S^3 内の $(1,1)$-結び目の DS-diagram による表示について

石井 一平

レンズ空間 $L(p,q)$（$S^3 = L(1,1)$, $S^2 \times S^1 = L(0,1)$ を含む）内の結び目 k が $(1,1)$-**結び目** であるとは、$L(p,q)$ の種数 1 の Heegaard 分解（H-分解）(V_1, V_2) $(V_j = D^2 \times S^1)$ に対して k が $\partial V_1 = \partial V_2$ と 2 点で交わり、二つの弧 $k \cap V_j$ $(j = 1, 2)$ がともに V_j 内で自明（境界 ∂V_j に平行）となることをいう。[8] では、$(1,1)$-結び目が DS-diagram を用いてどのように表示されるかを概観した。ここでは、S^3 内の $(1,1)$-結び目についての具体的な DS-表示について報告する。

1　$(1,1)$-結び目の DS-表示構成法

1.1　move R_2 および R_2^{-1}

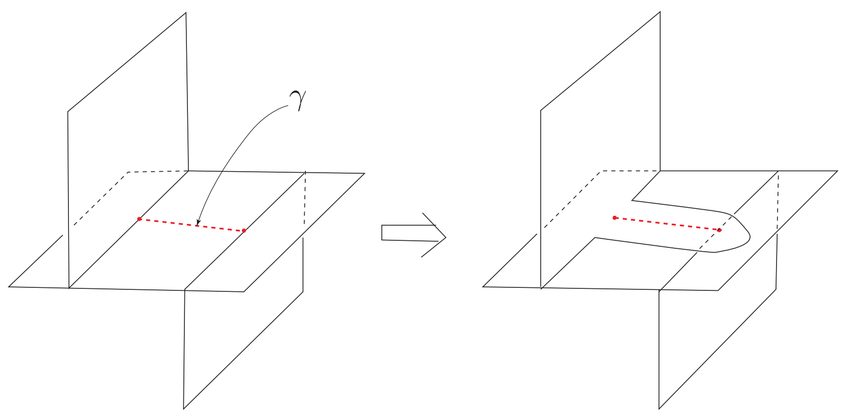


図 1.1: piping along a curve γ

図 1.1 の左図のようにスパインの面上に返上の 2 点を結ぶ曲線 γ が与えられたとき、γ に沿ってスパインを右図のように変形する操作を γ に沿う **piping** と呼び、このときの γ を **piping line** と呼ぶ 。この piping の逆操作は **2 辺形潰し** と呼ばれる。

E-cycle 付 DS-diagram に関する move R_2 とは、E-cycle を保存する 2 辺形潰しのことであり、move R_2^{-1} は E-cycle 付 DS-diagram の範囲内での piping である（[2] 参照）。

1.2 $L(p,q)$ 内の $(1,1)$-結び目

[8] では、$L(p,q)$ の２辺形を持たない block number 1 の E-cycle 付 DS-diagram が $\Delta(\mathcal{E}_n(p,q))$ $(n=1,2,3,\dots)$ であることを示し、$L(p,q)$ 内の $(1,1)$-結び目の DS-表示について次の結果を示した。

定理 1.1. $L(p,q)$ 内の $(1,1)$-結び目 k は次の (a), (b) のいずれかである。

(a) k は $\Delta(\mathcal{E}_n(p,q))$ $(n=1,2,3,\dots)$ のある面に対応する DS-knot 。

(b) k は block number 1 の E-cycle 付 DS-diagram のある２辺形に対応する DS-knot で、その DS-diagram は有限回の２辺形潰し R_2 によって $\Delta(\mathcal{E}_n(p,q))$ $(n=1,2,3,\dots)$ の一つに帰着する。

E-cycle 付 DS-diagram の piping R_2^{-1} のうち block number を不変に保つものを R_{*2}^{-1} で表すことにすると、上の定理の (b) は次のように書き換えることができる。

(b) k は $\Delta(\mathcal{E}_n(p,q))$ $(n=1,2,3,\dots)$ のいずれかから有限回の R_{*2}^{-1} を施して得られる DS-diagram の２辺形に対応する DS-knot である。

2 S^3 内の $(1,1)$-結び目

2.1 (a)-type の $(1,1)$-結び目

この分節では、S^3 内の (a)-type の $(1,1)$-結び目、すなわち DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_n(1,1))$ $(n=1,2,3,\dots)$ の一つの面が表す DS-knot を決定する。S^3 の block number 1 DS-diagram で２辺形を持たないものは E-data $\mathcal{E}_n(1,1)$ $(n=1,2,\dots)$ が表す $\Delta(\mathcal{E}_n(1,1))$ である（[8] 参照）。

まず、DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_1(1,1))$ はかの有名なアワビ（図 2.1）であり、その１辺形が表す DS-knot が 3_1-knot （他の面は trivial knot）であることはよく知られている。

DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_n(1,1))$ $(n=2,3,\dots)$ を与える $2n-1$ 個の頂点上の E-data $\mathcal{E}_n(1,1)=(\mathcal{A}_n,\phi_n)$ （$\mathcal{A}_n$ は arrangement、ϕ_n は code（[2] 参照））は、$2n-1=4m+1$ の場合と $2n-1=4m+3$ の場合に分けて次のように定義される。

$2n-1=4m+3$ $(m=0,1,2,\dots)$ の場合には $2n-1$ 個の頂点 a_j,b_j,c,d_1,d_2 $(j=$

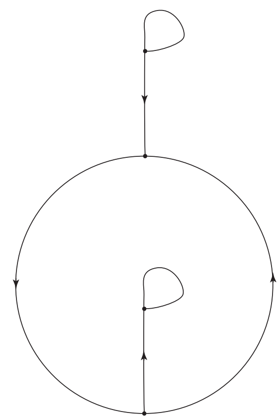


図 2.1: $\Delta(\mathcal{E}_1(1,1))$

$1,2,\ldots,2m)$ に対して code ϕ_n と arrangement $\mathcal{A}_n$ が

$$
\begin{aligned}
&\phi_n(a_j)=\phi_n(c)=r\,,\ \phi_n(b_j)=\phi_n(d_1)=\phi(d_2)=\ell \quad (j=1,2,\ldots,2m)\,,\\
&\mathcal{A}_n=W^+W^-\,,\\
&W^+=(a_1^+b_1^+a_2^+b_2^+\ldots a_m^+b_m^+)(c^+d_1^+d_2^+)(a_{m+1}^+b_{m+1}^+a_{m+2}^+b_{m+2}^+\ldots a_{2m}^+b_{2m}^+),\\
&W^-=(b_1^-a_{2m}^-b_2^-a_{2m-1}^-\ldots b_m^-a_{m+1}^-)(d_1^-d_2^-c^-)(b_{m+1}^-a_m^-b_{m+2}a_{m-1}^-\ldots b_{2m}^-a_1^-)
\end{aligned}
$$

と定められる。そして、$2n-1=4m+1$ $(m=1,2,\ldots)$ の場合には $2n-1$ 個の頂点 a_j,b_j,c $(j=1,2,\ldots,2m)$ に対して code ϕ_n と arrangement $\mathcal{A}_n$ が

$$
\begin{aligned}
&\phi_n(a_j)=\phi_n(c)=r\,,\ \phi_n(b_j)=\ell \quad (j=1,2,\ldots,2m)\,,\\
&\mathcal{A}_n=W^+W^-\,,\\
&W^+=(a_1^+b_1^+a_2^+b_2^+\ldots a_m^+b_m^+)c^+(a_{m+1}^+b_{m+1}^+a_{m+2}^+b_{m+2}^+\ldots a_{2m}^+b_{2m}^+),\\
&W^-=(b_1^-a_{2m}^-b_2^-a_{2m-1}^-\ldots b_m^-a_{m+1}^-)c^-(b_{m+1}^-a_m^-b_{m+2}a_{m-1}^-\ldots b_{2m}^-a_1^-)
\end{aligned}
$$

DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_2(1,1))$ は 図 2.2 に示したもので、この１辺形が表す DS-knot は 2-halftwists knot (4_1-knot) で、他の面は trivial knot を表す。

図 2.3 に示したものが DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_3(1,1))$ である。この１辺形は 3-halftwists knot (5_2-knot) を表し、３辺形は 1-halftwist knot (3_1-knot) を表す。他の面はすべて trivial knot である。

