ℓ-type flow-spine について

石井 一平

3 次元多様体の接触構造と flow-spine の関係については、この報告集に石川氏の解説 [10] があり、ℓ-type flow-spine から 3 次元多様体の接触構造を定める方法が示されている。ここでは接触構造の研究に供すべく、いくつかの基本的な多様体に対し ℓ-type flow-spine の例を与えたい。

1 flow-spine と E-cycle 付 DS-diagram

1.1 normal pair と flow-spine

もう古い話（35 年以上前）になるが、**normal pair** の概念を簡単に振り返っておこう（詳しくは [5] を参照）。

M を closed oriented 3-manifold、ψ_t を M 上の non-singular flow とし、$\Sigma \subset M$ を ψ_t と横断的に交わる compact 2-disk とする。このとき、「ψ_t の全ての orbit が Σ の内点と交わる」という条件に加えて幾つかの generic な条件を満たすとき (ψ_t, Σ) の対を "normal pair" と定義した。Σ の orientation を、この orientation と ψ_t の進行方向が M に予め与えられた orientation を定めるように決めておく。さらに、$\partial\Sigma$ には Σ の orientation から誘導される orientation が指定されているものとする。

M 上に normal pair (ψ_t, Σ) が与えられとき、Σ は全ての orbit と交わるという条件から、各 $x \in M$ に対し

$$T(x) = \inf\{t > 0 \,|\, \psi_t(x) \in \Sigma\} \quad \text{(positive first returning time to } \Sigma)$$

が定まる（$0 < T(x) < \infty$）。そして、"first returning map" $F : M \to \Sigma$ が $F(x) = \psi_{T(x)}(x)$ によって定義される。$T(x)$ の不連続点の集合

$$\begin{aligned} &P(\psi_t, \Sigma) = \Sigma \cup \mathit{wall}(P(\psi_t, \Sigma)) \\ &\qquad (\,\mathit{wall}(P(\psi_t, \Sigma)) = \{\psi_t(x) \,|\, x \in F^{-1}(\partial\Sigma),\, 0 \le t \le T(x)\}\,) \end{aligned}$$

は special polyhedron でかつ $P \equiv P(\psi_t, \Sigma)$ の補空間は open 3-ball、すなわち、P は M の special spine となる。これを normal pair (ψ_t, Σ) が定める **flow-spine** と言った。

注意 *1.* 実は、P が special（P の全ての面が open 2-disk）であるためには、「$\partial\Sigma \cup F^{-1}(\partial\Sigma)$ が連結」という条件が必要であるが、大抵の場合は（M が handle free のときは必ず）これが成り立っている。

上に定義した flow-spine $P = P(\psi_t, \Sigma)$ の頂点集合 $V(P)$ は

$$V(P) = \{F^{-1}(x) \,|\, x \in \partial\Sigma,\, F(x) \in \partial\Sigma\}$$

であり、特異点集合 $S(P)$ は

$$S(P) = F^{-1}(\partial\Sigma) \cup \{\psi_t(x) \,|\, x \in V(P),\, 0 \leq t \leq T(x)\}$$

である。

$P = P(\psi_t, \Sigma)$ の各頂点 $v \in V(P)$ に対し、頂点 v の "type" $\phi(v) = \ell$ or r を

$$\phi(v) = \begin{cases} \ell & if\ \ T|_{\partial\Sigma} \ \text{ is left continuous at } \ F(v) \\ r & if\ \ T|_{\partial\Sigma} \ \text{is right continuous at } \ F(v) \end{cases}$$

と定め、写像 $\phi : V(P) \to \{\ell, r\}$ を **code** という。$V(P) \neq \emptyset$ でかつすべての $v \in V(P)$ に対し $\phi(v) = \ell$ であるとき、$P = P(\psi_t, \Sigma)$ は **ℓ-type flow-spine** であるという。石川氏の記事（[10]）では、ℓ-type flow-spine が（接触同相を法として）一意的に M の接触構造を定め、ψ_t がその接触構造の Reeb flow となることが解説されている。

1.2　E-cycle 付 DS-diagram

池田氏による DS-diagram（[3]）は special spine の表現として非常に強力な手段である。この中で flow-spine を表すものは "E-cycle 付 DS-diagram" という特別な性質を持つもので表現される（[4]）。上に述べた normal pair から E-cycle 付 DS-diagram を作る方法を少し詳しく振り返り（用語等は [3], [4], [5], [6] を参照）、flow-spine が定める non-singular flow と DS-diagram の関係を整理する。

M の normal pair (ψ_t, Σ) とその flow-spine $P = P(\psi_t, \Sigma)$ に対し、前節の表記をそのまま使い、$V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする。さらに、$D^2 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の単位円板とし、保向同相写像 $\sigma : \Sigma \to D^2$ を一つ定めておく。

(step-1)

$\partial\Sigma - (F(V(P) \cup F^2(V(P)))$ の連結成分を $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ とし、これを辺に与えられた "向き付ラベル "とする。各辺の向きは $\partial\Sigma$ の向きと一致するものとし、辺の番号は $\partial\Sigma$ 上の順にしておくのが都合がよい。

(step-2)

Σ 上に $F^{-1}(\partial\Sigma)$ を描いたものを Σ_- とする。$F^{-1}(\partial\Sigma)$ はグラフで、そのグラフの辺は $F^{-1}(A_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ である。$F^{-1}(A_j)$ に A_j と（向きを込めて）同じラベルを与える。同様に、$F(\partial\Sigma)$ を描いたものを Σ_+ とし、その各辺 $F(A_j)$ に A_j と同じラベルを与える。

(step-3)

$\mathbb{R}^3$ 内の単位球体 $\mathbb{B}^3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ を用意し、$\partial\mathbb{B}^3 \cap \{z \geq 0\}$ に Σ_- を、$\partial\mathbb{B}^3 \cap \{z \leq 0\}$ に Σ_+ を、それぞれ xy-平面への射影が $\sigma(\Sigma)$ に一致するように配置する。

このように構成すると、球面 $\partial\mathbb{B}^3$ 上に $\partial\mathbb{B}^3 \cap \{z = 0\}$, $F^{-1}(\partial\Sigma) \subset \Sigma_-$, $F(\partial\Sigma) \subset \Sigma_+$ からなる 3-正則グラフ G が描かれ、このグラフの辺に 3 つ一組の向き付ラベルが指定されていることになる。このラベル付けを G の辺の同一視写像とみる（G の頂点上の同一視写像は、辺の同一視から自動的に定まる）。また、$\partial\mathbb{B}^3 - G$ の成分間の同一視写像は $F : \Sigma_- \to \Sigma_+$ によって定まる。このようにして、局所同相写像 $f : \partial\mathbb{B}^3 \to P(\psi_t, \Sigma)$ が得られ、これが normal pair (ψ_t, Σ) から構成した E-cycle 付 DS-diagram（E-cycle は $e \equiv \partial\mathbb{B}^3 \cap \{z = 0\}$）である。このとき、$M = \mathbb{B}^3/f$, $P(\psi_t, \Sigma) = \partial\mathbb{B}^3/f$ であり、flow ψ_t は $\mathbb{B}^3$ 上の vector field $\partial/\partial z$ で生成される flow に homotopic となる。

2 flow-spine の admissibility

2.1 admissibility とは

M の flow-spine $P = P(\psi_t, \Sigma)$ に対し、ψ_t を Reeb flow とするような M の接触構造が存在するための必要条件として、P には下に述べるような admissibity condition が要求される（[10]）。

flow-spine P に対しその辺および面（$P - S(P)$ の連結成分）への向き付けを、辺に対しては E-cycle の向きで、面に対しては（DS-diagram で見て） E-cycle の内側（北半球）で E-cycle に同調する向きを与える。向き付けられた辺 A に対し、A^{-1} は反対向きの辺を表すことにする。このとき、上のように向き付けられた面 R の境界 ∂R は、R が r-辺形ならば、

$$\partial R = A_1^{\epsilon_1} A_2^{\epsilon_2} \ldots\ldots A_r^{\epsilon_r} \quad (\epsilon_i = +1 \text{ or } -1) \tag{2.1}$$

のように読み取ることができる。各辺 A に実数値 $y(A)$ を与える関数 y が与えらたとき、境界が (2.1) である面 R の境界値 $y(\partial R)$ を

$$y(\partial R) = \epsilon_1 \cdot y(A_1) + \epsilon_2 \cdot y(A_2) + \cdots + \epsilon_r \cdot y(A_r)$$

と定める。関数 y が **admissibile** であるとはすべての面の境界値が正となることであり、P が **admissibility condition** を満たすとは admissible な関数が存在することである。

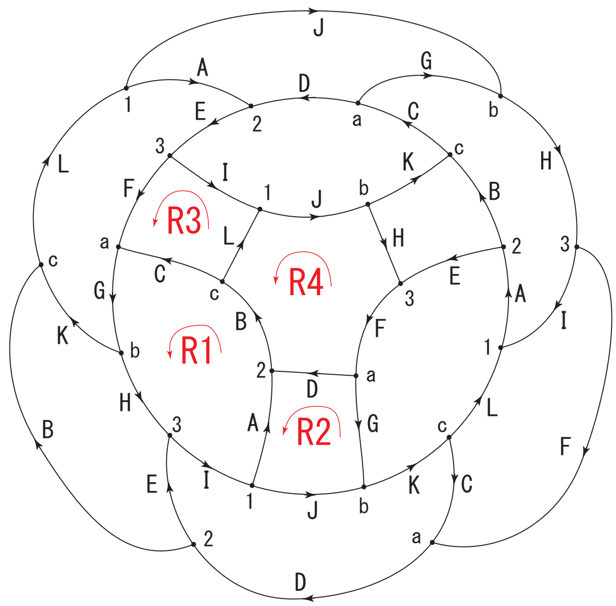


図 2.1: admissible condition を満たさない flow-spine

例 2.1. (admissibility condition を満たさない flow-spine)

図 2.1 は 3 次元トーラス $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ の flow-spine を表す E-cycle 付 DS-diagram であり、linear flow（$\mathbb{R}^3$ 上の constant vector field で生成される T^3 上の flow）はこの flow-spine の flow となる。この flow-spine は admissibility condition を満たさない。実際、y を上のような辺上の関数とし、図 2.1 に示した面 R_1, R_2, R_3, R_4 に対する境界値が正であるという条件を書くと、

$$
\begin{aligned}
&(R_1) && y(A)+y(B)+y(C)+y(G)+y(H)+y(I)>0\\
&(R_2) && y(J)+y(D)-y(G)-y(A)>0\\
&(R_3) && y(F)+y(L)-y(C)-y(I)>0\\
&(R_4) && -y(B)-y(D)-y(F)-y(H)-y(J)-y(L)>0
\end{aligned}
$$

となり、$(R_1)+(R_2)+(R_3)$ と (R_4) が同時に成り立つことがないことが確認される。したがって、この flow-spine は admissibility condition を満たさず、T^3 上の linear flow はいかなる T^3 の接触構造の Reeb flow にもなり得ないことが分かる。

2.2 ℓ-type flow-spine の admissibility

ここでは、次の定理を証明する。この定理により、ℓ-type flow-spine がその flow を Reeb flow とする接触構造を定めることが示される（[10]）。

定理 2.1. 任意の *ℓ-type flow-spine* は *admissibility condition* を満たす。

証明. P の一つの辺 A は（これを E-cycle 上で見て）図 2.2 の４種類に分類される。

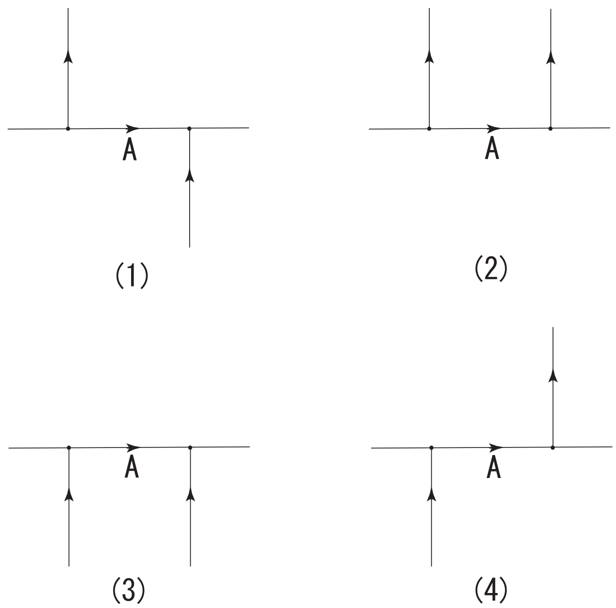


図 2.2: types of an edge of an ℓ-type flow-spine

以下では、関数 x_0 を

$$x_0(A) = \begin{cases} -1/2 & \text{if} \quad A \quad \text{is type (1)} \\ +2 & \text{if} \quad A \quad \text{is type (2)} \\ +3 & \text{if} \quad A \quad \text{is type (3)} \\ +4 & \text{if} \quad A \quad \text{is type (4)} \end{cases}$$

と定め、この x_0 に type (2) の辺の値を少し補正して admissible な関数を構成する。この補正のため、$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$ を ℓ-type flow-spine P の type (2) の辺の集合とし、$\mathcal{B}$ に半順序 $\prec$ を次のように定義する。

定義 2.1. E-cycle 上 B_i の左端点を u_i、右端点を v_i とし、さらに u_i^-, v_i^- で E-cycle 上の点でそれぞれ u_i, v_i と同一視される点を表す。このとき、$B_i \prec B_j$ とは、E-cycle 上 v_i^- の左隣の頂点が v_j^- であることと定義する（図 2.3 参照）。

注意 *2.* $v_i = u_j$ あるいは $u_i = v_j$ ということもあり得る。また、v_i^- から v_j^- に至る辺 C は type (3) で、B_i, C に同一視される E-cycle 内部の辺は 図 2.3 のように配置されている。

