)$, $d = F^2(x) = F(c)$ を表す。このとき、 $a \in F^{-1}(\partial\Sigma)$, $b, c \in \partial\Sigma$, $d \in F(\partial\Sigma)$ となっていることは (b-1), (b-2) に共通であるが、4 点 a, b, c, d の位置関係は (b-1) と (b-2) では異なる。そして、 α で $F^{-1}(\partial\Sigma)$ の v^+ から x に至る部分弧を表し、 β で $F(\partial\Sigma)$ の x から v^- に至る部分弧を表す。(b-1) と (b-2) の違いは、(b-1) では $a \in \alpha$, $d \in \beta$ であるのに対し、(b-2) では $a \notin \alpha$, $d \notin \beta$ であることである。領域 $R = \Sigma - T^{-1}(\partial\Sigma)$ は β によって二つの領域に分割される。分割された二つの領域のうち β の右側にあるものを R_1 、と左側にあるものを R_2 とする、このとき $\partial R_1 = B - \beta - \alpha$ である (図 3.2 参照、図中の赤破線は $F(\beta)$ である)。

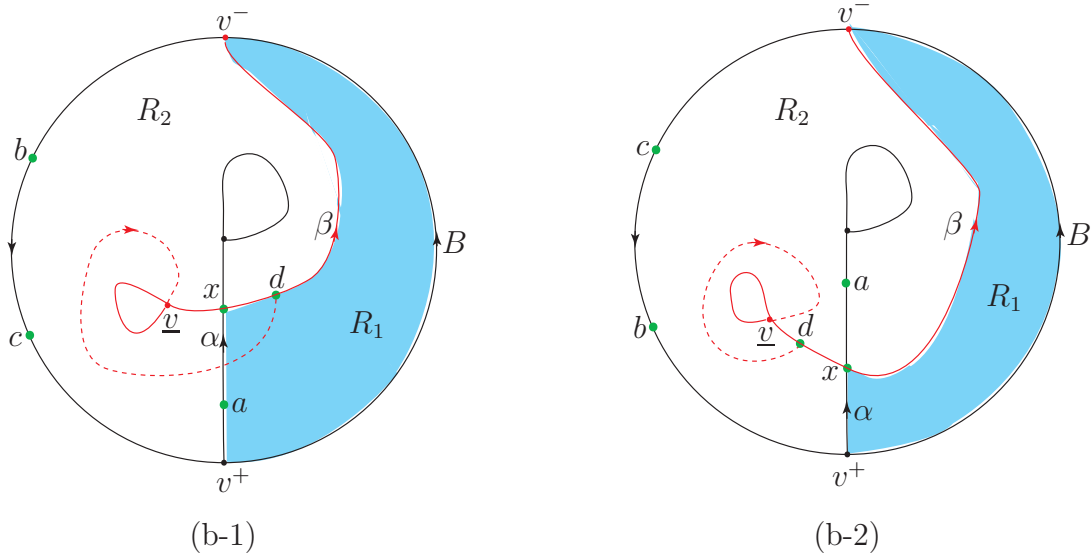


図 3.2: (b-1) と (b-2) の違い

このように領域 R を R_1, R_2 に分割すると、命題 3.3 はさらに詳しく次のように述べることができる。

命題 3.6. (b-1) のときは $\deg(F; \partial R_1) = \deg(F; \partial R_2) = +1$ であり、(b-2) のときは $\deg(F; \partial R_1) = 0$, $\deg(F; \partial R_2) = +1$ である。

変形 (a) \rightarrow (b-1) \rightarrow (b-2) に対する一つの解釈

命題 3.2 の F_0 を returning map として持つ flow から出発し、returning map が $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{la})$ の中で連続的に (b-1) に属する F_1 へ、さらに (b-2) に属する F_2 へと変形され

る flow の homotopic な変形を考える。この変形で最初の F_0 に対応する flow の 2 つの周期軌道がどのように変化することが考えられるだろうか？