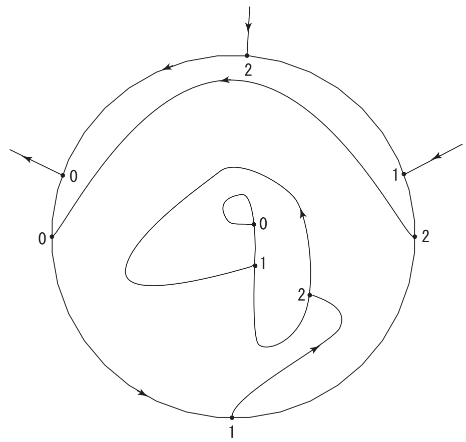


図 2.2: $\Delta(\mathcal{E}_2(1,1))$ （E-cycle の片側）

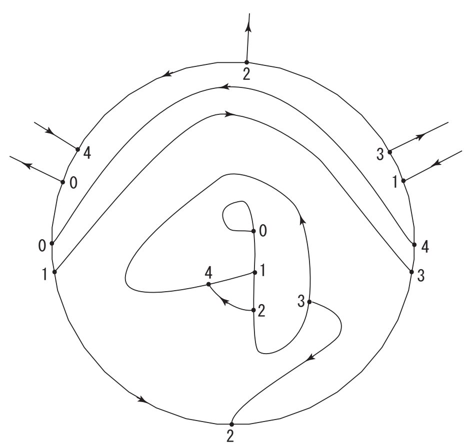


図 2.3: $\Delta(\mathcal{E}_3(1,1))$ （E-cycle の片側）

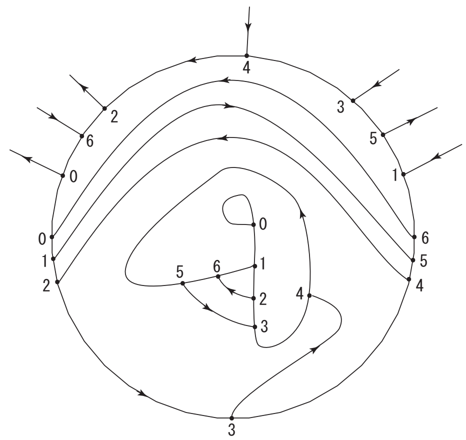


図 2.4: $\Delta(\mathcal{E}_4(1,1))$ （E-cycle の片側）

さらに、図 2.4 に示したものが DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_4(1,1))$ である。この１辺形は 4-halftwists knot (6_1-knot) を表し、３辺形は 2-halftwists knot (4_1-knot) を表す。他の面は trivial knot である。

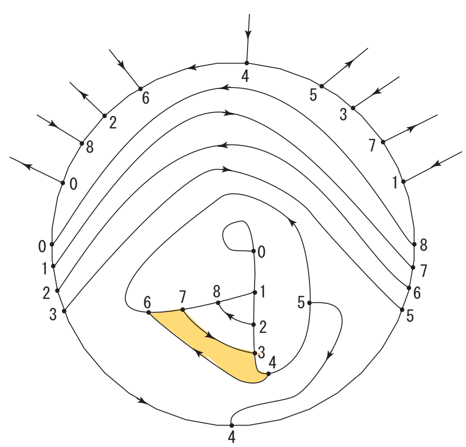


図 2.5: $\Delta(\mathcal{E}_5(1,1))$ （E-cycle の片側）

図 2.5 が DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_5(1,1))$ であるが、この DS-diagram（の E-cycle の片側）には E-cycle に接しない４辺形が２個あり、そのうち色付けられた４辺形と同一視される E-cycle の反対側の面も E-cycle とは接しない。このような４辺形を I-型 という

ことにする。一方、色付けられていない４辺形は同一視される面が E-cycle と接する。これを Ⅱ-型 と呼ぶ。４辺形のうち E-cycle の同一視される双方の面がともに E-cycle に接するもの（Ⅲ-型）もある。DS-knot として non-trivial knot を表すのは１辺形、３辺形 と I-型４辺形であり、１辺形は 5-halftwists knot (7_2-knot)、３辺形は 3-halftwists knot (5_2-knot)、そして I-型４辺形は 1-halftwist knot (3_1-knot) である。

以下同様に、DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_n(1,1))$ に含まれる non-trivial DS-knots はすべて twist knot であることが示される。それらの twist knots は、$n = 2r$ のときは $2k$-halftwists knots $(k = 1, 2, \ldots, r)$ であり、$n = 2r - 1$ のときは $(2k - 1)$-halftwists knot $(k = 1, 2, \ldots r + 1)$ である。

2.2 アワビから１回の R_{*2}^{-1} で得られる (b)-type の $(1,1)$-結び目

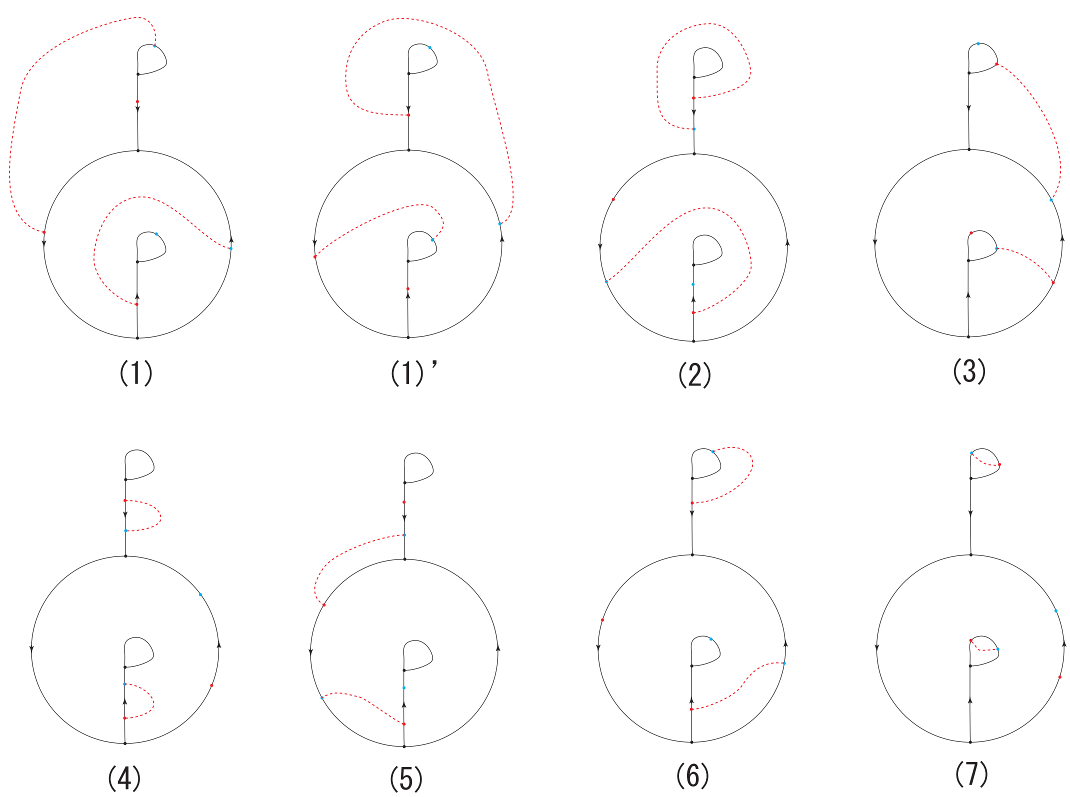


図 2.6: piping lines for the abalone

アワビと名付けられた DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_1(1,1))$ に対し、move R_{*2}^{-1} を与える piping line は 図 2.6 に示した (1)〜(7) の７種類ある。(1) と (1)' は一見異なるようだが、E-cycle の内外を入れ替えれば同じものなので、これらは同一のものと考える。(2) と (6) に対しても E-cycle の内外を入れ替えたものがある。

７種類の piping のいずれも２辺形を生じるが、その２辺形が non-trivial knot を表すのは (1) と (3) のみである。

(1) の line に沿って piping を行った結果が 図 2.7 であり、調べてみれば２辺形が表す DS-knot は torus knot $T(5,2)$ (5_1-knot) であることがわかる。

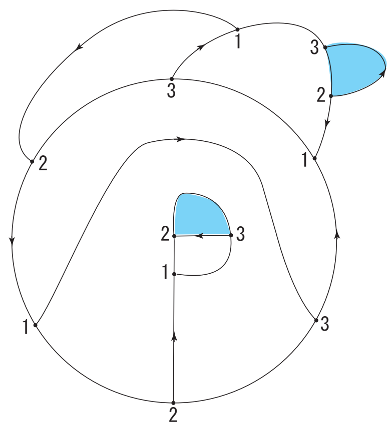


図 2.7: piping along the line (1) which yields the torus knot $T(5,2)$

line (3) に沿って piping を行った結果は 図 2.8 であり、この２辺形が表す DS-knot が torus knot $T(4,3)$ (8_{19}-knot) であることを示すことができる。。

他の line (2) および (4), (6), (7) に沿った piping で生じる２辺形はの表す DS-knot はいずれも trivial knot であるが、これらにさらに R_{*2}^{-1} を施すことによって様々な non-trivial $(1,1)$-knot を得ることが出来る。ここでは、後の議論に登場する line (4) に沿った piping を図 2.9 に紹介しておく。

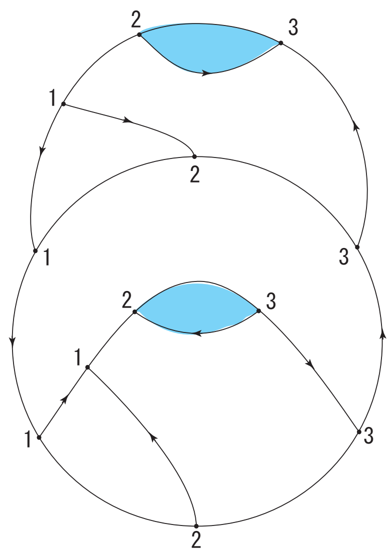


図 2.8: piping along the line (3) which yields the torus knot $T(4,3)$

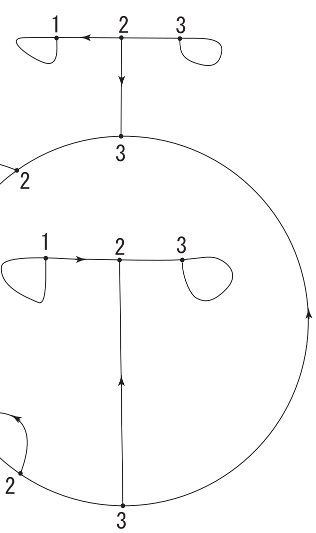


図 2.9: piping along the line (4) which gives no non-trivial knots

2.3 torus knot $T(2n+3,2)$ を与える系列

図 2.7 で得られる $T(5,2)$ を与える DS-diagram に図 2.10 左図に示した line に沿って piping すると右図の DS-diagram となる。