$E - cycle$ 上外側に第三の edge が出る頂点を左隣、左隣 .... と辿って元に戻ることはないので、上ように定義された $\prec$ は $\mathcal{B}$ 上の半順序を定める。この半順序を用いて x_0 を補正した x を、type (2) の辺 B_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ に対して $x(B_i) = 2 + \delta_i$ と定める。ただしここで、δ_i は

(2.2) $$0 \leq \delta_i < 1/2 \quad \text{でかつ、} \quad B_i \prec B_j \quad \text{ならば} \quad \delta_i < \delta_j$$

を満たす実数である。

以下では、x が admissibity condition を満たすことを示す。

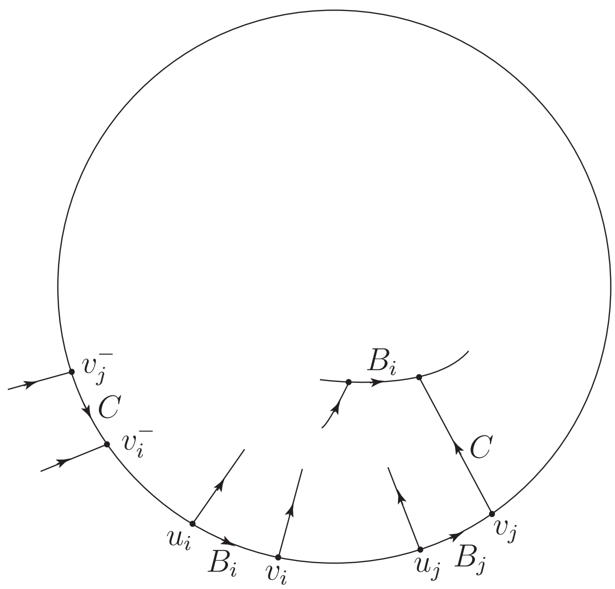


図 2.3: $B_i \prec B_j$

まず、ℓ-type flow-spine の特徴として、次の補題が成り立つことを注意しておく（flow-spine の DS-diagram に慣れれば明らかなので、証明は省略)。

補題 2.1. 面 R が E-cycle から分離されているとき

$$\partial R = A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots\ldots A_r^{-1}$$

で、A_i はすべて type (1) である。したがって、$x(\partial R) = x_0(\partial R) = r/2 > 0$ である。

そこで、R の境界の一部が E-cycle 上にある場合を考える。このような R は一般に図 2.4 のようになっている。∂R の 図 2.5 の u から v の部分（青の部分）を $(\partial R)_1$、v から w の部分（赤の部分）を $(\partial R)_2$、そして w から x の部分（紫の部分）を $(\partial R)_3$ とする。詳しく述べれば

- $(\partial R)_1$ は E-cycle 上を進む辺の列（極大なもの）で、その上の辺はすべて正の向きに現れる。

- $(\partial R)_2$ は $(\partial R)_1$ の終点から E-cycle の内側に進み、その上の辺がすべて正の方向に現れるものの極大列である。

- $(\partial R)_3$ は $(\partial R)_2$ の終点から再び E-cyccle に戻るまでの辺の列である。

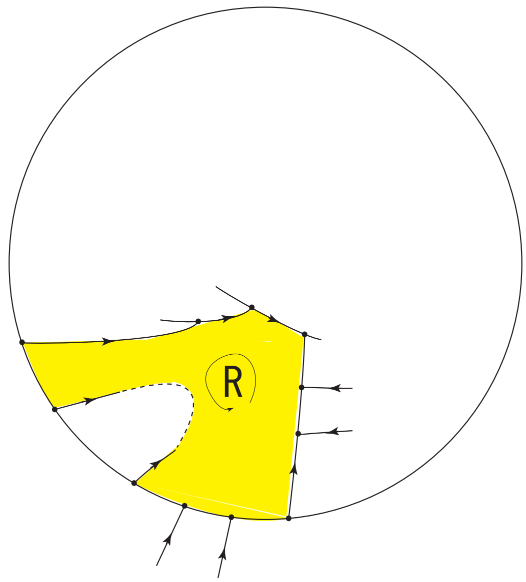


図 2.4: 境界の一部が E-cycle 上にある面 R

注意 *3.* ℓ-type flow-spine の特性から $(\partial R)_3$ 上では、辺がすべて負の向きに現れる。

$(\partial R)_3$ の終点 x が $(\partial R)_1$ の始点 u に一致すれば $\partial R = (\partial R)_1 + (\partial R)_2 + (\partial R)_3$ であるが、一般に ∂R は、連続する 3 つのパターン $(\partial R)_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の何回かの繰り返しで構成されている。したがって、∂R に含まれる任意の連続する 3 つのパターン $(\partial R)_i$ $(i = 1, 2, 3)$ に対し

$$x((\partial R)_1) + x((\partial R)_2) + x((\partial R)_3) > 0 \tag{2.3}$$

が示されれば、x の admissibility が証明されたことになる。

補正前の関数 x_0 による $x_0((\partial R)_1) + x_0((\partial R)_2) + x_0((\partial R)_3)$ の値を見ると、次の条件

(p1) $(\partial R)_1 = B_j$ と $(\partial R)_1$ が唯一つの type (2) の辺 B_j から成る。
(p2) $(\partial R)_2 = C_1$ と $(\partial R)_2$ が唯一つの type (3) の辺 C_1 から成る。

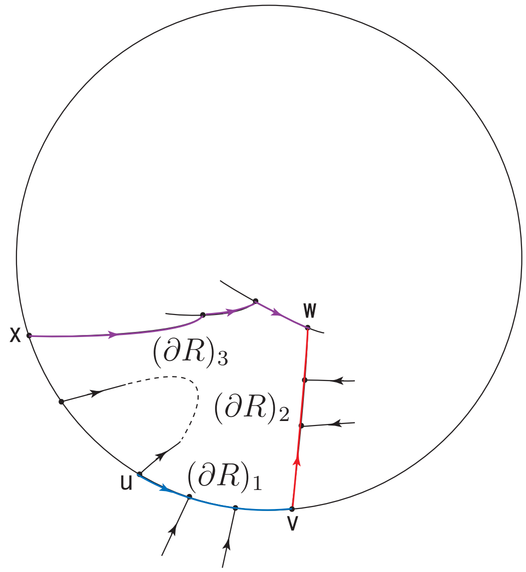


図 2.5: R の境界

(p3) $(\partial R)_3 = B_i^{-1}C_2^{-1}$ と $(\partial R)_3$ は type (2) の辺 B_i と type (3) の辺 C_2 の二つの辺を逆向きに辿るものである。

が同時に満たされるときに最小となる。すなわち、次の補題が成り立つ。

補題 2.2. 3条件 (p1), (p2), (p3) が同時に満たされるとき

$$x_0((\partial R)_1) + x_0((\partial R)_2) + x_0((\partial R)_3) = 0$$

が成り立ち、それ以外の場合は

$$x_0((\partial R)_1) + x_0((\partial R)_2) + x_0((\partial R)_3) \geq 1/2$$

が成り立つ。

証明.

条件 (p1) が成り立つとき $x_0((\partial R)_1) = x_0(B_j) = 2$ である。そして、これが成り立たないときは、

$$(\partial R)_1 = AE_1E_2\dots E_qD \qquad (A \text{ は type (1)},\ E_k \text{ は type (3)},\ D \text{ は type (4)})$$

となっており、$x_0((\partial R)_1) \geq x_0(A) + x_0(D) = 7/2$ が成り立っている。

条件 (p2) が成り立つとき $x_0((\partial R)_2)=x_0(C_1)=3$ である。そして、これが成り立たないときは、

$$(\partial R)_2 = DF_1F_2\dots F_qA \quad (D \text{ は type}\,(4),\ F_k \text{ は type}\,(2),\ A \text{ は type}\,(1))$$

となっており、$x_0((\partial R)_2)\geq x_0(D)+x_0(A)=7/2$ が成り立っている。

条件 (p3) が成り立つとき $x_0((\partial R)_3)=-x_0(B_i)-x_0(C_2)=-5$ である。そして、これが成り立たないときは、

$$(\partial R)_3 = D^{-1} \quad \text{で}\ D \text{ は type}\,(4)$$

または

$$(\partial R)_3 = B_i^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}\dots A_q^{-1}C^{-1} \quad (B_i \text{ は type(2)},\ A_k \text{ は type}\,(1),\ C \text{ は type}\,(3))$$

となっている。前者の場合は $x_0((\partial R)_3)=-x_0(D)=-4$、後者の場合は $x_0((\partial R)_3)\geq -x_0(B_i)-x_0(A_1)-x_0(C)=-9/2$ となり、いずれの場合も $x_0((\partial R)_3)\geq -9/2$ が成り立つ。

以上のことを総合して、補題 2.2 が成り立つことが分かる。 $\square$

この補題の証明中の議論からわかるように、$(\partial R)_1+(\partial R)_2+(\partial R)_3$ の中に type (2) の辺が負の向きで現れるのは高々１回（それが存在するときには B_i^{-1} とする）である。したがって、

$$x((\partial R)_1)+x((\partial R)_2)+x((\partial R)_3)\geq x_0((\partial R)_1)+x_0((\partial R)_2)+x_0((\partial R)_3)-\delta_i$$

となり、$\delta_i<1/2$ であるから、補題 2.2 より、３条件 (p1), (p2), (p3) が同時には満たされないならば、

$$x((\partial R)_1)+x((\partial R)_2)+x((\partial R)_3)>0$$

が成り立つ。また、３条件が同時に満たされるときには、$B_i\prec B_j$ であるので、

$$x((\partial R)_1)+x((\partial R)_2)+x((\partial R)_3)=\delta_j-\delta_i>0$$

が成り立つ。

これで x の admissibility が示され、定理 2.1 の証明が完成した。 $\square$

3 $S^2\times S^1$ の ℓ-type flow-spine

3.1 P^3 内の knot の 2-fold branched covering として

射影空間 $P^3=L(2,1)$ の 標準的な ℓ-type flow-spine が図 3.1 である。この flow-spine の同図に色付けて示した面が表す DS-knot（これを k_0 とする）の 2-fold branched covering を考える。

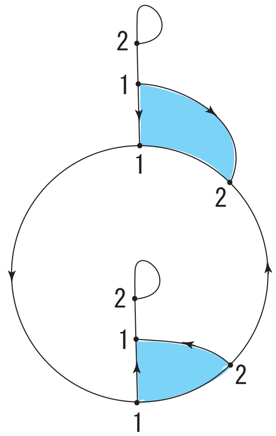
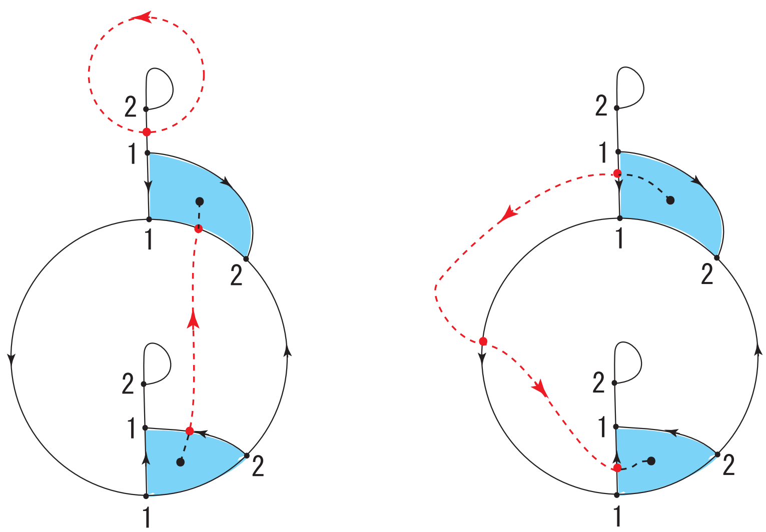


図 3.1: an ℓ-type flow-spine for P^3 and a trivial DS-knot in it

k_0 は 2-disk D_0 を張る trivial knot である。実際、D_0 は spine との交わりが 図 3.2 左図に破線で示したように取ることができる。また、k_0 は、spine との交わりが同右図に破線で示されたメビウス帯 M_0 を張る。当然ながら、$P_0^2 = D_0 \cup M_0$ は P^3 に埋め込まれた射影平面となる。



the disk D_0 the Möbius band M_0

図 3.2: the disk D_0 and the Möbius band M_0 bounded by k_0

k_0 は 2-fold branched covering を二つ持ち、その一つは、P^3 を D_0 で切り開いて得られるものの copy を二つ用意し、これらの切り口を表と裏を貼り合わせて構成される。このような構成法で得られる多様体は、連結和 $P^3 \# P^3$ である。この branched covering を $q : P^3 \# P^3 \longrightarrow P^3$ とすると、$q^{-1}(D_0)$ が連結和を与える separating sphere

になり、$q^{-1}(M_0)$ は Klein bottle となる。

k_0 のもう一つの 2-fold branched cover が 図 3.3 で与えられる $p_0 : S^2 \times S^1 \longrightarrow P^3$ である（DS-knot の 2-fold branched cover の構成法については [13] を参照）。こうして得られる flow-spine は、$S^2 \times S^1$ の ℓ-type flow-spine としては頂点数最小のものである。 この flow-spine を $P_0 = P_0(S^2 \times S^1)$ と表わすことにする。