(1) F_0 から F_1 への変形に対応する周期軌道の変化

出発点となる flow は 2 個の周期軌道 γ_1, γ_2 を持ち、共に Σ と唯一点で交わり、指数も共に $+1$ であった。 F_1 に対応する flow ではこの 2 個の周期軌道 γ_1, γ_2 は Σ と唯一点で交わるという性質を保ちながら維持され、それらの Σ との交わりが $\gamma_j \cap \Sigma \subset R_j \cap F_1(R_j)$ ($j = 1, 2$) と弧 β で分離されたと考えられる。

(2) F_1 から F_2 への変形に対応する周期軌道の変化

F_1 から F_2 へと変化するとき、その中間に $F_{1.5}^{-1}(x) = F_{1.5}(x)$ となるような $F_{1.5} \in \mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{la})$ が考えられる。この $F_{1.5}$ は $F_{1.5}(x) \in \partial\Sigma, F_{1.5}^2(x) = x$ を満たし、 $F_{1.5}$ に対応する flow では x を通る軌道は周期軌道である。この周期軌道は F_1 の周期軌道 γ_1 から変形されたものと見る事が出来る。そして、 F_2 に対応する flow では、 γ_1 は Σ との交わりが 2 点であるような周期軌道となる。したがって、 F_2 の固定点は周期軌道 γ_2 との交わりだけとなり、周期軌道 γ_1 との交わりは F_2 の 2-周期点となる。

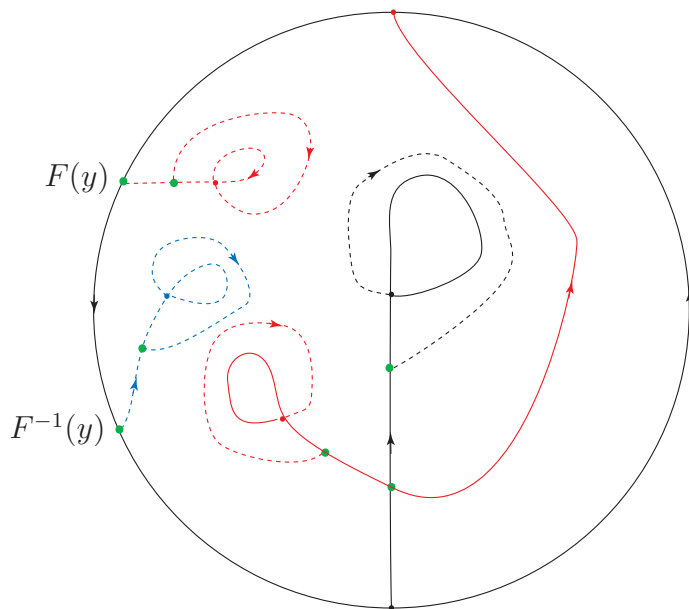


図 3.3: $\deg(F^2; \partial R_2) = +3$ なる R_2' 構成のための参考図

上の (1), (2) のような "解釈" によって、命題 3.6 に示される写像度の変化を説明することができる。この解釈のような flow の変形を、おそらく存在するとは思いますが、実際に実現することは非常に難しい。しかし、周期軌道の存在を示すためには、写像度を用いて F の固定点あるいは周期点の存在を示せば十分である。また、このような解釈が成り立つとすれば F_2^2 は 3 個の固定点 (F_2 の固定点と 2-周期点) を持つことに

なるが、その一つの裏付けとして次の命題を示すことができる。

命題 3.7. F が (b-2) の場合、 $R'_2 \subset R_2$ を

(1) $\deg(F; \partial R'_2) = +1$, (2) F^2 は R'_2 上連続

を満たす極大部分集合とすると $\deg(F^2; \partial R'_2) = +3$ が成り立つ。

この命題の R'_2 の取り方を詳しく述べることはしないが、図 3.3 に R'_2 構成のための補助線を書き入れた参考図を示す。

3.3 (c-1) から (c-2) への変化

(c-1), (c-2) に対しても、前節の (b-1), (b-2) の場合と同じ記号を用いる。すなわち、 $a = F^{-2}(x)$, $b = F^{-1}(x) = F(a)$, $c = F(x)$, $d = F^2(x) = F(c)$ とし、 $F^{-1}(\partial\Sigma)$ の v^+ から x に至る部分弧を α 、 $F(\partial\Sigma)$ の x から v^- に至る部分弧を β とする。そして、 $\Sigma - F^{-1}(\partial\Sigma)$ の β の右側を R_1 、左側を R_2 とする。今度は $\partial R_2 = A + \alpha + \beta$ となる (図 3.4 参照、図中の赤破線は $F(\beta)$)。この R_1, R_2 への分割にしたがって命題 3.4 を詳しく述べると次のようになる。