さらに右図の piping line で piping と次々と n 回の同様の piping を施すことによって E-data $\mathcal{E}_{T(2n+3,2)} = (\mathcal{A}, \phi)$

$$
\begin{aligned}
&\text{vertices} : x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \\
&\phi(x_i) = \ell \ (i = 0, 1, \ldots n)\,,\ \phi(y_j) = r \ (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \\
&\mathcal{A} = W^+ W^-\,, \\
&W^+ = (x_0^+ x_1^+ \ldots x_n^+)(y_1^+ y_2^+ \ldots y_n^+)\,, \\
&W^- = x_0^-(y_n^- x_1^-) \ldots (y_{n-i}^- x_i^-) \ldots (y_1^- x_n^-)
\end{aligned}
$$

を持つ DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_{T(2n+3,2)})$（図 2.11）が得られ、この DS-diagram の 2 辺形が表す DS-knot は torus knot $T(2n+3,2)$ である。

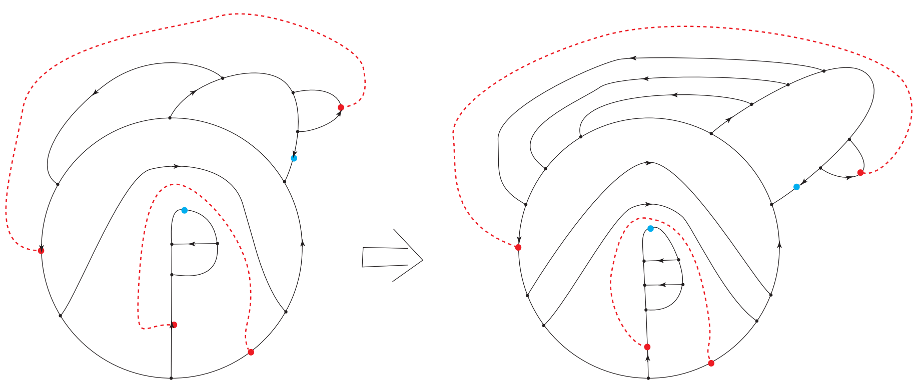


図 2.10: 図 2.7 からの更なる piping

2.4 torus knot $T(n+3,n+2)$ を与える系列, I

図 2.8 で得られる $T(4,3)$ を与える DS-diagram に図 2.12 左図に示した line に沿って piping すると右図の DS-diagram となる。

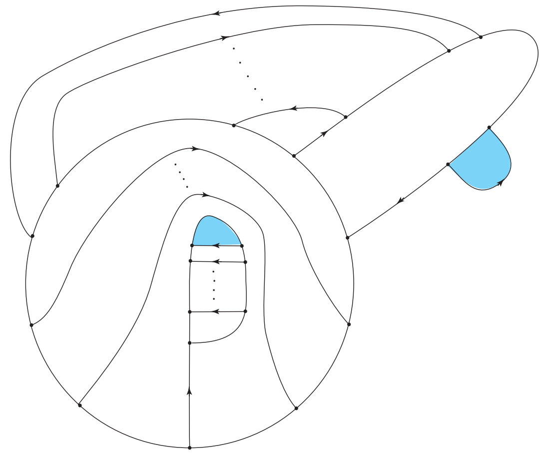


図 2.11: $\Delta(\mathcal{E}_{T(2n+3,2)})$

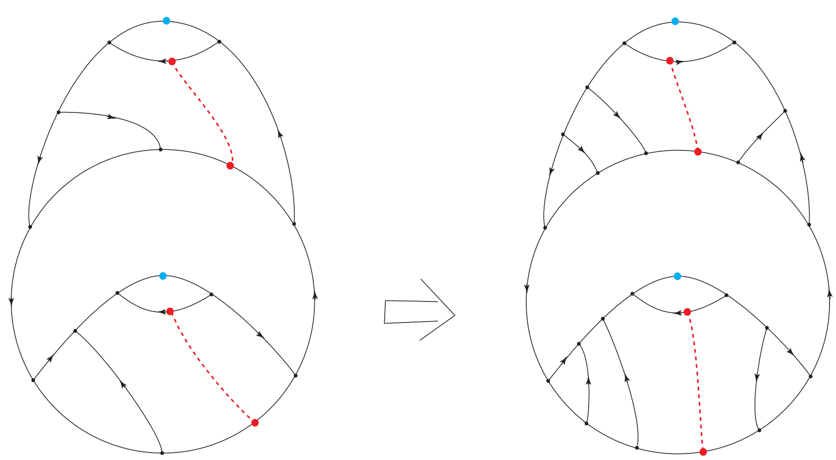


図 2.12: 図 2.8 からの更なる piping

　さらに右図の piping line で piping と次々と n 回の同様の piping を施すことによって E-data $\mathcal{E}^{(1)}_{T(n+3,n+2)} = (\mathcal{A}, \phi)$

$$
\begin{aligned}
&\text{vertices}: x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \\
&\phi(x_i) = \ell \ (i = 0, 1, \ldots n)\,,\ \phi(y_j) = r \ (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \\
&\mathcal{A} = W^+W^-\,, \\
&W^+ = (x_0^+ x_1^+ \ldots x_n^+)(y_1^+ y_2^+ \ldots y_n^+)\,, \\
&W^- = (y_n^- y_{n-1}^- \ldots y_2^- y_1^-)(x_n^- x_{n-1}^- \ldots x_1^- x_0^-)
\end{aligned}
$$

を持つ DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}^{(1)}_{T(n+3,n+2)})$（図 2.13）が得られ、この DS-diagram の２辺形が表す DS-knot は torus knot $T(n+3, n+2)$ である。

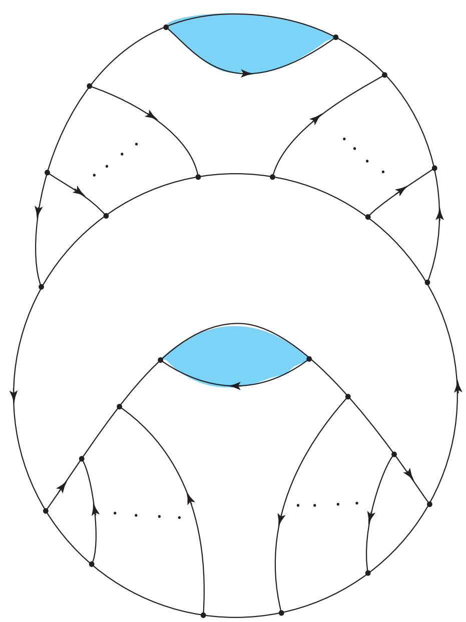


図 2.13: $\Delta(\mathcal{E}^{(1)}_{T(n+3,n+2)})$

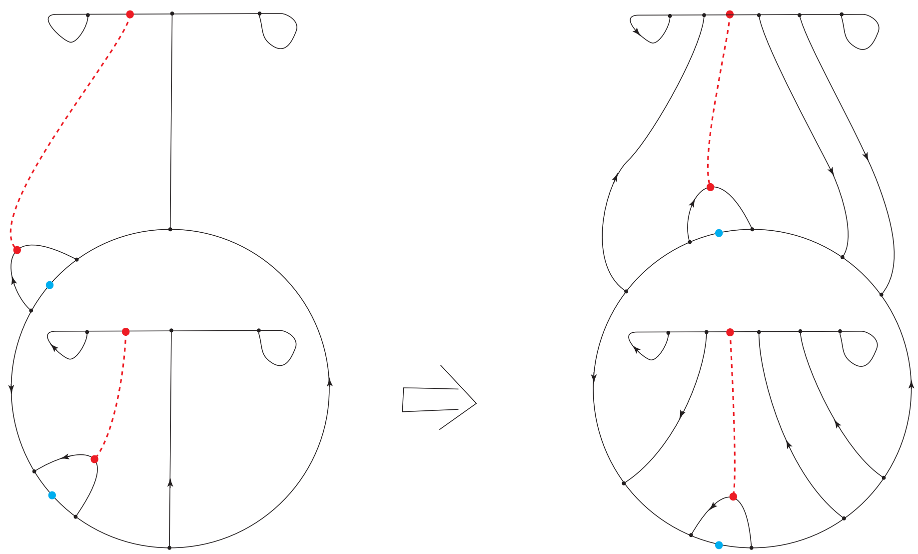


図 2.14: 図 2.9 からの更なる piping

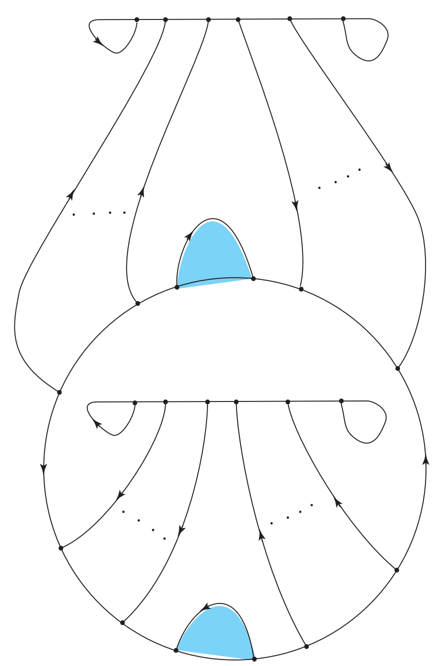


図 2.15: $\Delta(\mathcal{E}^{(2)}_{T(m+1,m)})$

2.5　torus knot $T(m+1, m)$ を与える系列, II

図 2.9 の piping では non-trivial knot は得られないが、図 2.14 のようにこの piping と同様の piping を m 回続けることによって E-data $\mathcal{E}^{(2)}_{T(m+1,m)} = (\mathcal{A}, \phi)$