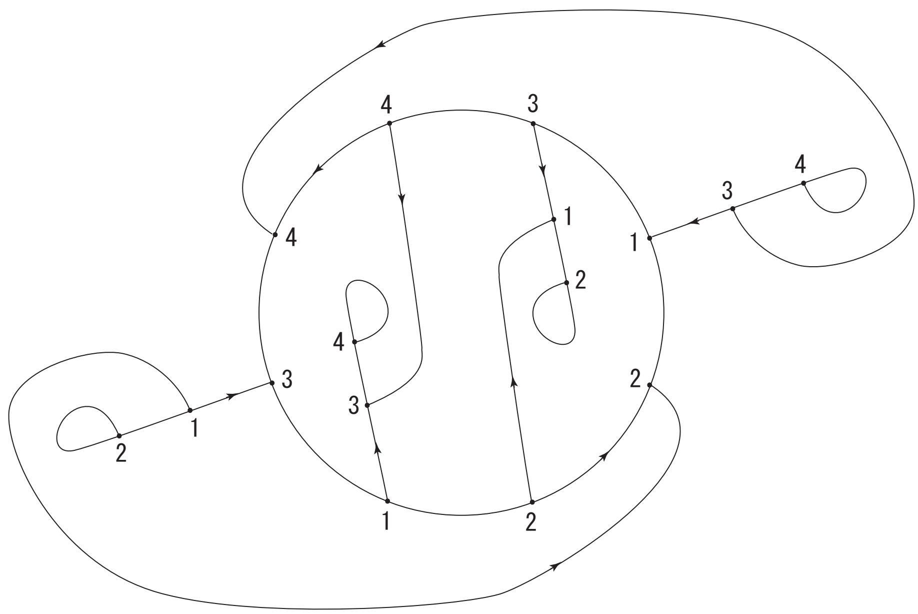


図 3.3: another 2-fold branched cover of k_0 giving an ℓ-type flow-spine P_0 for $S^2 \times S^1$

この branched cover $p_0 : S^2 \times S^1 \longrightarrow P^3$ では、k_0 に張られた disk D_0 の持ち上げ $p_0^{-1}(D_0)$ は $S^2 \times S^1$ の non-separating sphere となり、メビウス帯 M_0 の持ち上げ $p_0^{-1}(M_0)$ は Heegaard 分解を与えるトーラスとなる。また、$p_0^{-1}(M_0)$ は spine P_0 を変えない範囲での flow の homotopic な変形により flow の orbit が $p_0^{-1}(M_0)$ 上にあるようにすることができる。このような意味で $p_0^{-1}(M_0)$ は invariant torus である。図 3.4 に $P_0 \cap p_0^{-1}(D_0)$ を、図 3.5 に $P_0 \cap p_0^{-1}(M_0)$ を示した。

トーラス $p_0^{-1}(M_0)$ の両側は solid torus で共通の meridian $p_0^{-1}(k_0) = p_0^{-1}(M_0) \cap p_0^{-1}(D_0)$ を持つ。また、この $p_0^{-1}(k_0)$ は P_0 が定める flow の periodic orbit と見做すことができる。

$S^2 \times S^1$ 上の S^1 方向の flow を "standard flow" ということにすると、standard flow と homotopic な flow を Reeb flow とする $S^2 \times S^1$ の接触構造は存在しないことが知られている（[10]）。一方、$S^2 \times S^1$ の tight な接触構造は unique であることが知られており、（私の俄勉強の知識では）$p_0^{-1}(k_0)$ が P_0 の flow の periodic orbit となるという事実は P_0 が定める接触構造が tight であることを強く示唆しているように思うのだ

が.... （接触構造については、[10] およびその参考文献を参照して下さい）。

注意 *4.* flow-spine P_0 が定める flow は standard flow とは homotopy class が異なるということは、Reidemeister-Turaev torsion を用いて 古宇田氏 によって示されている。

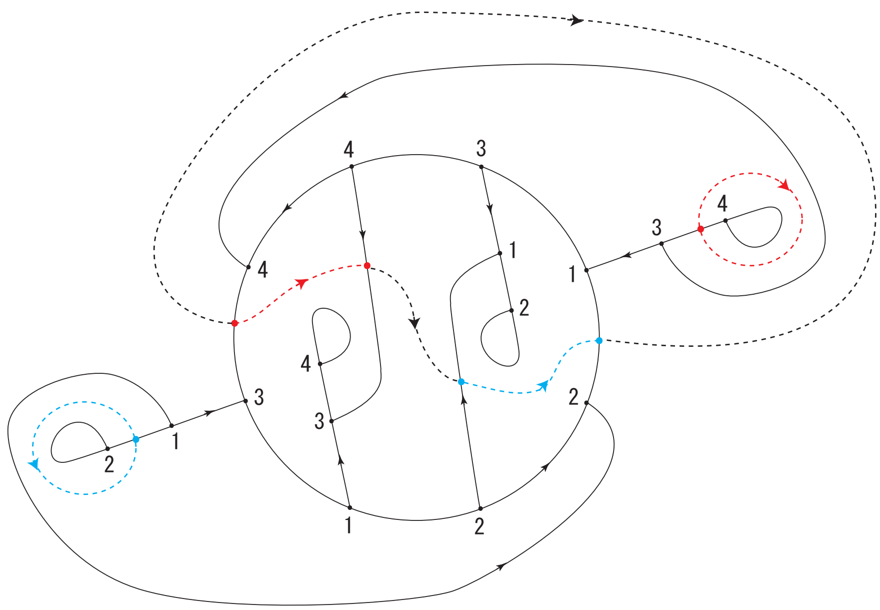


図 3.4: a non-separating sphere of $S^2 \times S^1$ drown on P_0

3.2 $S^2 \times S^1$ の standard flow からの surgery move

flow-spine の "surgery move" とは、invariant solid torus の境界上の flow を固定して内部の flow の homotopy class を変えるような変形のことである（[6]）。例えば、図 3.6 に示された 2 つの DS-diagram はともに meridian（の homology class）が $[\alpha+\beta]+[\beta+\gamma]$ である solid torus を表すので、左図のような部分を持つ DS-diagram を右図で置き換えれば（多様体は不変のまま）異なる homotopy class の flow を定める flow-spine が得られる。この稿では、surgery move の結果が ℓ-type flow spine になるようなものを考える。

$S^2 \times S^1$ の standard flow（の homotopy class）を表す最も簡単な flow-spine は 図 3.7 に示した頂点を持たない flow-spine である（図中の点「*」は spine の頂点ではなく、辺上の同一視される点を目印として示したものである）。図 3.7 に色付けて示した部分は 図 3.6 左図と同じであるので、この部分を同右図で置き換える。この surgery move で得られる flow-spine は、前節の P_0 である。

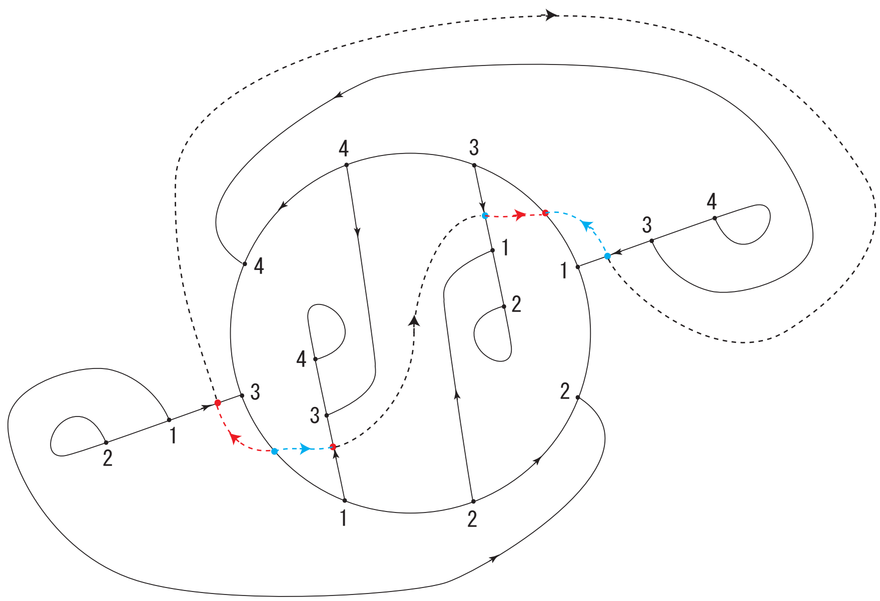
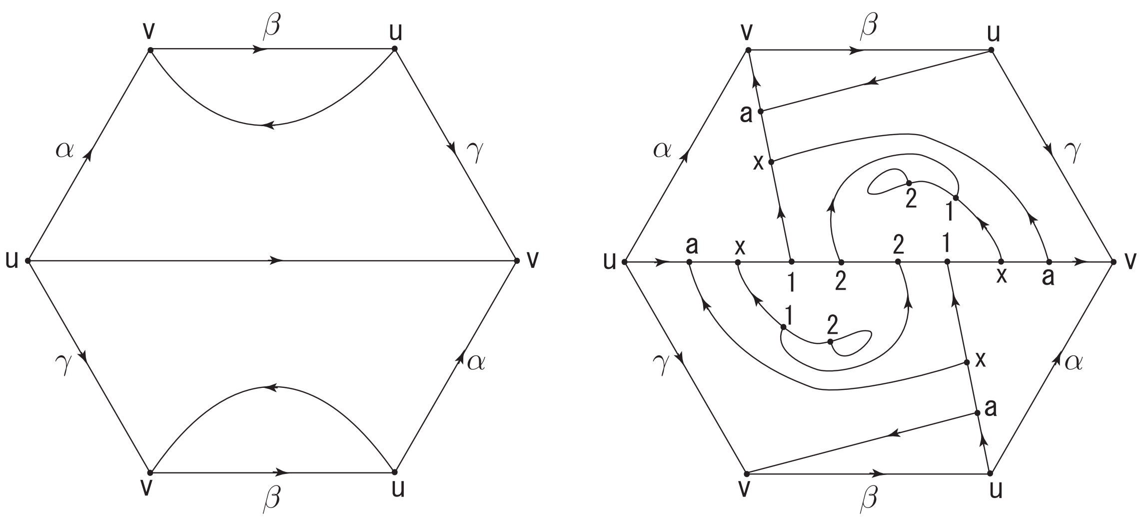


図 3.5: an invariant Heegaard surface for the flow defined by P_0



neutral ℓ-type

図 3.6: DS-diagrams of $D^2 \times S^1$ with the same meridian $[\alpha + \beta] + [\gamma + \beta]$

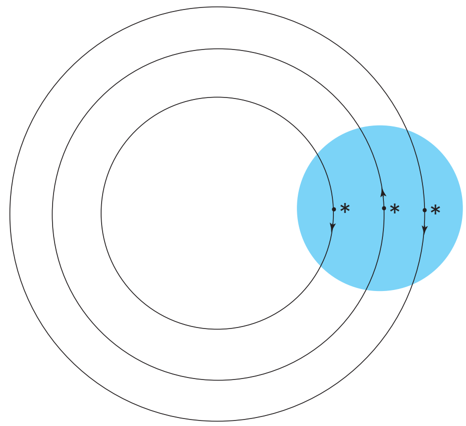


図 3.7: the standard flow on $S^2 \times S^1$

3.3 P_0 からのさらなる 2-fold branched covering

P_0（図 3.3）の 4 を頂点とする 1 辺形（2 を頂点とする 1 辺形でも同じ）が表す DS-knot k_* は 2 種類の 2-fold branched covering を持ち、これら 2 つは共に再び $S^2 \times S^1$ を与える。k_* は non-separating sphere $p_0^{-1}(D_0)$ と 2 点で交わり、$p_0^{-1}(D_0)$ と一つの arc で交わる Möbius band M_* の境界となるような knot である。

3.3.1 flow-spine P_2

最初の k_* の 2-fold branched covering は、図 3.8 で与えられる。この spine を P_2 とし、branched covering を $p_2 : S^2 \times S^1 \longrightarrow S^2 \times S^1$ で表す。

P_0 によって定まった non-separating sphere $S_0^2 = p_0^{-1}(D_0)$ の持ち上げ $p_2^{-1}(S_0^2)$ は、S_0^2 の 2 点 $k_* \cap S_0^2$ で分岐する 2-fold branched covering で、$S^2 \times S^1 = p_2^{-1}(S^2 \times S^1)$ においても non-separating sphere となる。$P_2 \cap p_2^{-1}(S_0^2)$ を 図 3.9 に示した。また、k_* を境界とする Möbius band M_* の持ち上げ $p_2^{-1}(M_*)$ は 図 3.10 に示した種数 1 の Heegaard surface となり、これは P_2 が定める flow によって invariant と見做せる。当然ながら、$p_2^{-1}(S_0^2) \cap p_2^{-1}(M_*)$ がこの Heegaard surface の両側の solid torus に共通の meridian である。

P_2 は standard flow から 図 3.11 に示した 2 カ所で、図 3.6 の surgery moves を施すことによっても得ることができる。また、P_2 が頂点数 0 の flow-spine に regular moves（flow の homotopy class を不変にする flow-spine の move、[6] 参照）で変形されることを示すことができるので、P_2 の定める flow は standard flow に homotopic である。したがって、P_2 が定める接触構造は overtwisted であることがわかる。spine P_2 からどのように overtwisted disk を発見するかは今後の研究課題となる（[10] 参照）。