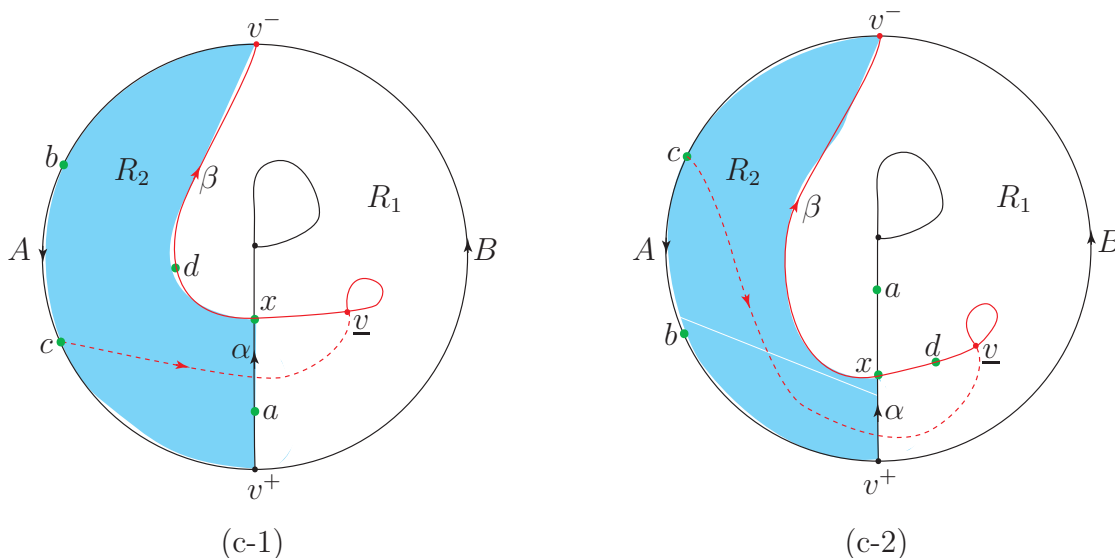


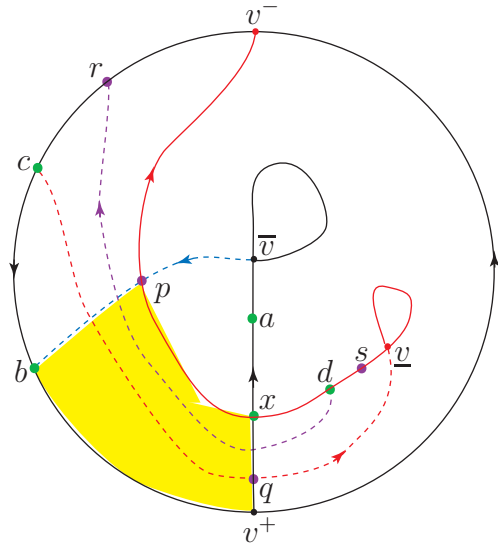
図 3.4: (c-1) と (c-2) の違い

命題 3.8. (c-1) のときは $\deg(F; \partial R_1) = \deg(F; \partial R_2) = +1$ であり、(c-2) のときは $\deg(F; \partial R_1) = +2$, $\deg(F; \partial R_2) = +1$ である。

変形 (a) \rightarrow (c-1) \rightarrow (c-2) に対する一つの解釈

やはりここでも、命題 3.2 の F_0 を returning map として持つ flow から出発し、returning map が $\mathfrak{F}_*(\mathcal{E}_{\ell a})$ の中で連続的に (c-1) に属する F_1 へ、さらに (c-2) に属する F_2 へと変形される flow の homotopic な変形の解釈で、命題 3.8 を説明できるようなものを考える。