$$
\begin{aligned}
&\text{vertices : } u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_m,\, v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_m \\
&\phi(u_i) = r\ (i = 1, 2, \ldots m)\,,\ \phi(v_j) = r\ (j = 0, 1, \ldots, m)\,, \\
&\mathcal{A} = W^+W^-\,, \\
&W^+ = (u_1^+u_2^+ \ldots u_m^+)(v_0^+v_1^+ \ldots v_m^+)\,, \\
&W^- = (v_m^-v_{m-1}^- \ldots v_1^-v_0^-)(u_m^-u_{m-1}^- \ldots u_1^-)
\end{aligned}
$$

を持つ DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}^{(2)}_{T(m+1,m)})$ （図 2.15）が得られ、この DS-diagram の 2 辺形が表す DS-knot は torus knot $T(m+1, m)$ である（$m = 1$ のときは trivial knot $(T(2, 1))$、$m = 2$ のときは 3_1-knot $(T(3, 2))$ ）。

注意 *1.* $m = n + 2$ として、$\Delta(\mathcal{E}^{(1)}_{T(n+3,n+2)})$ および $\Delta(\mathcal{E}^{(2)}_{T(m+1,m)})$ それぞれから $T(m+1, m)$ の 2 重分岐被覆を [8] の方法で作ることによって、[9] において山下氏によって示された定理（の一部）の別証明が得られる。

2.6　pretzel knot $p(-2, 3, 2n+3)$ を与える系列

[7] に示したように 図 2.16 に示した DS-diagram は pretzel knot $p(-2, 3, 7)$ を表す。この diagram は $T(7, 2)$ を表す $\Delta(\mathcal{E}_{T(7,2)})$ （§ 2.3 参照）から図 2.17 に示した piping line に沿って piping して得られる。

そこで、一般の $\Delta(\mathcal{E}_{T(2n+3,2)})$ に対して同様の piping line （図 2.18）を考えてみよう。その piping の結果は、次の E-data $\mathcal{E}_{p(2n+3)} = (\mathcal{A}, \phi)$

$$
\begin{aligned}
&\text{vertices : } s,\, x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, t,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \\
&\phi(s) = \phi(x_i) = \ell\ (i = 0, 1, \ldots n)\,,\ \phi(t) = \phi(y_j) = r\ (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \\
&\mathcal{A} = W^+W^-\,, \\
&W^+ = (x_0^+x_1^+ \ldots x_n^+)(s^+t^+)(y_1^+y_2^+ \ldots y_n^+)\,, \\
&W^- = (t^-s^-x_0^-)(y_n^-x_1^-) \ldots (y_{n-i}^-x_i^-) \ldots (y_1^-x_n^-)
\end{aligned}
$$

を持つ DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_{p(2n+3)})$ となる（図 2.19）。

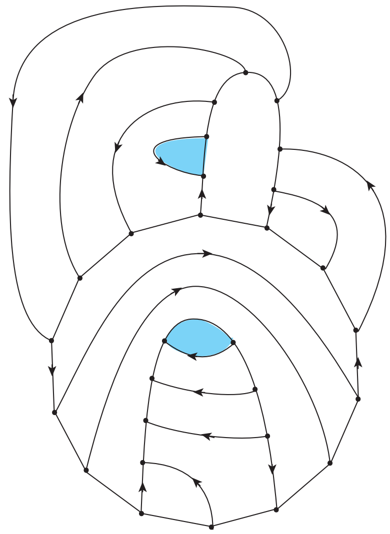


図 2.16: pretzel knot $p(-2,3,7)$

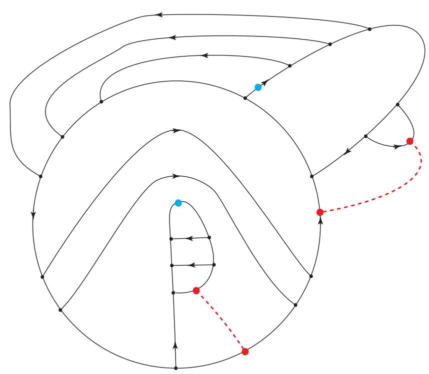


図 2.17: $\Delta(\mathcal{E}_{T(7,2)})$ から 図 2.16 を生成する piping line

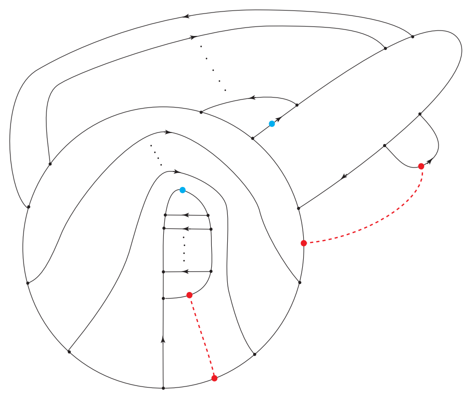


図 2.18: $\Delta(\mathcal{E}_{T(2n+3,2)})$ に対する piping line

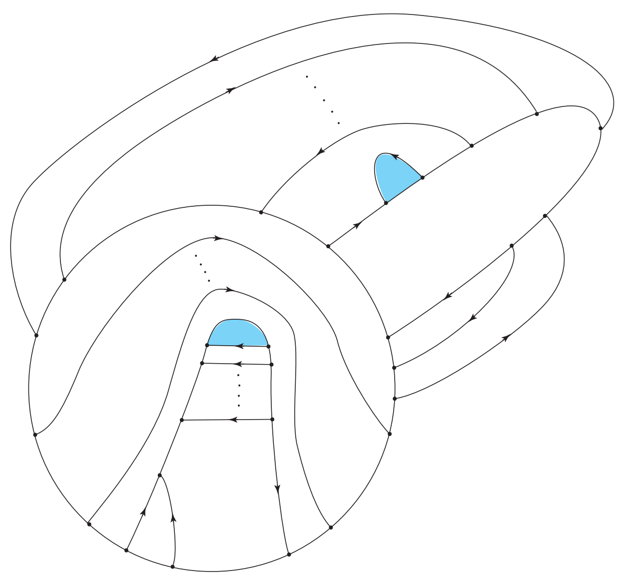


図 2.19: $\Delta(\mathcal{E}_{p(2n+3)})$

一般の n に対してこの DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_{p(2n+3)})$ の２辺形が表す結び目を $K_{p(2n+3)}$ とすると、$K_{p(2n+3)}$ は如何なるものであろうか？小さい n では次のことが確かめられる。

(0) $n=0$ のときは $\Delta(\mathcal{E}_{T(3,2)})$ はアワビと解釈され、$\Delta(\mathcal{E}_{p(3)}) = \Delta(\mathcal{E}^{(1)}_{T(4,3)})$ 、すなわち $K_{p(0)} = T(4,3)$ となる。$T(4,3)$ は 8_{19}-knot であり、pretzel knot $p(-2,3,3)$ でもあることが知られている。

(1) $n=1$ のとき、$\Delta(\mathcal{E}_{p(5)})$ を [7] に紹介した方法で実際に調べてみると、$K_{p(5)}$ は torus knot $T(5,3)$ であることが確かめられる。$T(5,3)$ は 10_{124}-knot であり、pretzel knot $p(-2,3,5)$ でもあることが知られている。

(2) $n=2$ のときは、上に述べたように $K_{p(7)} = p(-2,3,7)$ である。

以上をまとめて

命題 2.1. $n=0,1,2$ のとき $K_{p(2n+3)} = p(-2,3,2n+3)$ である。

このことから次が予想される。

予想 1. $K_{p(2n+3)} = p(-2,3,2n+3)$ であろう。

この予想の傍証として、次のことを示すことはできる。

命題 2.2. $K_{p(2n+3)}$ は fibered knot で genus は $n+3$ である。

図 2.20 に $K_{p(9)}$ の補空間の T-DS-diagram を示しておく。この diagram から $K_{p(9)}$ の補空間は５個の理想四面体を等長的に貼り合わせて構成される hyperbolic cusped manifold であることが示される。SnapPea さんに頼めば（私には頼むことはできませんが）これが $p(-2,3,9)$ の補空間に一致するか否かが判定できるのだろう。

注意 *2.* 中村拓司氏（大阪電通大）によると、[11] の $k5_{11}$ が $p(-2,3,9)$ とのことです。$K_{p(9)}$ の複雑度が $p(-2,3,9)$ の複雑度と一致するので、これも上の予想の傍証の一つと言える。

注意 *3.* まったくの余談ですが、”SnapPea” の綴りを調べるために検索したところ、最近は Android 携帯用のアプリの名前としての方が流通しているようです。