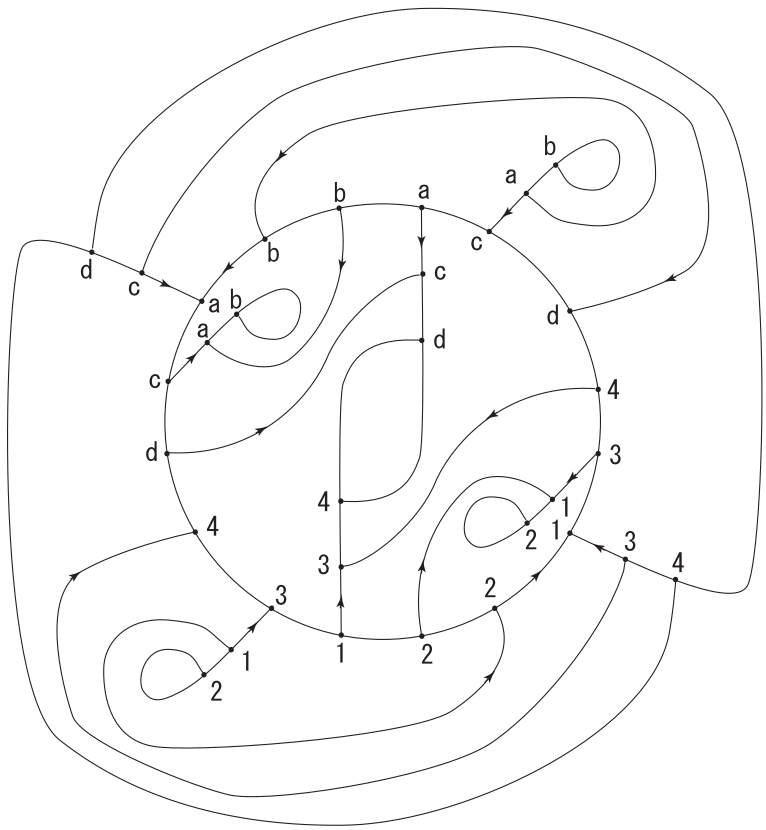


図 3.8: an ℓ-type flow-spine P_2 for $S^2 \times S^1$

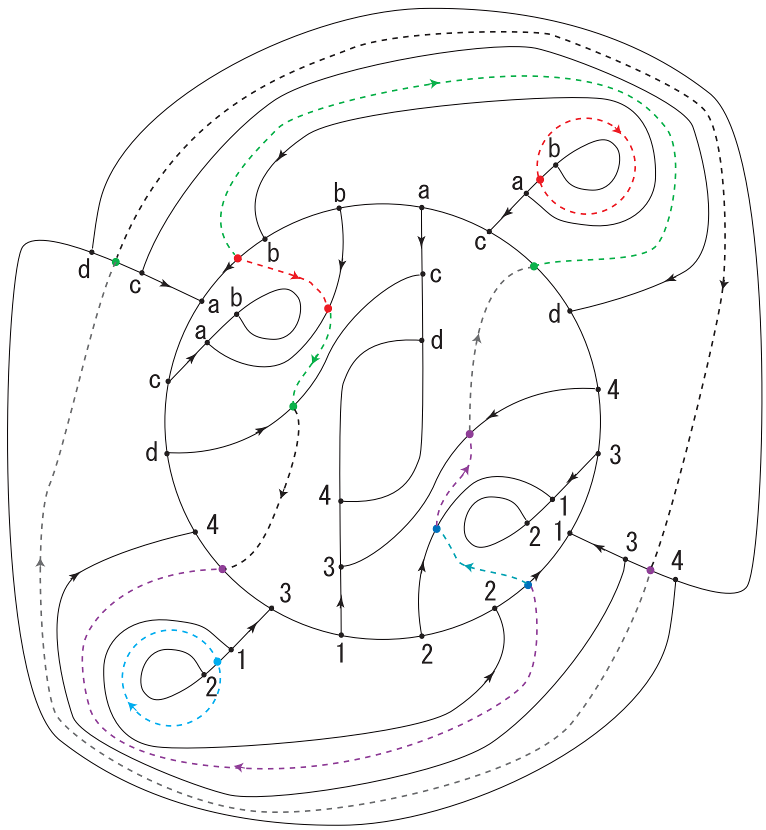


図 3.9: a non-separating sphere of $S^2 \times S^1$ drawn on P_2

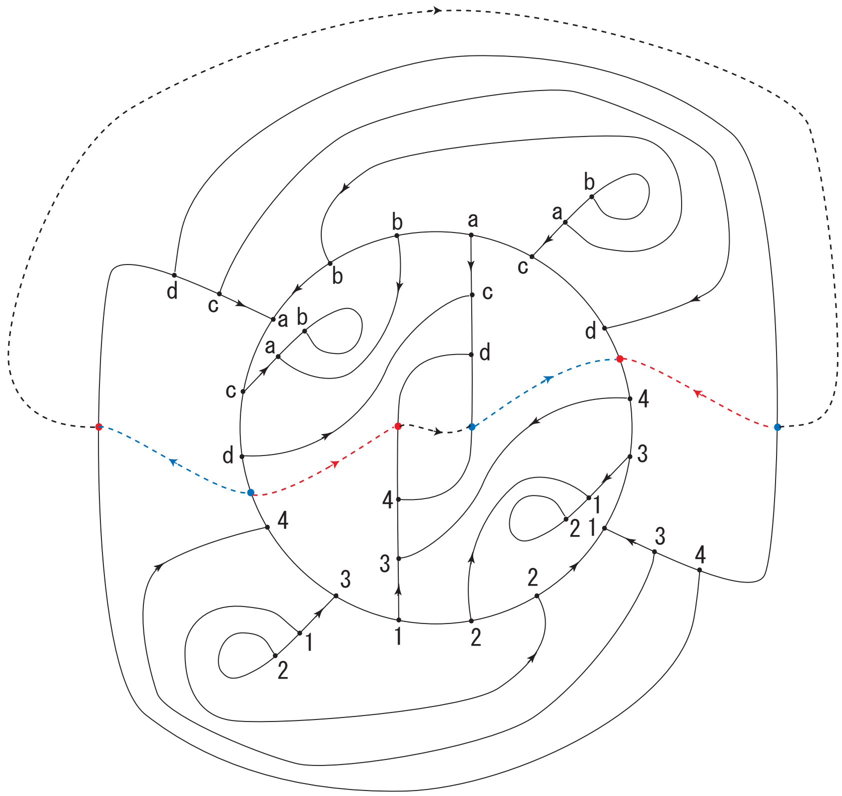


図 3.10: a Heegaard surface invariant under the flow defined by P_2

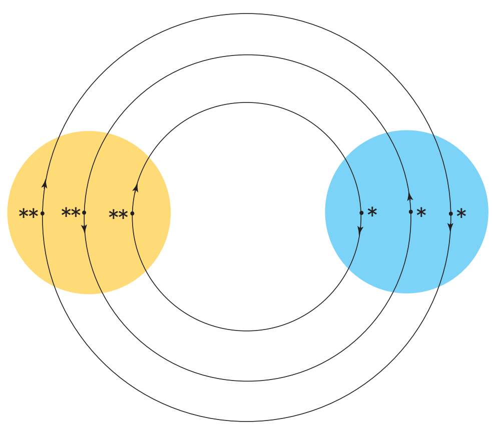


図 3.11: two surgery moves on the standard flow on $S^2 \times S^1$

3.3.2 flow-spine P_3

もう一つの k_* の 2-fold branched covering は 図 3.12 で与えられる。この flow-spine を P_3 で表し、branched covering を $p_3 : S^2 \times S^1 \longrightarrow S^2 \times S^1$ で表す。P_0 が表す non-separating sphere S^2_0 は 図 3.13 に示されたものに持ち上げられ、k_* を境界とする Möbius band M_* は図 3.14 に示された Klein bottle に持ち上げられる。

P_3 の Reidemeister-Traev torsion は standard flow と一致する（by 古宇田氏）。しかし、P_2 の場合とは異なり、これが standard flow に homotopic か否かは分かっていない。むしろ、P_3 は standard flow とは homotopy class が異なるのではないかと思っており、次を予想している。

予想 1. P_3 は本質的に block number 2 あろう。ここで、本質的に block number 2 とは、regular moves によって block number 1 には変形できないことをいう。

また、上に述べたように P_0 が tight な接触構造を定めるとすると、この P_3 の定める接触構造も overtwisted ということになる。

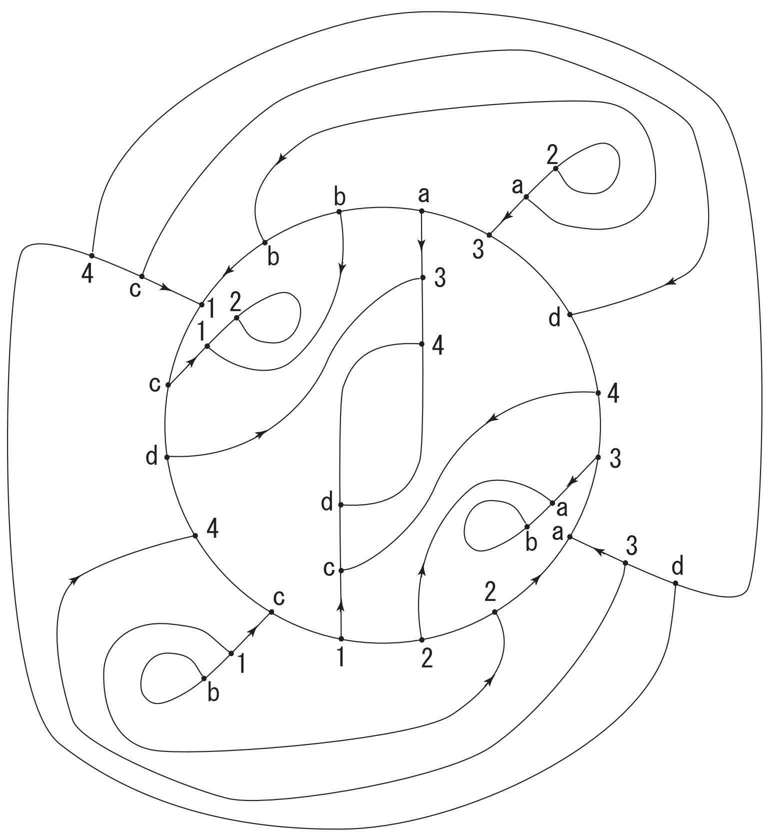


図 3.12: an ℓ-type flow-spine P_3 for $S^2 \times S^1$

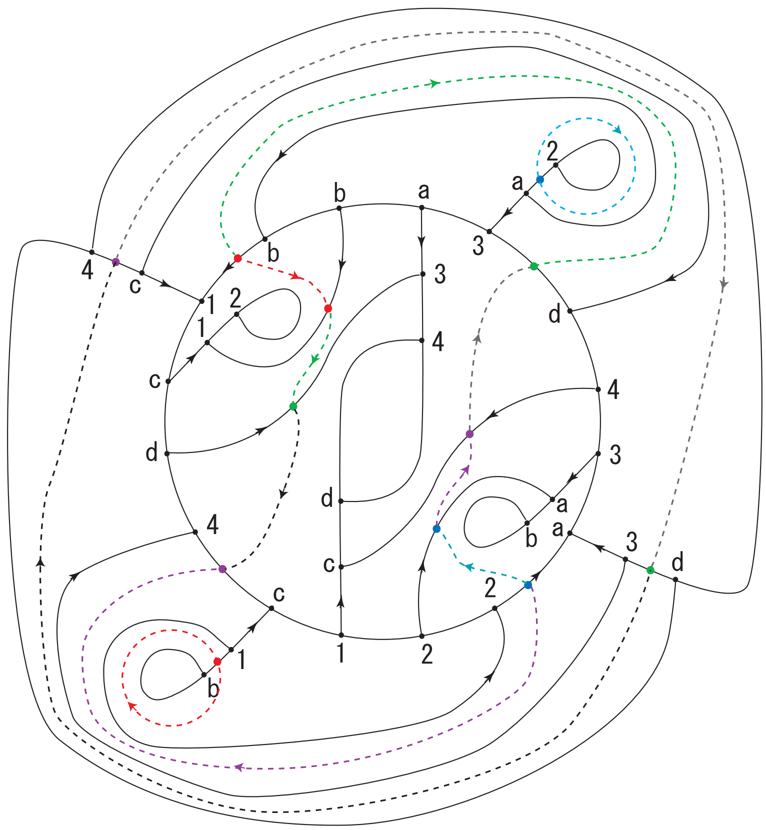


図 3.13: a non-separating 2-sphere drawn on P_3

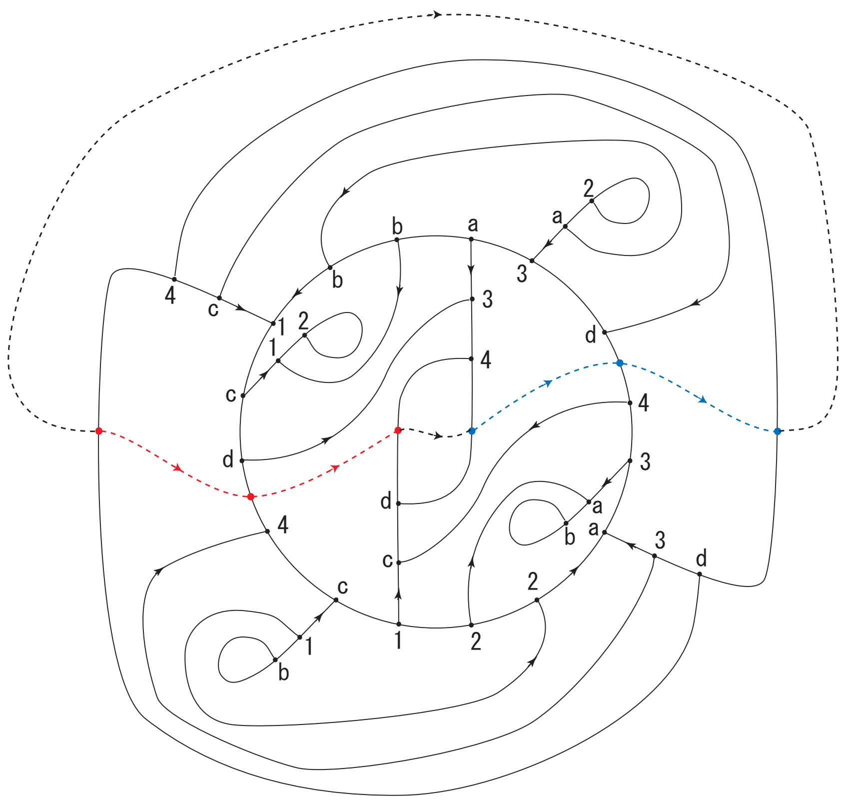
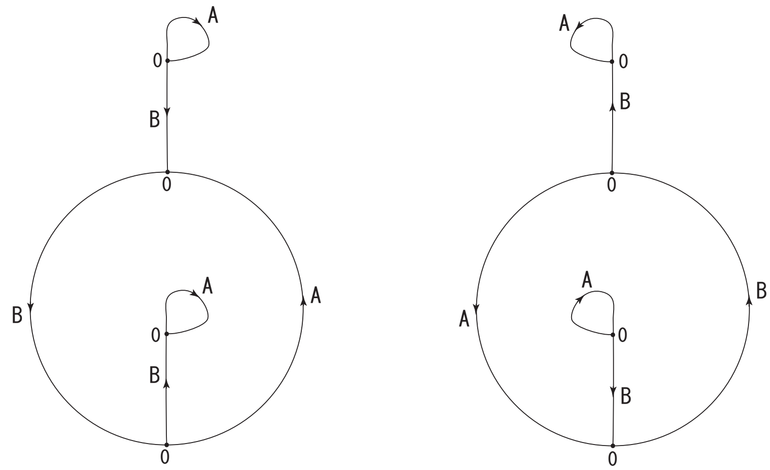