前節と同様に F_1 と F_2 の中間に $F_{1.5}(x) = F_{1.5}^{-1}(x)$ となる $F_{1.5}$ を想定すれば、 $F_{1.5}^2(x) = x$ であり x を通る周期軌道が現れる。y 命題 3.8 の写像度の変化をみれば、この $\partial\Sigma$ を通る周期軌道は F_2 では R_1 と唯 1 点で交わる周期軌道に変形され、 F_2 は R_1 に 2 つの固定点を持ちそれらの指数はともに $+1$ になると考えられる。では、この周期軌道はどのようにして生み出されたと考えるのが自然だろうか？ 一つの解釈は F_0 から $F_{1.5}$ の間に周期倍分岐が生じ、その 2-周期点が $F_{1.5}$ で $\{x, F_{1.5}(x)\}$ にまで変形されたとするものである。この解釈が成立するとすると、 F_2 の R_2 内の固定点は指数 $+1$ であるが、この固定点は F_2^2 の固定点としては指数 -1 であるはずである。したがって、(b-2) に属する F に対しては、 R_2 の部分領域 R'_2 上 F^2 が連続で、しかも $\deg(F; \partial R'_2) = +1$, $\deg(F^2; \partial R'_2) = -1$ を満たすものが存在しなくてはならない。実際に、図 3.5 に示された $\alpha, \beta, F^{-1}(\alpha)$ および E-cycle で囲まれた領域を R'_2 とすればこれが成り立つ。



青破線は $F^{-1}(\alpha)$, 紫破線は $F(\beta)$, $q = F(p)$, $r = F(q)$, $s = F(r)$

図 3.5: R'_2 with $\deg(F; \partial R'_2) = +1$ and $\deg(F^2; \partial R'_2) = -1$

命題 3.9. F が (c-2) の場合、 $R'_2 \subset R_2$ を 図 3.5 に与えられたものとする、 $\deg(F; \partial R'_2) = +1$, $\deg(F^2; \partial R'_2) = -1$ が成り立つ。

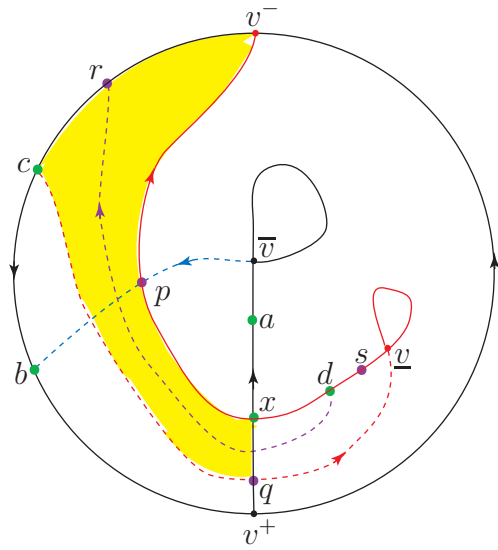


图 3.6: $F(R'_2)$

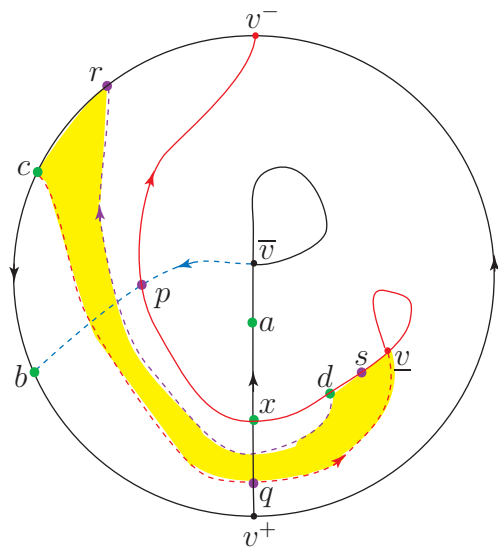


图 3.7: $F^2(R'_2)$

この命題は $F(R'_2)$ および $F^2(R'_2)$ がそれぞれ 図 3.6、図 3.7 で与えられることと、

$$\begin{aligned} F(v^+) &= \underline{v}, F(x) = c, F(p) = q, F(b) = x, \\ F^2(v^+) &= \underline{v}, F^2(x) = d, F^2(p) = r, F^2(b) = c \end{aligned}$$