因みに、snap pea はいわゆる「スナップエンドウ」のことらしいです。

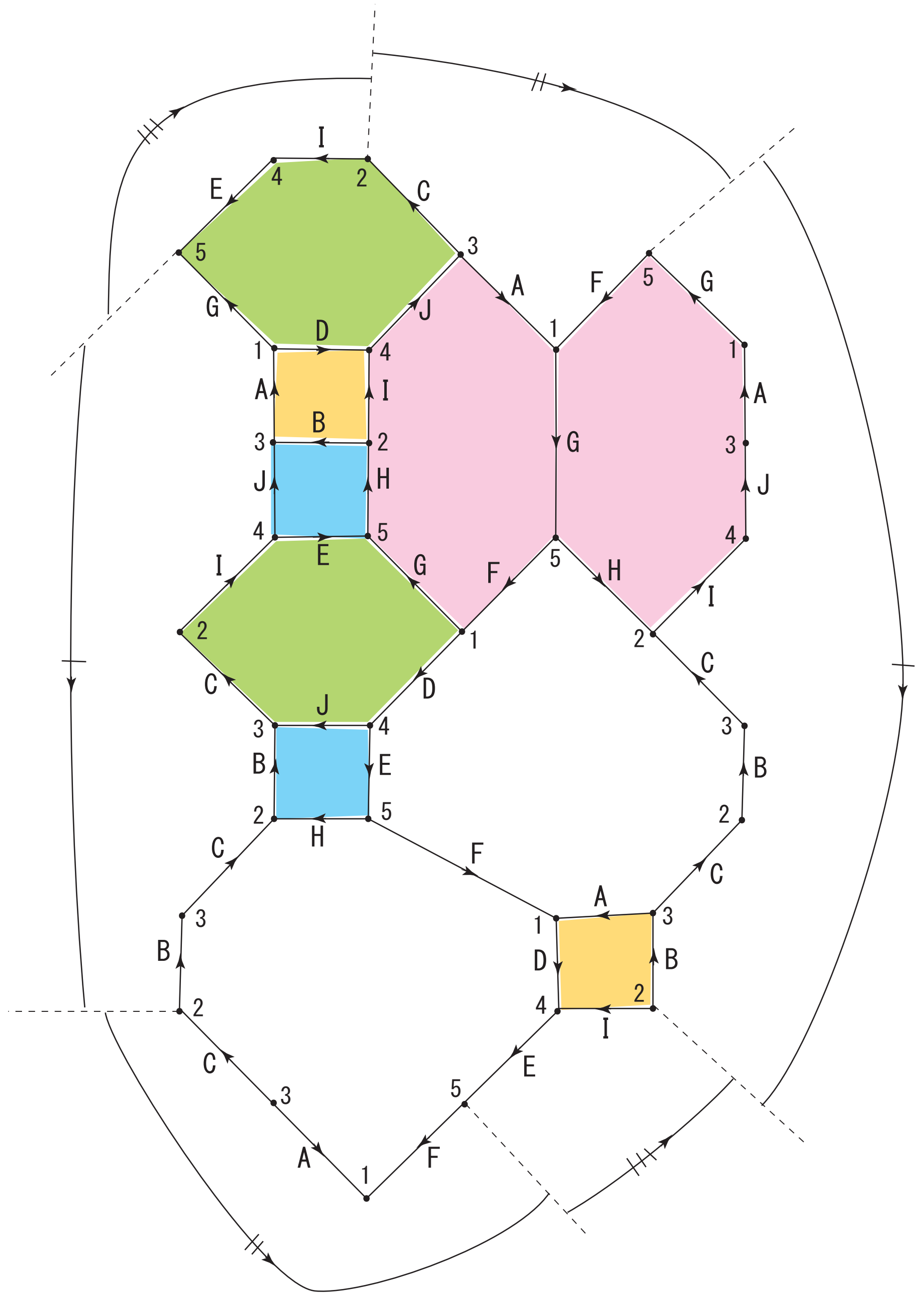


図 2.20: T-DS-diagram for $S^3 - K_{p(9)}$

3 $p(-2,3,7)$ 周辺の hyperbolic knots

3.1 hyperbolic knot の複雑度

その補空間を構成するのに必要な理想四面体の最小個数を hyperbolic knot の複雑度という。S^3 内の hyperbolic knot で複雑度最小であるのは 4_1-knot で、その複雑度は 2 ある。[11] には、S^3 内の複雑度 n $(n = 2,3,4,5,6)$ の hyperbolic knots が kn_i として示されている。$k2_1$ が 4_1-knot で複雑度 2 のものはこれ１つである。複雑度 3 の knot は２つあり、$k3_1$ が $p(-2,3,7)$、$k3_2$ が 5_2-knot である。

[11] によると、複雑度 4 の knot は４個存在し、$k4_1$ と $k4_2$ は twist knot （$k4_1$ は 6_1-knot、$k4_2$ は 7_2-knot）である。そこで、$k4_3$ と $k4_4$ を DS-knot として確定してみようというのがこの節の第一の目標である。$k4_3$ については [3] でかなり研究されているようである（私自身はあまり理解出来ていないが)。

3.2 $p(-2,3,7)$ の２つの $(1,1)$-表示

[7] に示したように、$p(-2,3,7)$ は２つの異なる $(1,1)$-表示を持つ。一つは § 2.6 の図 2.16 であり、もう一つは 図 3.1 である。

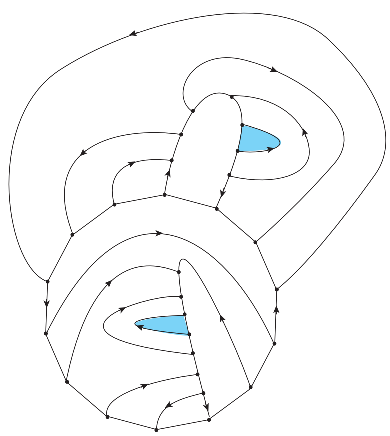


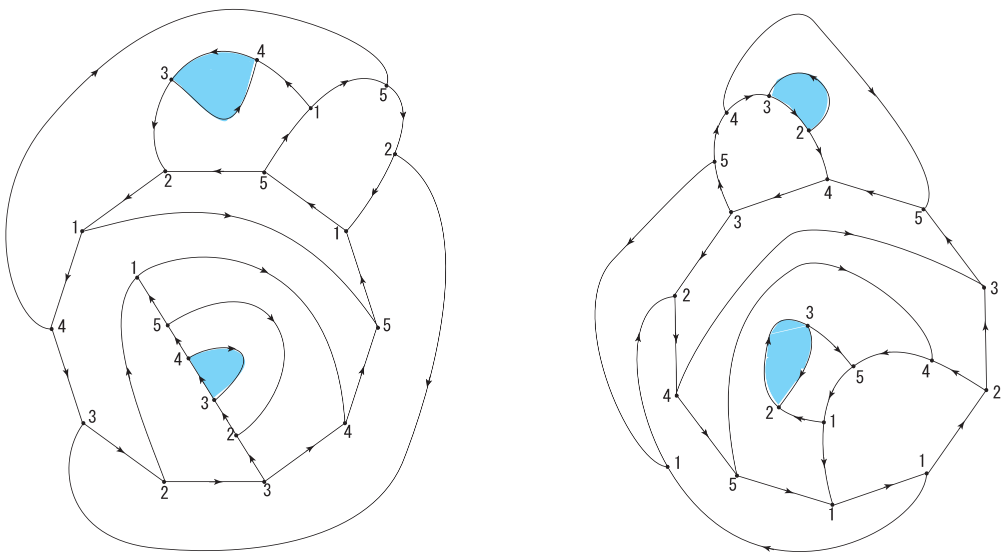
図 3.1: another $(1,1)$-representation for the pretzel knot $p(-2,3,7)$

注意 *4.* 図 3.1 は [7] のものの鏡像になっている。これは、アワビ（図 2.1）からの piping

で得られるようにするためである。[7] のものは、アワビの鏡像からの piping で得られる。

図 2.16 で表される DS-knot を $K_{p(7)}$ と表示したので、図 3.1 で表される DS-knot を $K^*_{p(7)}$ と表示することにする。もちろん、$K_{p(7)}$ も $K^*_{p(7)}$ も共に $p(-2,3,7)$ である。

複雑度を議論するためには、$(1,1)$-表示よりもむしろ簡約化された DS-diagram を用いる方が都合がよいので、図 3.2 に簡約化された diagram を用意しておく。簡約化された diagram とは、knot を保持しつつ頂点数を減らした diagram のことである。簡約化によって block number は増加するので、$(1,1)$-表示と直接には結びつかなくなる。



$K_{p(7)}$ の簡約化　　　　$K^*_{p(7)}$ の簡約化

図 3.2: reduced DS-diagrams for $K_{p(7)}$ and $K^*_{p(7)}$

3.3　coil による Dehn surgery

山下氏によって、"coil に沿う Dehn surgery" なるものが研究されている ([10])。一般に、DS-diagram が表す spine のある面の閉包が Möbius band であるとき、その Möbius band の中心線が表す knot を **coil** という。DS-diagram $\Delta = (S^2, f, G)$ 上では、coil は

対隣接面 (X^+, X^-) 内の互いに同一視される arc の対 (c^+, c^-) の像 $c = f(c^+) = f(c^-)$ として定められる（詳しくは [10] 参照)。