図 3.14: a one-sided Klein bottle invariant under the flow for P_3

4 S^3 の ℓ-type flow-spine

4.1 ℓ-abalone と r-abalone

S^3 の基本的な spine は、頂点数 1 の abalone である。 flow-spine としては、図 4.1 に示した ℓ-abalone $Q_{\ell a}$ と r-abalone Q_{ra} の２種類を区別しなければならない。



ℓ-abalone $Q_{\ell a}$　　r-abalone Q_{ra}

図 4.1: the abalone

$Q_{\ell a}$ が定める (non-singular) flow の homotopy class を $[X_{\ell a}]$ 、Q_{ra} が定める flow の homotopy class を $[X_{ra}]$ とする。S^3 の non-singular vector field の homotopy class が $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$（$S^2$ の 3 次元ホモトピー群）の元として表せ、$\pi_3(S^2)$ が positive Hopf flow で生成されることから $[X_{\ell a}] \neq [X_{ra}]$ であることが分かる（次節参照）。

4.2 Hopf flow を表現する flow-spine

S^3 上の Hopf fibration の fiber を orbit とする flow を Hopf flow、それを生成する vector field を Hopf vector field という。Hopf flow は、すべての orbit が同一の周期を持つ periodic orbit であるという性質で特徴付けされる。Hopf flow では任意の 2 つの orbit は Hopf link をなすが、この linking number が $+1$ であるか -1 であるかで homotopy class が相異なることが知られている。

Hopf flow を忠実に表現する flow-spine が、図 4.2 に示された $Q_{\ell h}$ および 図 4.3 に示された Q_{rh} である。$Q_{\ell h}$ が tight contact structure を定めるとされるものである。

$Q_{\ell h}$, Q_{rh} の定める flow の homotopy class をそれぞれ $[X_{\ell h}]$, $[X_{rh}]$ で表すと、上

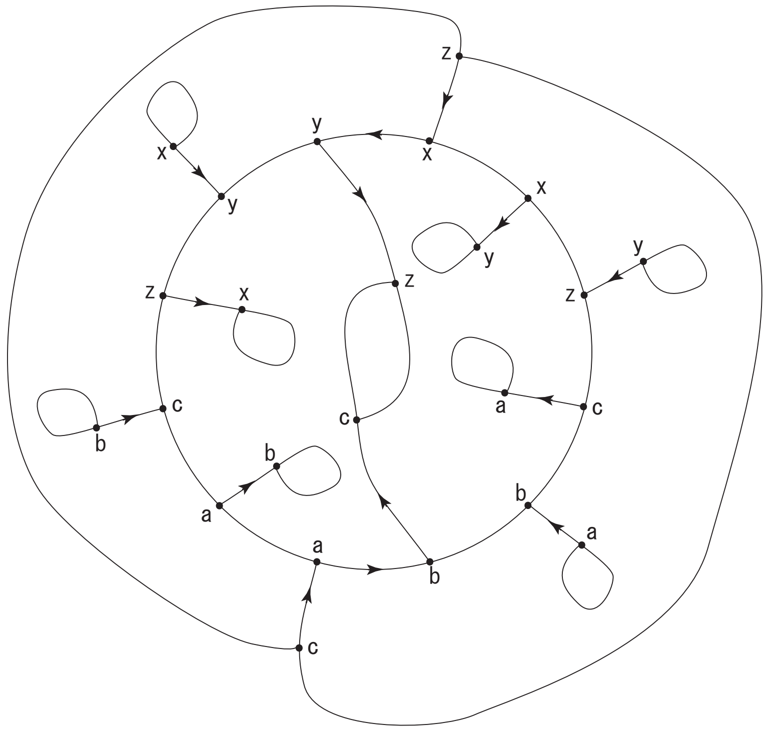


図 4.2: the flow-spine $Q_{\ell h}$ which represents the positive Hopf flow

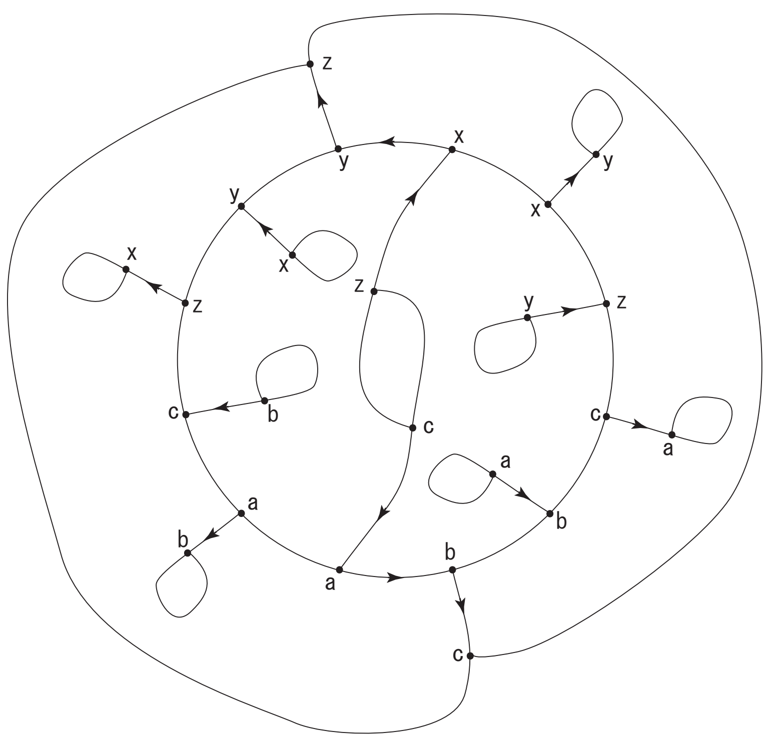


図 4.3: the flow-spine Q_{rh} which represents the negative Hopf flow

に述べたように $[X_{\ell h}] \neq [X_{rh}]$ である。さらに、abalone との関係は $[X_{\ell h}] = [X_{\ell a}]$, $[X_{rh}] = [X_{ra}]$ であることが確かめられる。

4.3 頂点数の少ない S^3 の ℓ-type flow-spine

名称変更のお知らせ

いままで ”surgery move” と呼んでいた manifold を不変にした flow-spine の変形を、今後 ”∞-surgery move” と呼ぶことにします。Dehn-surgery としては ∞-surgery であることを強調し、(manifold を変えることもある) [10] でも用いられている ”coil surgery” などとの混同を回避するためです。ご協力をお願いします。

頂点数が 4 以下の S^3 の ℓ-type flow-spine の定める flow の homotopy class は、すべて $[X_{\ell a}]$ に等しいことが確かめられる、実際にこのような flow-spine をすべて書き上げ、そのそれぞれが flow-spine の regular move (flow の homotopy class を不変にする flow-spine の変形) で $Q_{\ell a}$ に変形できることを確かめた。

ℓ-abalone $Q_{\ell a}$ は 図 4.4 に示した 2 つの coils c_1, c_2 を持つ。これらの coil に沿った図 4.5 (= 図 3.6) の ∞-surgery move を考える。coil c_1 に沿った ∞-surgery move の結果が図 4.6 の ℓ-type flow-spine Q_1 であり、c_2 に沿って同様の操作を施した結果が図 4.7 の Q_2 である。

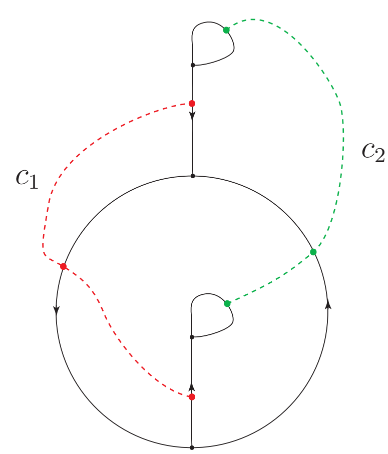
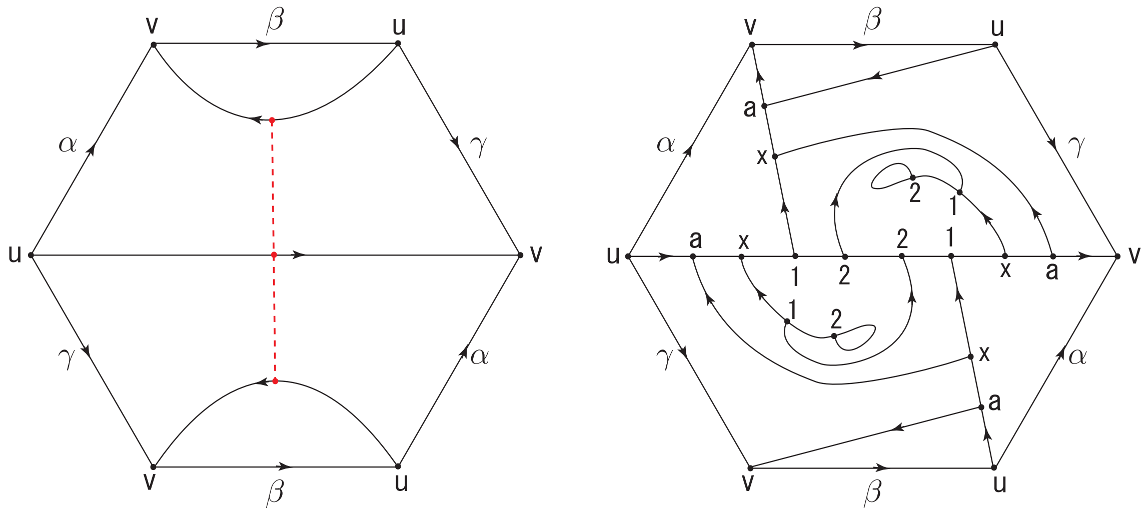


図 4.4: coils c_1 and c_2 in $Q_{\ell a}$

2 つの flow-spine Q_1, Q_2 の定める flow の homotopy class は共に r-abalone の class $[X_{ra}]$ と同じであることを示すことができる。$Q_{\ell a}$ の定める cntact structure が tight で、$[X_{ra}] \neq [X_{\ell a}]$ ということであるので、Q_i $(i = 1, 2)$ の contact structure は overtwisted ということになるのだろう。



neutral $\qquad$ ℓ-type

図 4.5: ∞-surgery move along a coil

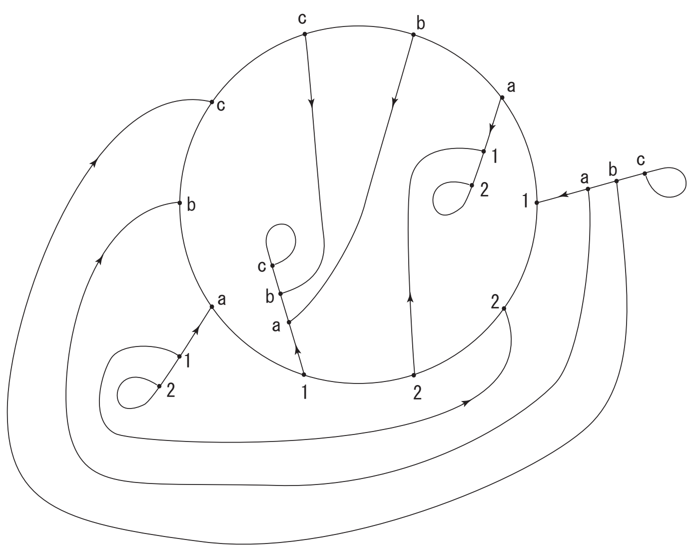


図 4.6: an ℓ-type flow-spine Q_1 for S^3

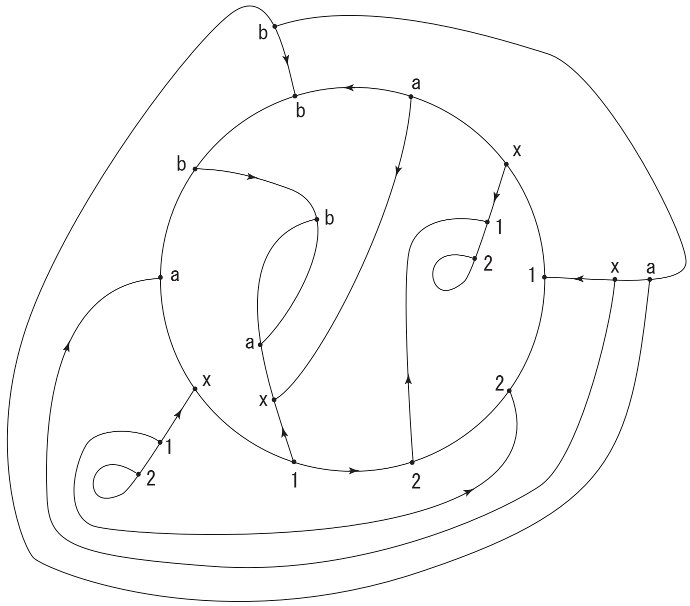


図 4.7: an ℓ-type flow-spine Q_2 for S^3

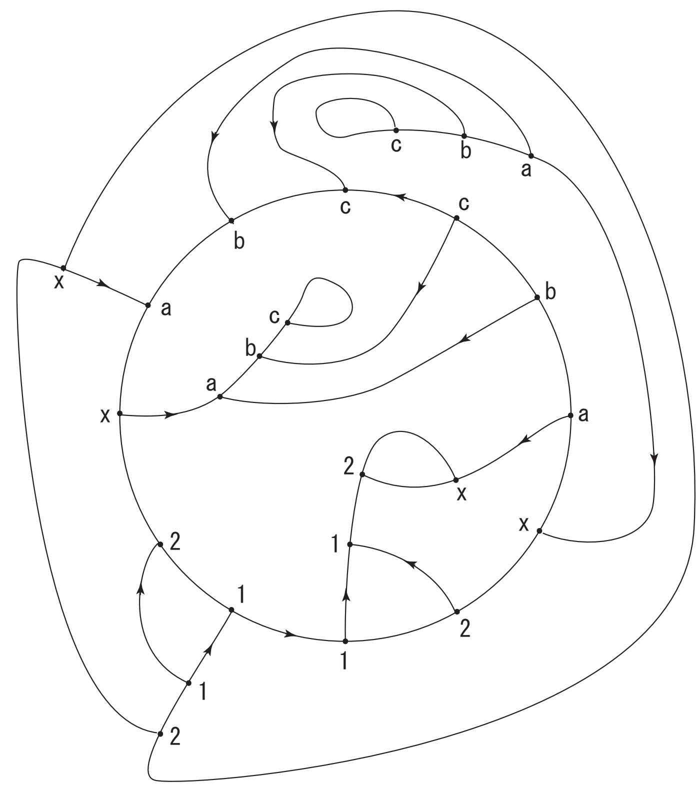


図 4.8: an ℓ-type flow-spine Q_3 for S^3

もう一つ $[X_{ra}]$ と同じ homotopy class の flow を定める ℓ-type flow-spine を挙げておく。それが 図 4.8 に示した Q_3 である。