に注意すれば容易に確認することができる。

4 まとめ

前節の議論は "アワビ" という最も単純な例であったが、ここから見えてきたことを (希望的観測を交えて) 纏めてみたい。以下、flow-spine の E-data \mathcal{E} が一つ与えられたとする。

4.1 周期軌道の存在について

与えられた $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ に対応する normal pair (ψ_t, Σ) に flow ψ_t を固定した Σ の微小変形を考えることによって、E-data を変えないで任意の n に対し $\partial\Sigma \cap F^n(\partial\Sigma)$ は有限個の点とすることができる。したがって、このような性質を持つ $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ のみを考えればよい。そこで、 $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ に対し

$$\Sigma_n(\mathcal{E}; F) = \Sigma - \{F^{-k}(\partial\Sigma) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

と定めると、 $\Sigma_n(\mathcal{E})$ は有限個の成分を持つことになり、その各成分 R 上で F^k ($1 \leq k \leq n$) が連続となる。さらに、 F が $\partial\Sigma$ 上に周期点を持たないならば $\deg(F^k; \partial R)$ が定まり、この値が 0 でないような k と R が見つければ周期軌道が存在することを証明できたことになる。この値 $\deg(F^k; \partial R)$ は §1.2 で述べた \mathcal{E} から F の決定過程のうち (3) の段階 (注意 2 のようなさらに詳しい情報が必要であるが) で定まるものである。前節でみたように、 F を $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ の中で連続的に動かすとき $\deg(F^k; \partial R)$ の値が変化するのは、周期軌道が $\partial\Sigma$ を通過するときである。前節ではさらに、 F の周期点の変化が §2 で紹介した "分岐" で起こると仮定して導かれる $\deg(F^k; \partial R)$ の変化が実際に確認された。これは証明されたわけではないし、前節では サドル-ノード分岐で周期点が消滅する例は現れていないが、次のような予想も浮かんでくる。

予想 1. $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が次の (i), (ii) を満たす F_* を含めば、すべての $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が周期点を持つであろう : (i) F_* の周期点は有限個ですべて非退化である (ii) F_* の周期点の (最小周期に対する) 指数の総和は 0 ではない。

4.2 周期軌道の非存在について

周期軌道を持たない flow というのは非常に稀なもの (flow 全体の中では開集合を含まない) であるが、それは確実に存在する。実際 [4] に依れば、任意の多様体上にそのような flow が存在する。前分節の議論を裏返せば $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が周期点を持たないための必要条件として

(*) 任意の n と $\Sigma_n(\mathcal{E}; F)$ の任意の成分 R に対し $\deg(F^k; \partial R) = 0$ ($1 \leq k \leq n$)

という条件が得られる。図 1.1 の E-data \mathcal{E}_{Tcan} が、条件 (*) を満たす F を含むことは (minimal flow に対応するという事実を使うことなく) 示すことはできるが、一般の \mathcal{E} に対し条件 (*) を満たす F を含むことを示す方法となるとよく分からない。

周期点を持たない $F \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$ が存在するような E-data \mathcal{E} の例を作る必要があると考えているが、本質的に \mathcal{E}_{Tcan} 以外には見つかっていないのが現状である。

参考文献

- [1] Benedetti R. and Petronio C., Branched standard spines of 3-manifolds, L.N.M. 1653 Springer-Verlag (1997)
- [2] Endoh M. and Ishii I., A new complexity for 3-manifolds, Japanese J. of Math. 31 (2005), 131–156.
- [3] Ishii I., Flows and spines, Tokyo J. of Math. 9 (1986), 505–525.
- [4] Kuperberg K.M., A C^∞ -counterexample to the Seifert conjecture in dimension 3, Ann. of Math. 140 (1994), 723–732.
- [5] 石川昌治, 3次元多様体の接触構造とフローズパイン, HAKONE SEMINAR 34 (2018), 7–31.
- [6] 石井一平, ℓ -type flow-spine について, HAKONE SEMINAR 34 (2018), 33–69.
- [7] 小室元政, 新版 基礎からの力学系 分岐解析からカオスの遍歴へ, サイエンス社 (2005)