DS-diagram Δ とその一つの DS-knot $k(Y)$ が与えられ（Y は Δ の一つの面)、Δ が coil $c(X)$ (X は $c \subset X$ となる Δ の面）を持つとする。このとき、$Y \neq X$ ならば $\ell = k(Y) \cup c(X)$ は Δ が表す多様体 $M(\Delta)$ 内の link として確定している。特に $M(\Delta) = S^3$ で $c(X)$ が trivial knot のときは、$c(X)$ での $(1/n)$-surgery によって $k(Y)$ に $c(X)$ のまわりでの n-fulltwists を加えた knot の DS 表示を得ることができる。

block number 1 の DS-diagram Δ は常に 2 個の coil を持つ。この coil は Δ が定める genus 1 H-分解 (V_1, V_2) のそれぞれの solid torus V_1, V_2 の core として現れる。したがって、$M(\Delta) = S^3$ のときは Δ の coil は trivial knot である。図 3.2 の $K_{p(7)}, K^*_{p(7)}$ の簡約化においても、元の block number 1 のときの coil が残っている。その coil 達を 図 3.3 に示す。次分節において、これらの coil での Dehn surgery を調べることによって、複雑度 4 の hyperbolic knot を探す。

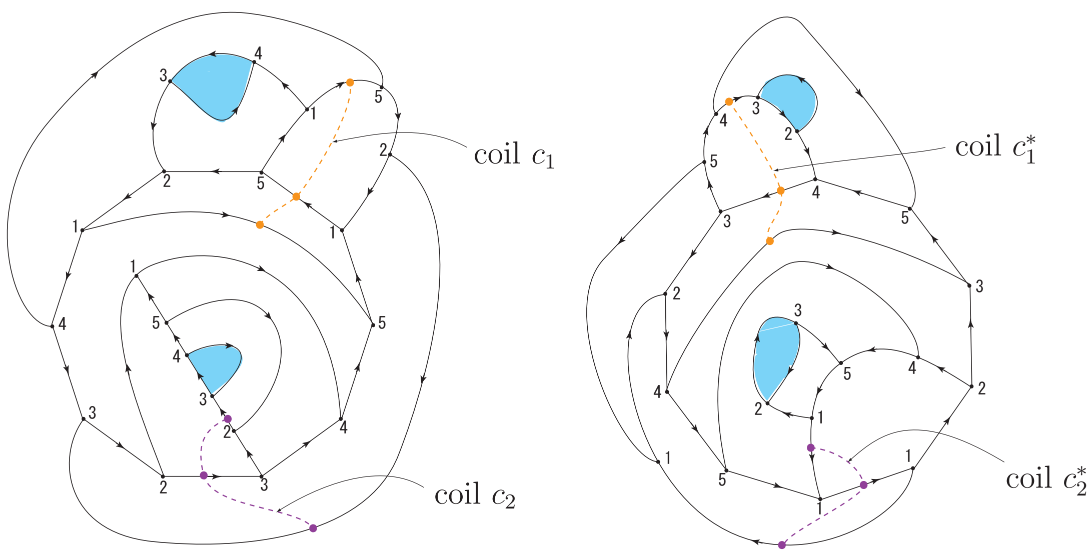


図 3.3: coils for $K_{p(7)}$ and $K^*_{p(7)}$

$K_{p(7)} \cup c_j$ あるいは $K^*_{p(7)} \cup c^*_j$ の link diagram を得るためには、block number 1 の表示に戻って [7] に示した方法で knot diagram を求め、これに solid torus の core を付け加えればよい。

3.4 $K_{p(7)}$, $K^*_{p(7)}$ からの coil surgery

山下氏 [10] に従えば、surgery 係数によって指定されたカセットを選びそのカセットを coil 部分にはめ込めば、coil に沿って Dehn surgery した多様体の DS-diagram が得られる。ここでは $p(-2,3,7)$ よりも複雑度が 1 だけ大きい S^3 内の hyperbolic knot を構成することが目標であるので、山下氏の結果を次のような手順 (1),(2) で少し安直に利用させていただいた。

(1) 山下氏（[10]）によって用意されたカセットのうち、DS-diagram の頂点数を 1 だけ上げるものを選ぶ。
(2) 選んだカセットを挿入して得られる多様体が S^3 であれば採用、そうでなければ不採用。

このような方法で 3 個の複雑度 4 の S^3 内の hyperbolic knot が見つかった。まず、図 3.4 が $K^*_{p(7)}$ を coil c^*_1 で Dehn surgery して得られるものである。この knot を仮に $k4_a$ と名付ける。$K^*_{p(7)}$ に対する coil c^*_2 には、採用されるカセットは存在しない。

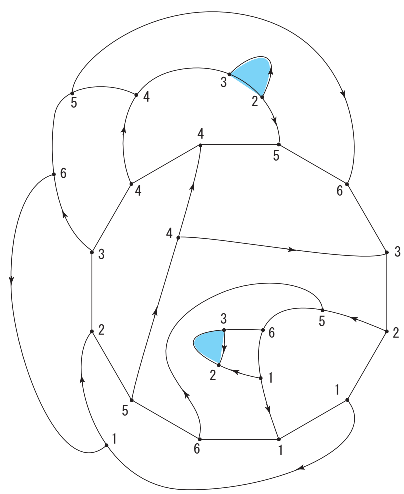


図 3.4: DS-diagram for $k4_a \subset S^3$

次に、図 3.5 に示すのが $K_{p(7)}$ を coil c_1 に沿って Dehn surgery したものであり、図 3.6 が $K_{p(7)}$ を coil c_2 に沿って Dehn surgery したものである。これらそれぞれに仮の名 $k4_b$ および $k4_c$ を与える。

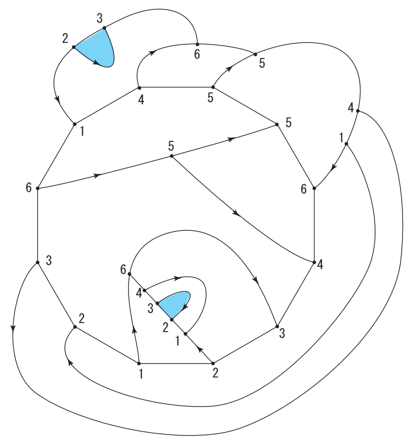


図 3.5: DS-diagram for $k4_b \subset S^3$

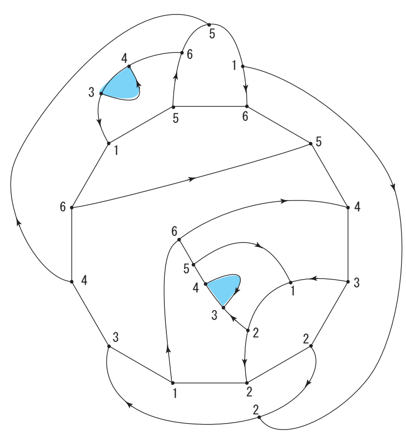


図 3.6: DS-diagram for $k4_c \subset S^3$

上の３個の knot $k4_a$, $k4_b$, $k4_c$ の diagram はいづれも”block change moves”（[2] 参照）によって block number 1 の diagram に変形することができる。したがって、これらの knot はすべて $(1,1)$-knot である。また、$k4_a$, $k4_b$ の $(1,1)$-表示はアワビから５回の R_{*2}^{-1} 適用で得られ、$k4_c$ の $(1,1)$-表示はアワビから６回の R_{*2}^{-1} 適用で得られることを示すことができる。

３個の knot $k4_a$, $k4_b$, $k4_c$ はいづれも fibered knot であり、かつ hyperbolic knot であることを確かめることができる。したがって、（[11] を信じれば）これらは $k4_3$ または $k4_4$ のどちらかであり、３個のうち少なくとも２個は同じ knot である。次分節以降でこの辺りを調べる。

3.5 $k4_a$, $k4_b$, $k4_c$ の性質

一般に DS-knot が与えられれると、その knot の補空間の T-DS-diagram が構成される。そして、そこから読み取れる ”gluing equations” と ”holonomy conditions” によって導かれる代数方程式が上半平面に解を持つことが、その補空間が hyperbolic cusped manifold であることの条件となる（[6], [7] 参照）。このような方法で $k4_a$, $k4_b$, $k4_c$ がすべて複雑度 4 の hyperbolic knot であることが確認できる。

以下では、$k4_a$, $k4_b$, $k4_c$ それぞれについて DS-diagram, T-DS-diagram を用いて明らかになった性質を述べる。

3.5.1 $k4_a$

$k4_a$ の DS-knot 表示 図 3.4 から構成される $k4_a$ の補空間の T-DS-diagram $T\Delta_a$ が図 3.7 である（T-DS-diagram の構成法については [6] を参照）。

この $T\Delta_a$ に対して非自明 Dehn filling でレンズ空間を与える slope を探してみよう。”cyclic surgery theorem” によれば、レンズ空間を与える slope が存在するとすれば、それは $k4_a$ の meridian と１点で交わる。しかも、その slope の双曲的長さはあまり長くはない。このような観点で探してみると、図 3.8 に示した slope ν が見つかる。実際、ν で Dehn filling した多様体 $M(T\Delta_a,\nu)$ の DS-diagram を作り、多様体を不変にする変形を施すと、$\Delta(\mathcal{E}_1(27,10))$ （[8] 参照）まで変形でき、$M(T\Delta_a,\nu)$ はレンズ空間 $L(27,10)$ であると分かる。しかも、この変形は knot $k4_a^\nu$（Dehn filling に用いる

solid torus の core）を表す面を保持しながら実行可能で、その knot が $L(27,10)$ 内の $(1,1)$-knot $K_1(27,10;25)$（[8] 参照）であることも分かる。