5 T^3 の ℓ-type flow-spine

5.1 T^3 の canonical flow-spine

3-torus T^3 の canonical というべき flow-spine は、やはり 図 2.1 の DS-diagram で表されるものであろう。この flow-spine を Φ_{can} で表すことにする。これは ℓ-type flow-spine ではなく、先に述べたように Φ_{can} の flow を Reeb flow とするような接触構造は存在しない。しかしながら、Φ_{can} は T^3 の頂点数最小の spine であり、様々な対称性を表している。またこれも先に述べたが、T^3 の linear flow は Φ_{can} の flow となる。力学系的にみれば、T^3 の "canonical flow" はやはり linear flow であろう。

5.2 T^3 の tight な接触構造

$T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ の tight な接触構造は次のように完全に分類されている（[8]）。

定理 5.1. 任意の自然数 n に対し、接触形式 $\alpha_n = \cos 2\pi nz\, dx + \sin 2\pi nz\, dy$ が定める T^3 の接触構造 ξ_n は *tight* である。さらに、$n \neq m$ であれば (T^3, ξ_n) と (T^3, ξ_m) は接触同相ではない。

定理 5.2. 任意の接触構造 (T^3, ζ) に対し、自然数 n が存在し (T^3, ζ) は (T^3, ξ_n) に接触同相となる。

上の ξ_n の Reeb vector field は $R_n = \cos 2\pi nz\, \partial_x + \sin 2\pi nz\, \partial_y$ であり、この R_n は

$$R_{n,t} = (1-t)\partial_z + t(\cos 2\pi nz\, \partial_x + \sin 2\pi nz\, \partial_y) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

によって、linear vector field ∂_z に homotopic である。したがって、接触構造 ξ_n を与える ℓ-type flow spine はすべて Φ_{can} と同じ homotopy class（すなわち、regular moves で Φ_{can} に変形できる）ということになる。

(T^3, ξ_1) を与えると思われる ℓ-type flow-spine を構成してみた、それが 図 5.1 の Φ_1 である（これが実際に (T^3, ξ_1) を与えることの吟味は、次回箱根セミナーの課題としたい）。この Φ_1 は頂点数 15 と、T^3 の special spine の最小頂点数 6 と比べて、かなり大きい頂点数のように思えるが、今までに構成した T^3 の ℓ-type flow-spine としては頂点数最小である。もう一つ T^3 の 15 頂点 ℓ-type flow-spine が見つかっている、それが 図 5.2 の Φ_* である。こちらの方は、Φ_{can} から 1 回の ∞-surgery move で構成し

たので、Φ_* の flow は Φ_{can} とは homotopy class が異なると思われる。したがって、Φ_* の定める接触構造は overtwisted であろうと予想している（これも次回の課題としたい）。

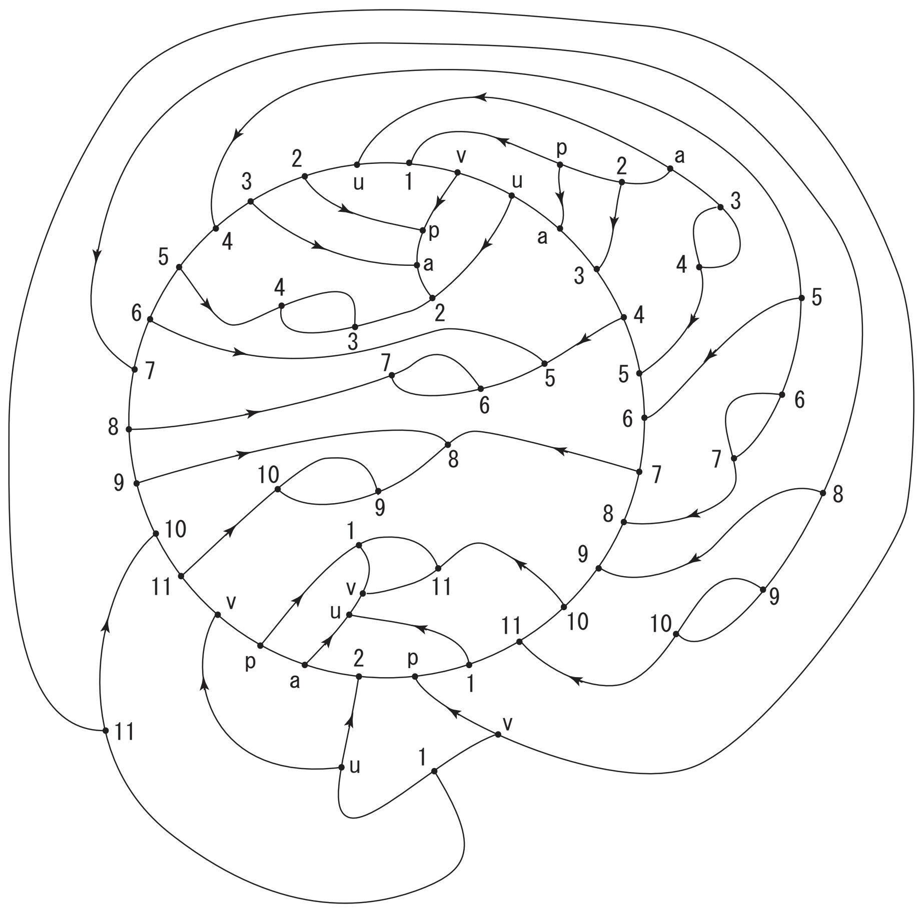


図 5.1: 接触構造 ξ_1 を与えると思われる T^3 の ℓ-type flow-spine Φ_1

6 Poincaré sphere の ℓ-type flow-spine

6.1 $\Sigma(2,3,5)$ と $\overline{\Sigma(2,3,5)}$

Poincaré homology 3-sphere $\Sigma(2,3,5)$ の ℓ-type flow-spine としては、かの有名な正 12 面体表示（図 6.1）がある、これを Ψ_{std} で表す。この Ψ_{std} は $\Sigma(2,3,5)$ の tight な接触構造を定める（[10]）。

図 6.1 の鏡像の DS-diagram（図 6.2）が定める flow-spine を Ψ_{mir} とする。この manifold は、$\Sigma(2,3,5)$ の orientation を逆にしたもの（これを $\overline{\Sigma(2,3,5)}$ とする）で

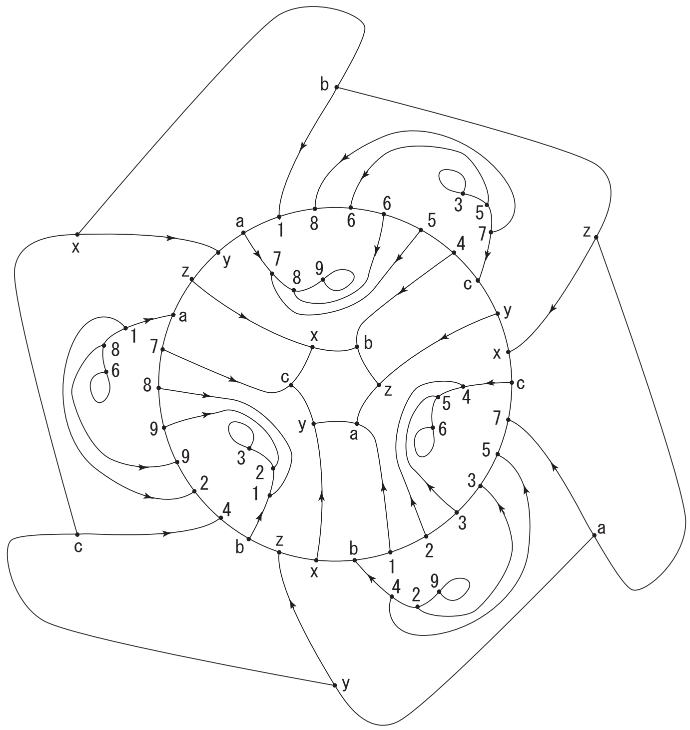


図 5.2: もう一つの T^3 の 15 頂点 ℓ-type flow-spine Φ_*

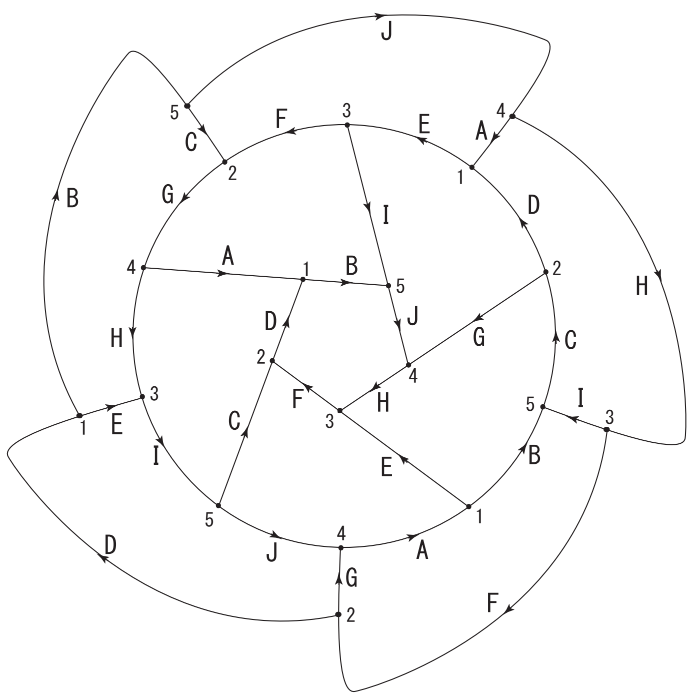


図 6.1: the standard flow-spine Ψ_{std} for the Poincaré homology sphere $\Sigma(2,3,5)$

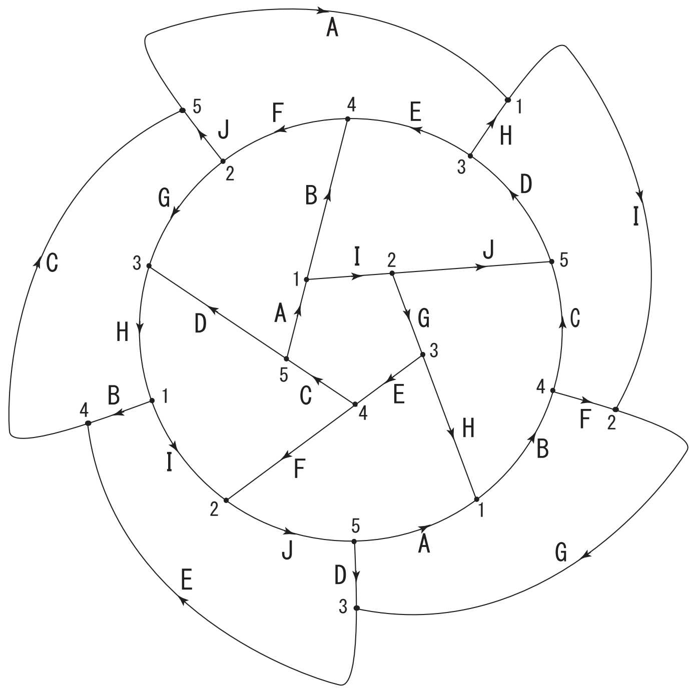


図 6.2: a flow-spine Ψ_{mir} of the orientation reversed Poincaré sphere $\overline{\Sigma(2,3,5)}$

ある。$\overline{\Sigma(2,3,5)}$ には tight な接触構造が存在しないことが知られている（[10]）。したがって、Poincaré sphere の接触構造を議論する際には、$\Sigma(2,3,5)$ と $\overline{\Sigma(2,3,5)}$ とをしっかり区別しなければならない。ところで、”DS” の名前の起源の一つでもある Seifert-Threlfall の教科書にある Poincaré sphere の DS-diagram は Ψ_{mir} と同じ図になっている。その図から彼等がどのように manifold の orientation を定めようとしたか、あるいは orientation は無視したか、は定かではないが、この教科書を引用するときには注意が必要である。

6.2 $\Sigma(2,3,5)$ の気になる ℓ-type flow-spine

図 6.3 の ℓ-type flow-spine Ψ_1 が $\Sigma(2,3,5)$ を表すことが [14] に 例.1 として示されている。この例を作った 35 年前には ℓ-type flow-spine などは意識していなかったが、接触構造を考えるというこの機会に再発見ということになった。Ψ_1 の flow が Ψ_{std} と同じ homotopy class であることは、実際に Ψ_1 を Ψ_{std} に regular moves で変形して示すことができる。しかし、この regular moves の列は r-type vertex を避けることが出来ないため、Ψ_1 の接触構造が Ψ_{std} と同じかどうかを決定するには至っていない。

この Ψ_1 が気になる理由は、これが ℓ-type flow spine の範囲内の regular moves

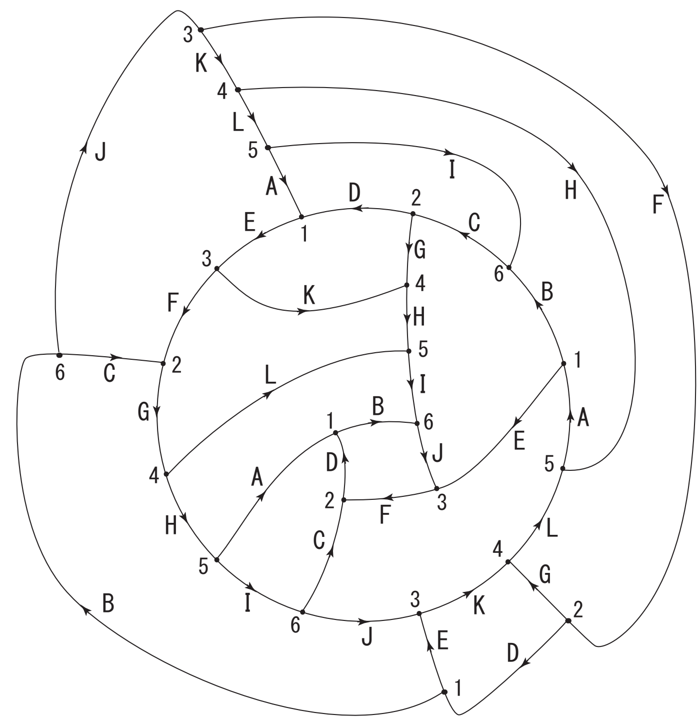


図 6.3: the ℓ-type flow-spine Ψ_1 for $\Sigma(2,3,5)$ with 6 vertices

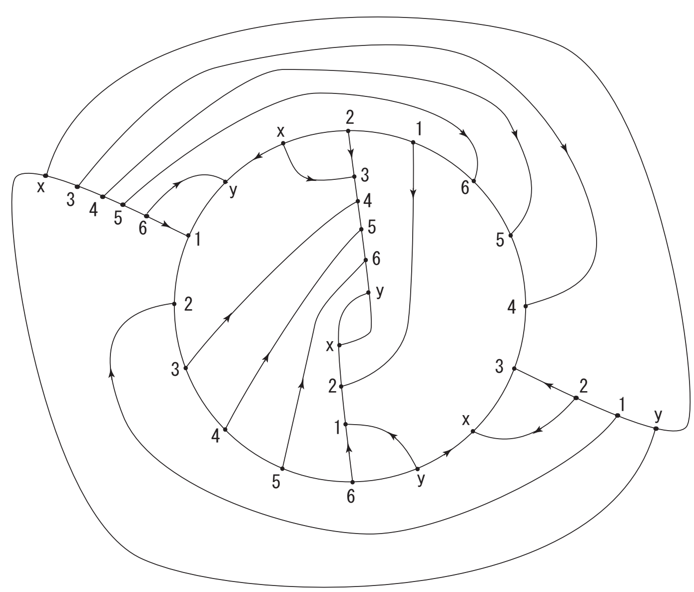


図 6.4: reducing Ψ_1 into one with block numer 2

で 図 6.4 の block number 2 の ℓ-type flow spine に変形されることである（"block number" については [2] 参照)。一般に manifold M の flow-spine の block number は M の Heegaard genus $HG(M)$ で下から抑えられる（[2])。したがって、図 6.4 は block number が最小値 $HG(\Sigma(2,3,5)) = 2$ と一致する ℓ-type flow-spine ということになる。レンズ空間 $L(p,q)$ においては、block number 1 の ℓ-type flow-spine の接触構造はすべて tight になっているようである。これをもって次のような予想を立てるのは、あまりにも楽観的過ぎるだろうか。

予想 2. Ψ_1 は $\Sigma(2,3,5)$ の tight な接触構造、すなわち Ψ_{std} と同じ接触構造、を定めるであろう。

予想 3. 一般的に、M の block number $HG(M)$ の ℓ-type flow-spine は tight な接触構造を定めるであろう。

予想 2 が正しければ、Ψ_1 から Ψ_{std} への（途中で r-type の頂点を生じるような）regular moves の列を調べることによって、接触構造を不変にする moves を考える上でのヒントが得られるかも知れない。

7 双曲多様体の ℓ-type flow-spine

7.1 MFW-manifold

MFW-manifold（Matveev-Fomenko-Weeks manifold, Weeks manifold とも呼ばれるので M_W で表す）は体積最小の 3 次元閉双曲多様体で、その flow-spine としては 図 7.1 に示した Π_{can} が知られている（[9])。この M_W の flow-spine Π_{can} は見ての通り ℓ-type ではない（頂点 u, v が r-type）ではあるが、M_W の様々な性質を表す対称性の強い flow-spine であるので、これを M_W の flow-spine の標準形としたい。例えば、Π_{can} から M_W がレンズ空間 $L(5,3)$ 内の (1,1)-knot $K_2(5,3)$ の二重分岐被覆になっていることが直ちに読み取れる（[13] 参照)。また、Π_{can} の core knot（[13]）としては、その補空間が $M2_2$ であるような knot k_1 と、$M3_1$ であるような knot k_2 が現れる（$M2_2$, $M3_1$ については [11] 参照)。k_1, k_2 はともに fibered knot であるので、これらが定める open book decomposition から接触構造を見ることができるかもしれない。このような事実から、Π_{can} の flow は、M_W 上の flow として、かなり特徴的な性質を持っていることが期待される。

今までに構成できた M_W の ℓ-type flow-spine としては 図 7.2 に示した Π_1 がある。この flow-spine は、Π_{can} から「E-cycle の取り換え」というマニアックな荒業を使って構成したもので、Π_1 の flow と Π_{can} の flow との関係はよく分からなくなっている。た

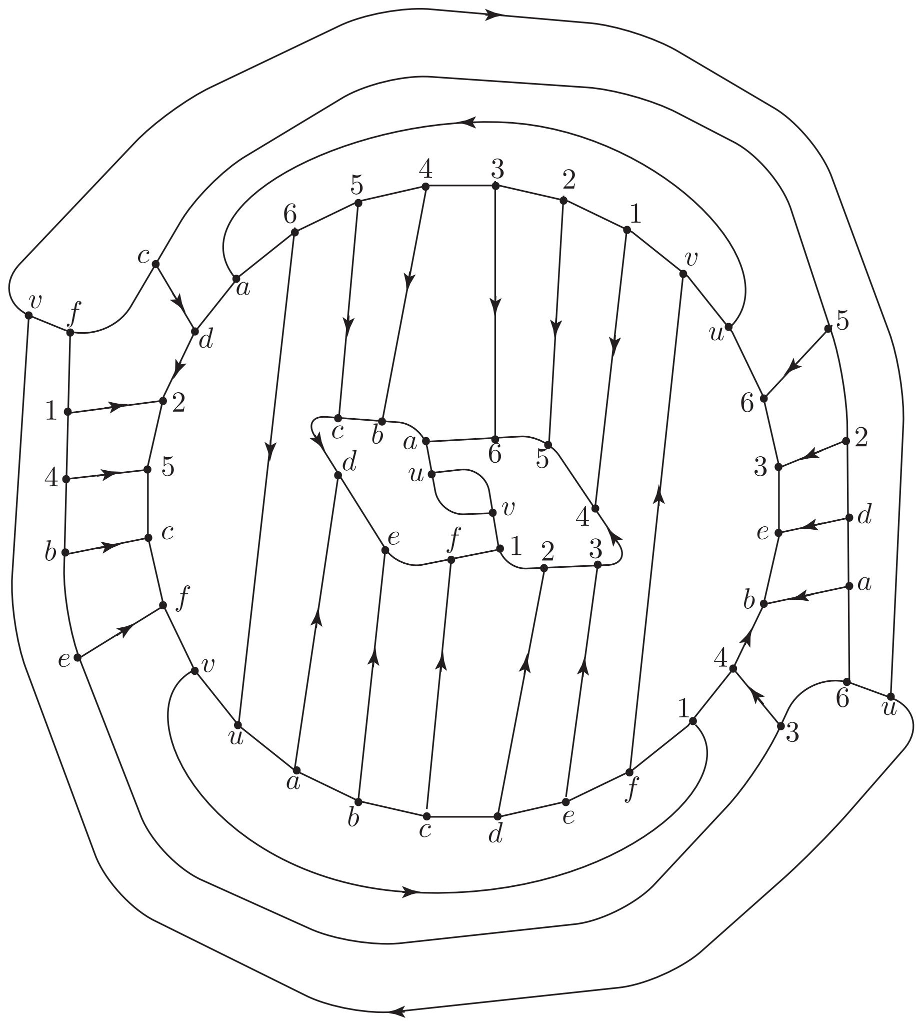


図 7.1: the flow-spine Π_{can} of M_W with block number 2

だし、Π_1 自体は block number 3 であるが、positve block $\{1^+, 2^+, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+, 7^+\}$ と negative block $\{x^-\}$ を交換する block change move（[2] 参照）によって、block number $2 = HG(M_W)$ の ℓ-type flow-spine に変形できるので、Π_1 は本質的には M_W の block number 最小の ℓ-type flow-spine と言えるだろう。Π_1 の flow の性質を調べる方法としては、core knot を調べることなどが考えられる。

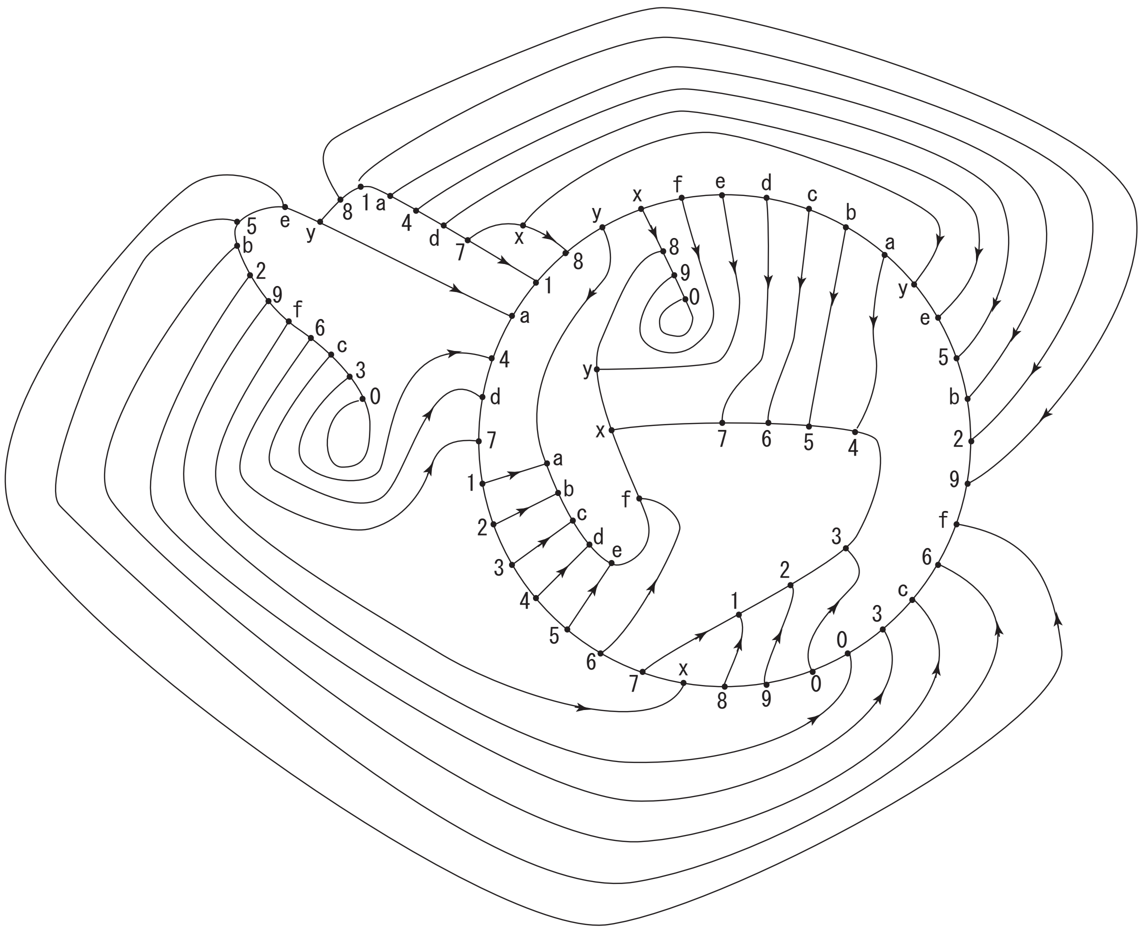


図 7.2: an ℓ-type flow-spine Π_1 for M_W

7.2 core knot の Dehn surgery による ℓ-type flow-spines

この節では、ℓ-type flow-spine を系統的に生成する方法を一つの例で紹介する。その方法とは、[13] で触れた「core knot での Dehn surgery」である。この方法は双曲多様体に対してだけ通用する方法という訳ではないが、ここでは双曲多様体を多く含むような例を取り上げる。ここで考える例の出発点は 図 7.3 の ℓ-type flow-spine である。頂

点数が無限大に発散するような flow-spine の列を考えるために "E-data" で記述する。E-data とは E-cycle 上の頂点の配置（arrangement）と各頂点の type（code）の組であった（[2] 参照）。しかし、ここで議論するのはすべての頂点が ℓ-type の flow-spine ばかりであるので、code は省略して arrangement のみで E-data を表すことにする。