命題 3.1. $L(27,10) - K_1(27,10;25) \cong S^3 - k4_a$

3.5.2 $k4_b$

$k4_a$ の場合と同様の考察を $k4_b$ に対しても行う。まず、T-DS-diagram $T\Delta_b$ が 図 3.9 のように得られ、レンズ空間を生成する slope λ が 図 3.10 で与えられることが分かる。また、$M(T\Delta_b,\lambda) = L(27,8)$ であることも検証される。ただし、$k4_a$ の場合と違うのは、$M(T\Delta_b,\lambda)$ の DS-diagram から $\Delta(\mathcal{E}_1(27,8))$ を得る変形の過程で knot を表す面が消滅してしまうことである。この標準形への変形は、次の 3 つのステップで実行される。

(1) E-cycle を付ける変形（元の DS-diagram は E-cycle を持つとは限らない）
(2) block change move によって block number 1 まで変形（これが不可能なこともあり得る）
(3) 標準形に変形（ステップ (2) が可能ならばこの変形は可能）

上に述べた「消滅」がステップ (3) で起こるならば、目的の knot が $(1,1)$-knot であることが分かるのだが、この場合の「消滅」はステップ (2) で起こってしまう。したがって、（私の変形方法では）$M(T\Delta_b,\lambda)$ の中で $k4_b^\lambda$ が $(1,1)$-knot であるか否かを特定することが出来ていない。また、

$$M(T\Delta_b,\lambda) = L(27,8) \cong L(27,10) = M(T\Delta_a,\nu)$$

であるから、$k4_b$ が $k4_a$ から（knot の同相の意味で）区別された訳でもない。実際、次節に述べるように [11] の table から $k4_a$ と $k4_b$ は互いに同相な knot であることが結論される。

注意 *5.* 上のステップ (1) の変形は一意的ではないので、このステップでの変形が原因で $(1,1)$-表示に至らない可能性も十分にあると思われる。

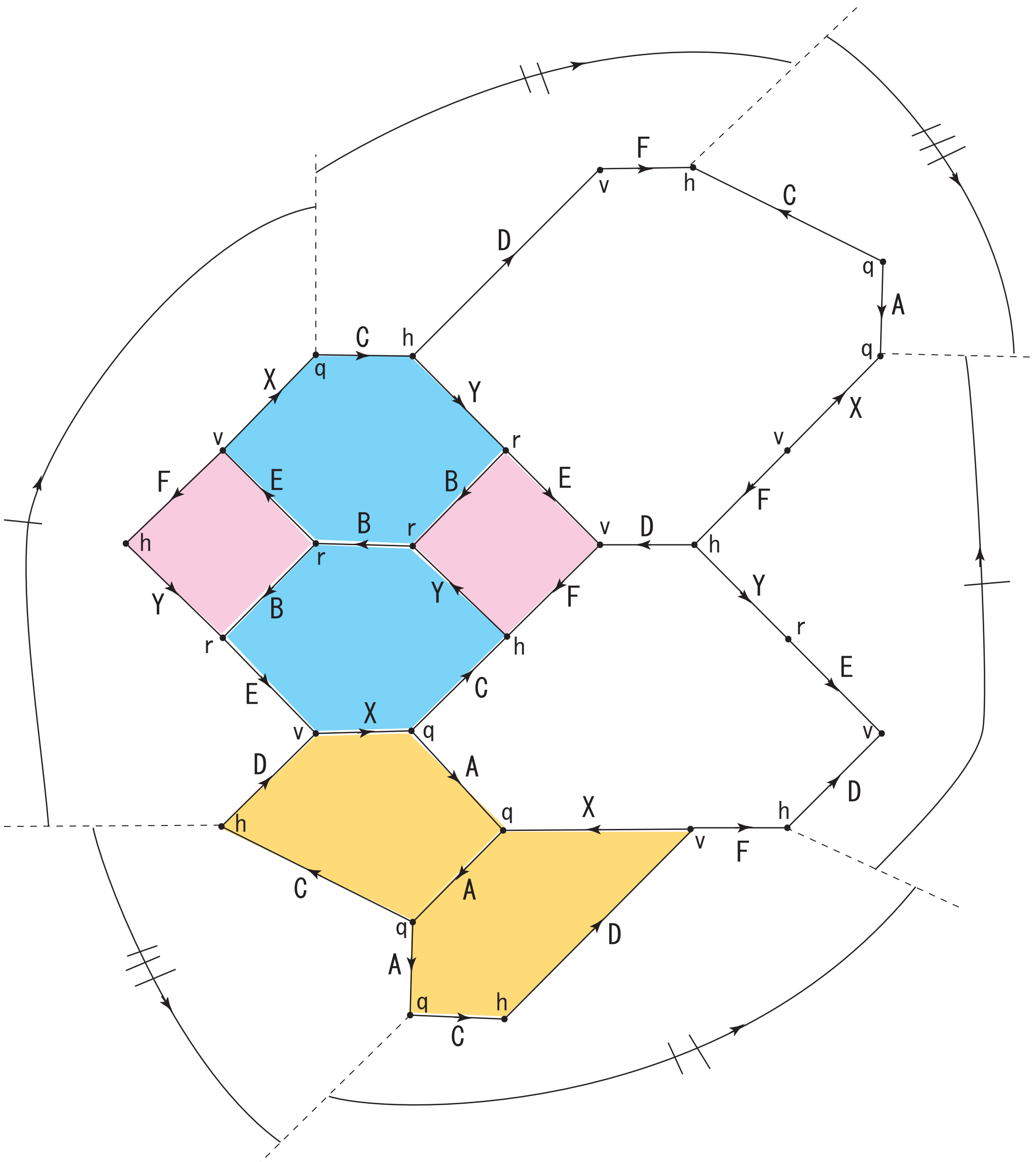


図 3.7: T-DS-diagram $T\Delta_a$ for $S^3 - k4_a$

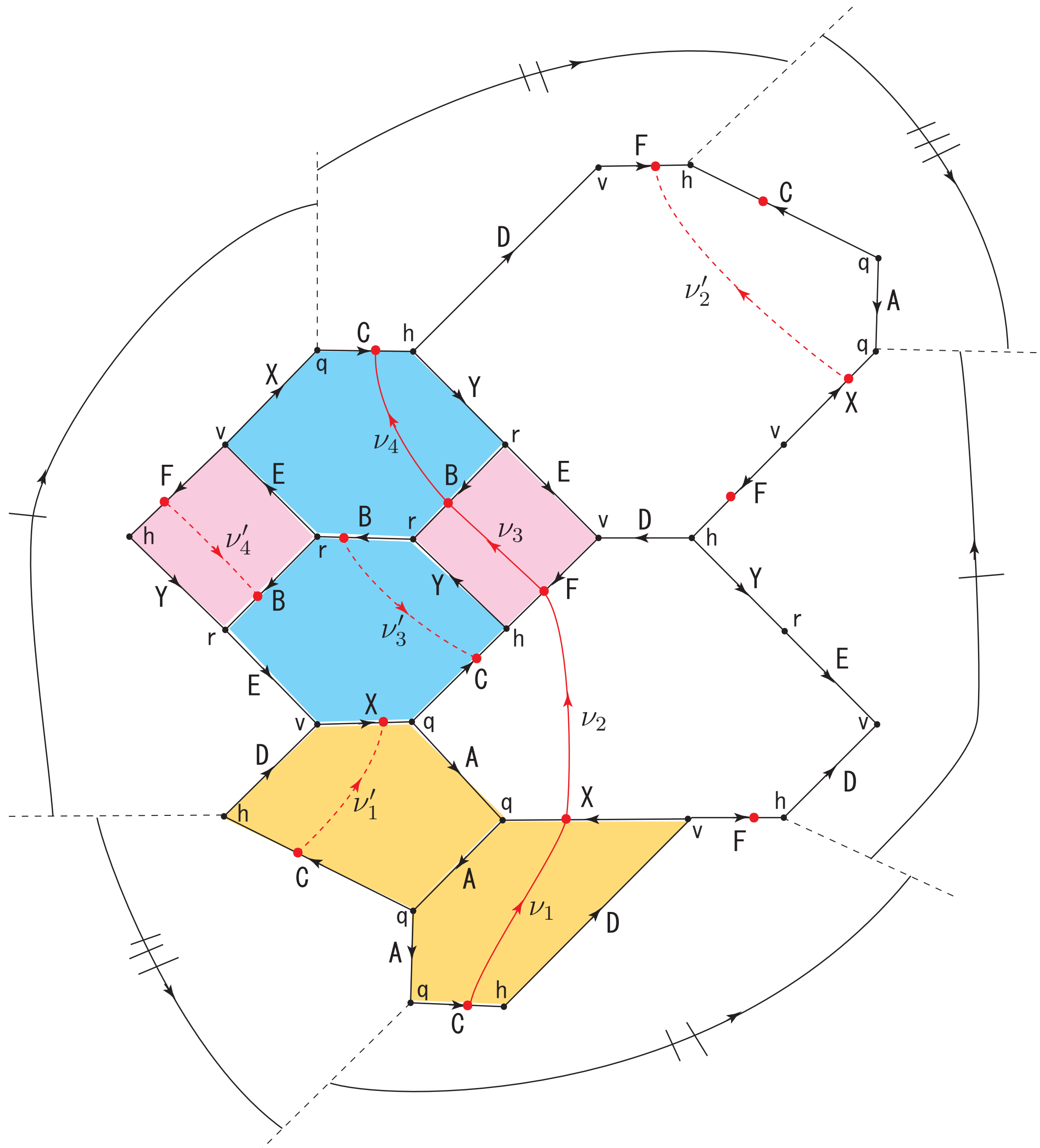


図 3.8: slope $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3 \cup \nu_4$ for $T\Delta_a$ which gives $K_1(27, 10; 25) \subset L(27, 10)$