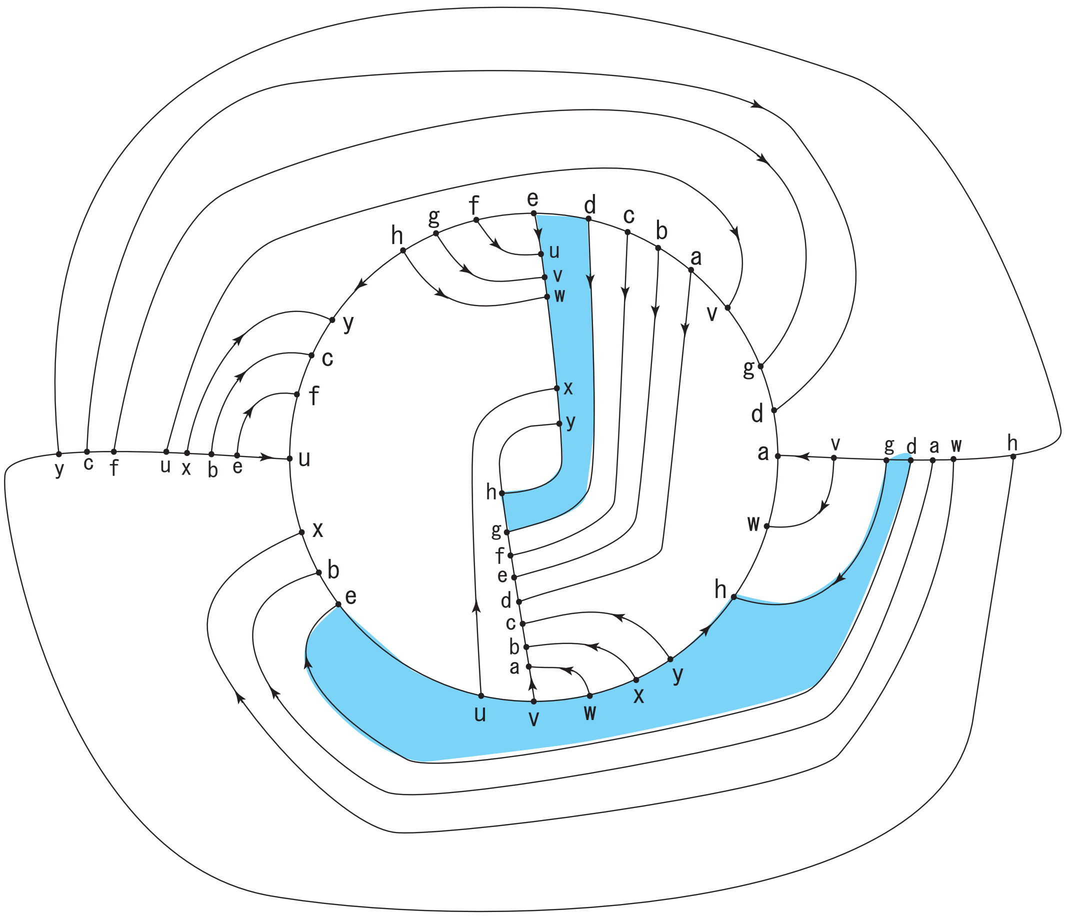


図 7.3: an ℓ-type flow-spine $P(\mathcal{E}_0)$ and its core knot

図 7.3 の ℓ-type flow-spine の E-data $\mathcal{E}_0$ は次のように読み取れる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &= W^+_{1,0}W^-_{2,0}W^+_{3,0}W^-_{4,0} \\
&\quad W^+_{1,0} = u^+v^+w^+x^+y^+,\ W^-_{2,0} = h^-w^-a^-d^-g^-v^-, \\
&\quad W^+_{3,0} = a^+b^+c^+d^+e^+f^+g^+h^+,\ W^-_{4,0} = y^-c^-f^-u^-x^-b^-e^-
\end{aligned}$$

この flow-spine を $P(\mathcal{E}_0)$ で表し、定められる manifold を $M(\mathcal{E}_0)$ とする。図 7.3 に色付けて示した面は互いに同一視され、一つの "DS-knot" を表す（[13] 参照）。この DS-knot を $k(\mathcal{E}_0) \subset M(\mathcal{E}_0)$ で表すことにすると、$M(\mathcal{E}_0) - k(\mathcal{E}_0)$ は、その T-DS-diagram

([11], [13]) を作ってみれば、S^3 内の pretzel knot $p(-2,3,7)$ の補空間 $S^3 - p(-2,3,7)$ に同相であることが分かる。

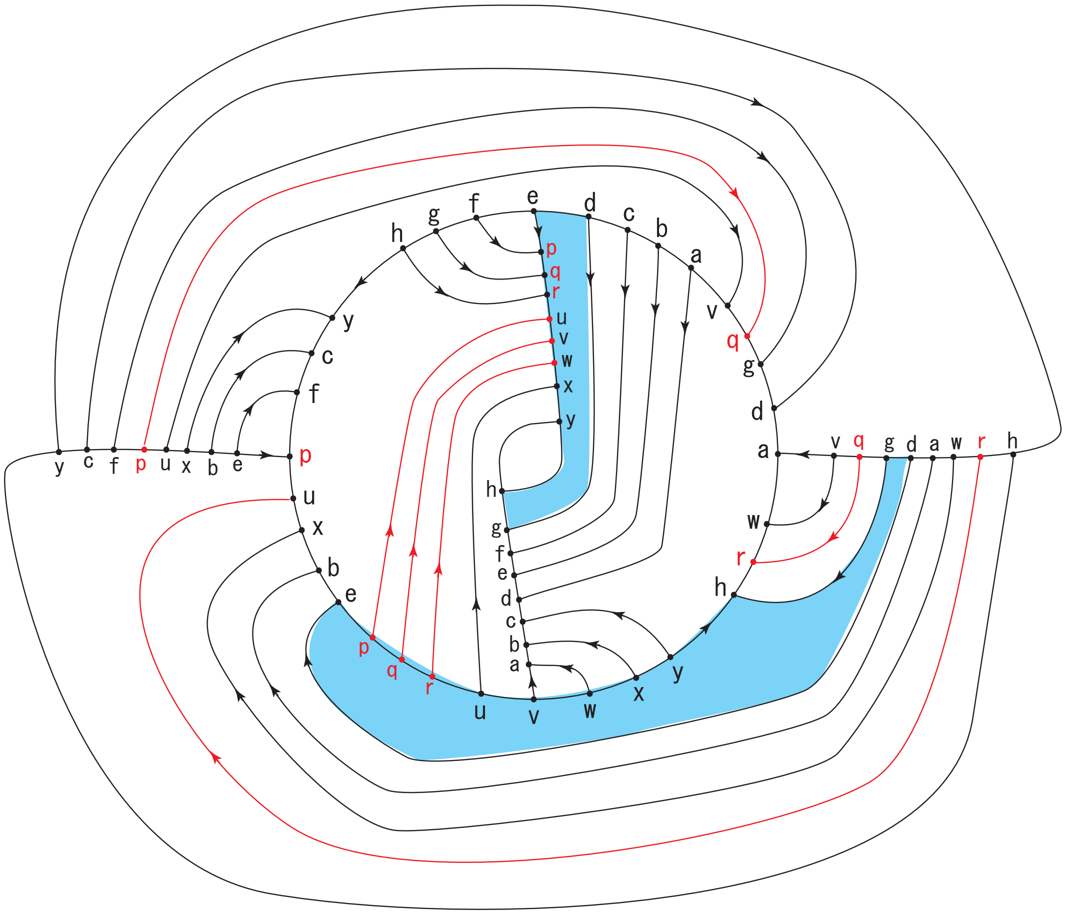


図 7.4: ℓ-type flow spine $P(\mathcal{E}_1)$ which represents the 2-fold branched cover of $K_1(8,5)$

$\mathcal{E}_0$ に $3k$ 個の頂点 $p_j,\ q_j,\ r_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ を付け加えて構成した次の block number 2 の E-data $\mathcal{E}_k$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_k &= W^+_{1,k} W^-_{2,k} W^+_{3,k} W^-_{4,k}\\
W^+_{1,k} &= (p^+_k q^+_k r^+_k) \ldots\ldots (p^+_2 q^+_2 r^+_2)(p^+_1 q^+_1 r^+_1)(u^+ v^+ w^+ x^+ y^+),\\
W^-_{2,k} &= h^-(r^-_1 r^-_2 \ldots r^-_k)(w^- a^- d^- g^-)(q^-_1 q^-_2 \ldots q^-_k) v^-,\\
W^+_{3,k} &= W^+_{3,0} = a^+ b^+ c^+ d^+ e^+ f^+ g^+ h^+,\\
W^-_{4,k} &= y^- c^- f^- (p^-_1 p^-_2 \ldots p^-_k) u^- x^- b^- e^-
\end{aligned}$$

を考えると、これらの各々が ℓ-type flow-spine $P(\mathcal{E}_k)$ に対応していることが確かめられる（$P(\mathcal{E}_1)$ を 図 7.4 に示した）。ここで、新しい頂点の導入によって付け加えられ

る辺を E-cycle の内部で見ると、それらの辺はすべて $k(\mathcal{E}_0)$ を表す二つの互いに同一視される $P(\mathcal{E}_0)$ の面を結んでいる（図 7.4 参照）ことに注意すると、$k(\mathcal{E}_0)$ と同様の DS-knot $k(\mathcal{E}_k) \subset M(\mathcal{E}_k)$ （$k(\mathcal{E}_1)$ は 図 7.4 に示した面が定める knot）が存在することが分かる。さらに、T-DS-diagram を調べると、すべての $k = 0, 1, 2, \ldots$ について $M(\mathcal{E}_k) - k(\mathcal{E}_k)$ の T-DS-diagram が全く同じものであることが確かめられる。また、簡単な計算によって 1 次元ホモロジー群が $H_1(M(\mathcal{E}_k)) = \mathbb{Z}_m$ $(m = |17 - k|)$ と計算される。したがって次が成り立つ。

定理 7.1. $M(\mathcal{E}_k) - k(\mathcal{E}_k)$ は $S^3 - p(-2,3,7)$ に同相である、すなわち $M(\mathcal{E}_k)$ は S^3 から $p(-2,3,7)$ での Dehn surgery で得られる多様体である。そして、$p(-2,3,7)$ が hyperbolic knot であるので、有限個の k を除いて $M(\mathcal{E}_k)$ は hyperbolic である。

$p(-2,3,7)$ の Dehn surgery で生じ得るレンズ空間は $L(18,5)$ と $L(19,7)$ のみであることが知られているので、$M(\mathcal{E}_k)$ はすべて既約な多様体で Heegaard genus が 2 であることも分かる（$M(\mathcal{E}_{16}) \neq S^3$ であることと $M(\mathcal{E}_{35})$ および $M(\mathcal{E}_{36})$ を与える Dehn sugery の slope が [12] で示されたレンズ空間を与える slope とは異なることを確認すればよい)。正確に証明するには至っていないが、私は次のように予想している。

予想 4. $p(-2,3,7)$ から $M(\mathcal{E}_k)$ を得る Dehn sugery の surgery 係数は $17-k$（integral surgery）であろう。さらに、$k \geq 2$ のとき、$M(\mathcal{E}_k)$ は hyperbolic であろう。

予想 3 の延長線上では次のことが予想される。

予想 5. ℓ-type flow-spine $P(\mathcal{E}_k)$ の定める $M(\mathcal{E}_k)$ の接触構造は tight であろう。

石川氏の報告 [10] に 定理 1.22 として紹介されている open book decomposition の monodromy と接触構造が tight であることを結びつける結果と、"knot info" に書かれた $p(-2,3,7) = 12n0242$ の monodromy を見比べて、「$p(-2,3,7)$ による S^3 の open book decomposition が定める接触構造は tight ではないだろうか」とか「どのようにするのかはまったく分からないが、この tight 性を $P(\mathcal{E}_k)$ の tight 性に関連付けられるだろうか」などと妄想を膨らませている。接触構造の知識をもう少し深めて、次回箱根セミナーで何らかの報告が出来ればと思っている。

参考文献

[1] Benedetti R. and Petronio C., Branched standard spines of 3-manifolds, L.N.M. 1653 Springer-Verlag (1997)

[2] Endoh M. and Ishii I., A new complexity for 3-manifolds, Japanese J. of Math. 31 (2005), 131–156.

[3] Ikeda H. and Inoue Y., Invitation to DS-diagrams, Kobe J. of Math. 2 (1985), 169–186.

[4] Ikeda H., DS-diagrams with E-cycle, Kobe J. of Math. 3 (1986), 103–112.

[5] Ishii I., Flows and spines, Tokyo J. of Math. 9 (1986), 505–525.

[6] Ishii I., Moves for flow-spines and invariants of 3-manifolds, Tokyo J. of Math. 15 (1992), 297–312.

[7] Ishii I., Complexity of 3-manifolds and combed 3-manifolds, Proc. Steklov inst. of Math. 252 (2006), 74–84.

[8] Kanda Y., The classification of tight contact structures on the 3-torus, Comm. in Analysis and Geometry 5 (1997), 413–438.

[9] Koda Y., A new classification of genus two 3-manifolds –parametrization and Reidemeister torsion–, 2005 年度慶應義塾大学修士論文.

[10] 石川昌治, 3 次元多様体の接触構造とフロースパイン, HAKONE SEMINAR 34 (2018, この報告集)

[11] 石井一平, 結び目補空間の組合せ構造と幾何構造, HAKONE SEMINAR 30 (2014), 35–73.

[12] 石井一平, $(-2,3,7)$ pretzel knot の理想四面体分割について, HAKONE SEMINAR 31 (2015), 11–44.

[13] 石井一平, $(1,1)$-結び目とその二重分岐被覆について, HAKONE SEMINAR 32 (2016), 13–36.

[14] 山下正勝、横山和夫, D-変形の実践, HAKONE SEMINAR 1 (1985), 61–104.

[15] 山下正勝, DS 流 Dehn surgery, HAKONE SEMINAR 29 (2013), 33–55.