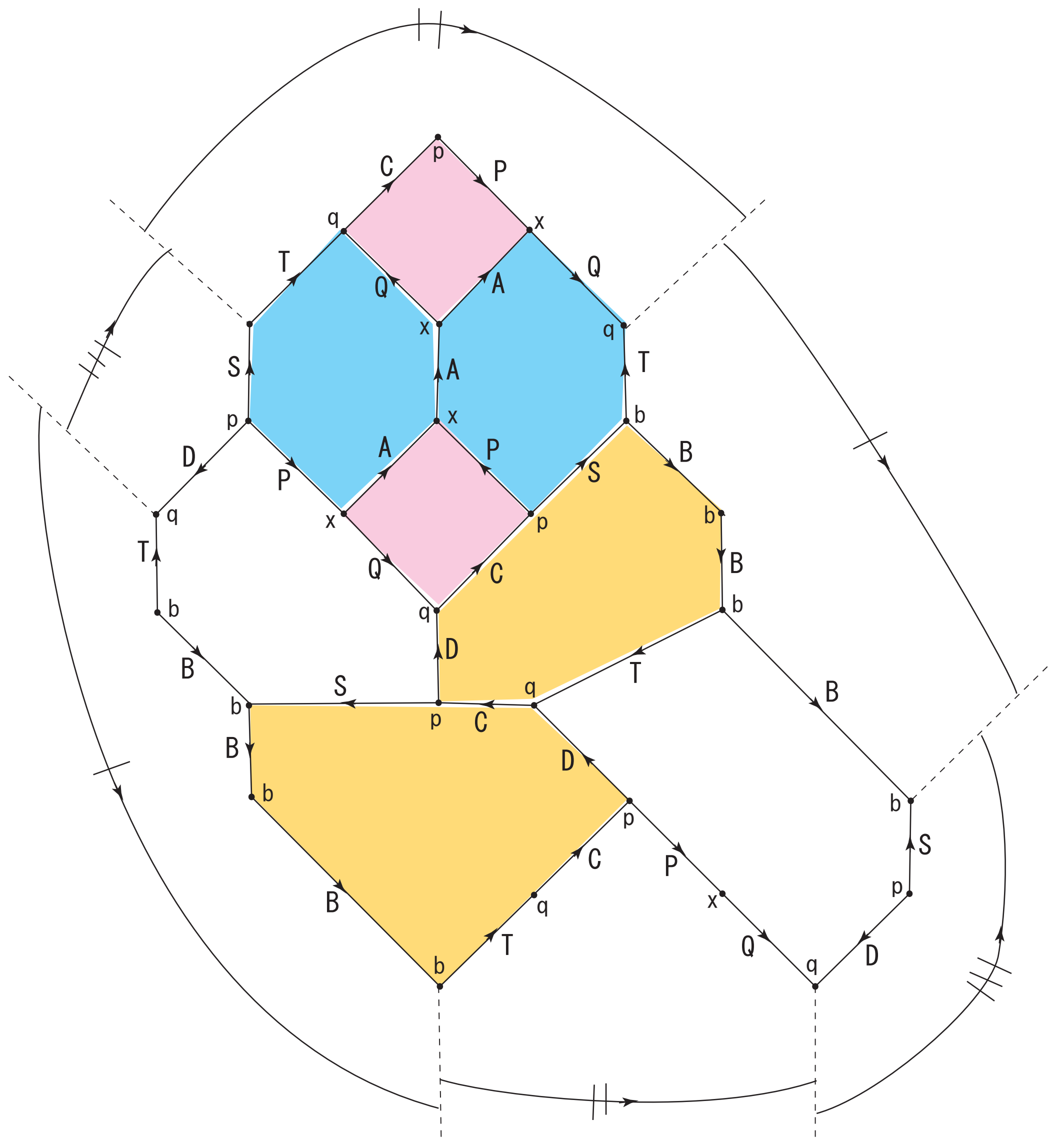


図 3.9: TDS-diagram $T\Delta_b$ for $S^3 - k4_b$

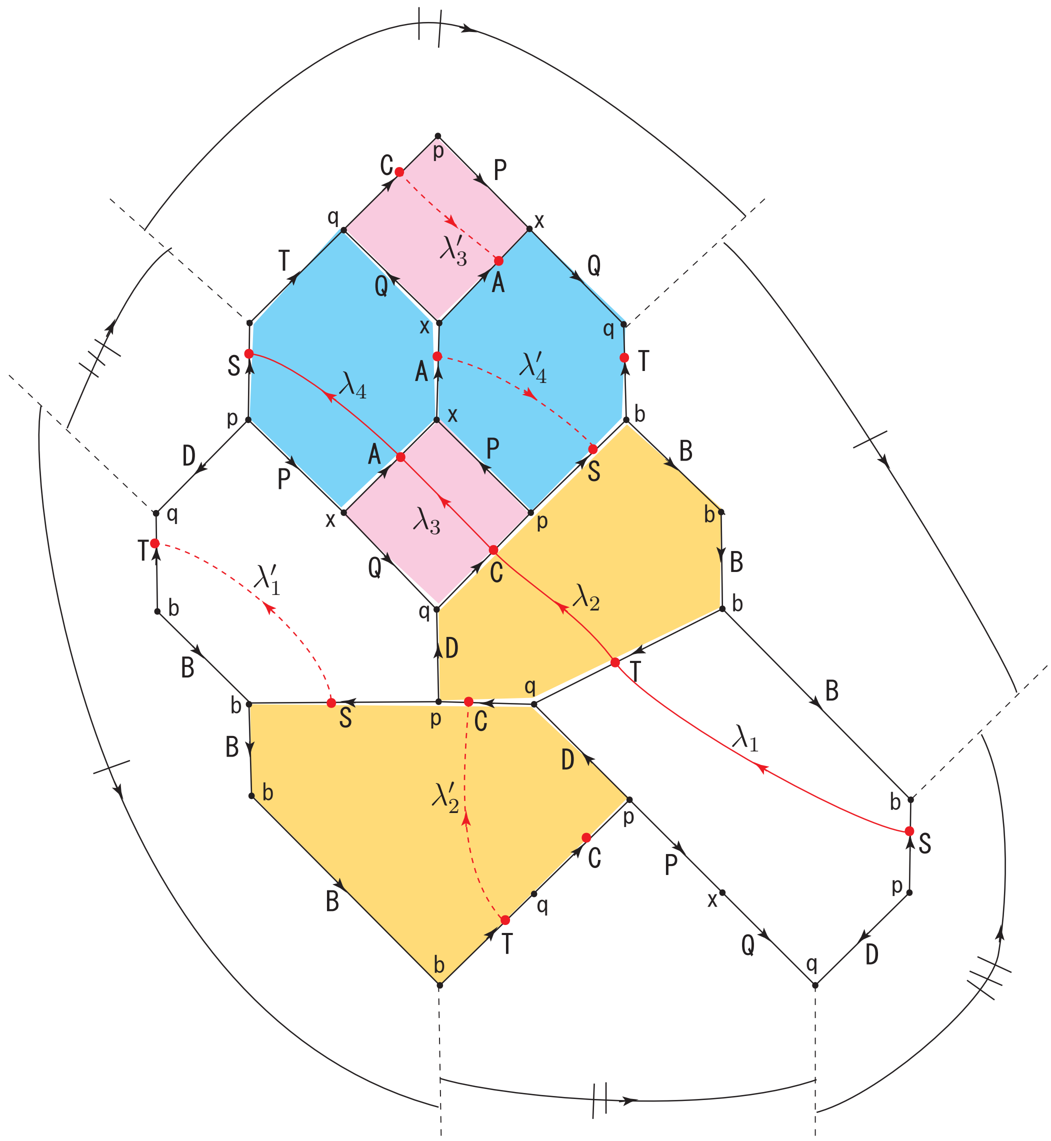


図 3.10: slope $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4$ for $T\Delta_b$ which gives $L(27, 8)$

3.5.3 $k4_c$

$k4_c$ に対しても、$k4_a$, $k4_b$ の場合と同様に、$S^3 - k4_c$ の T-DS-diagram $T\Delta_c$ が 図 3.11 のように得られる。この $T\Delta_c$ については、レンズ空間を与える slope が図 3.12 に示した λ と、図 3.13 に示した ν の 2 つ見つかる。$M(T\Delta_c, \lambda)$ および $M(T\Delta_c, \nu)$ については、E-cycle を付ける変形もまだ完了していないが、それらの基本群は $\pi_1(M(T\Delta_c, \lambda)) \cong \mathbb{Z}_{29}$ および $\pi_1(M(T\Delta_c, \nu)) \cong \mathbb{Z}_{30}$ と計算され、これらがレンズ空間であることが分かる（基本群の計算方法については [7] を参照)。

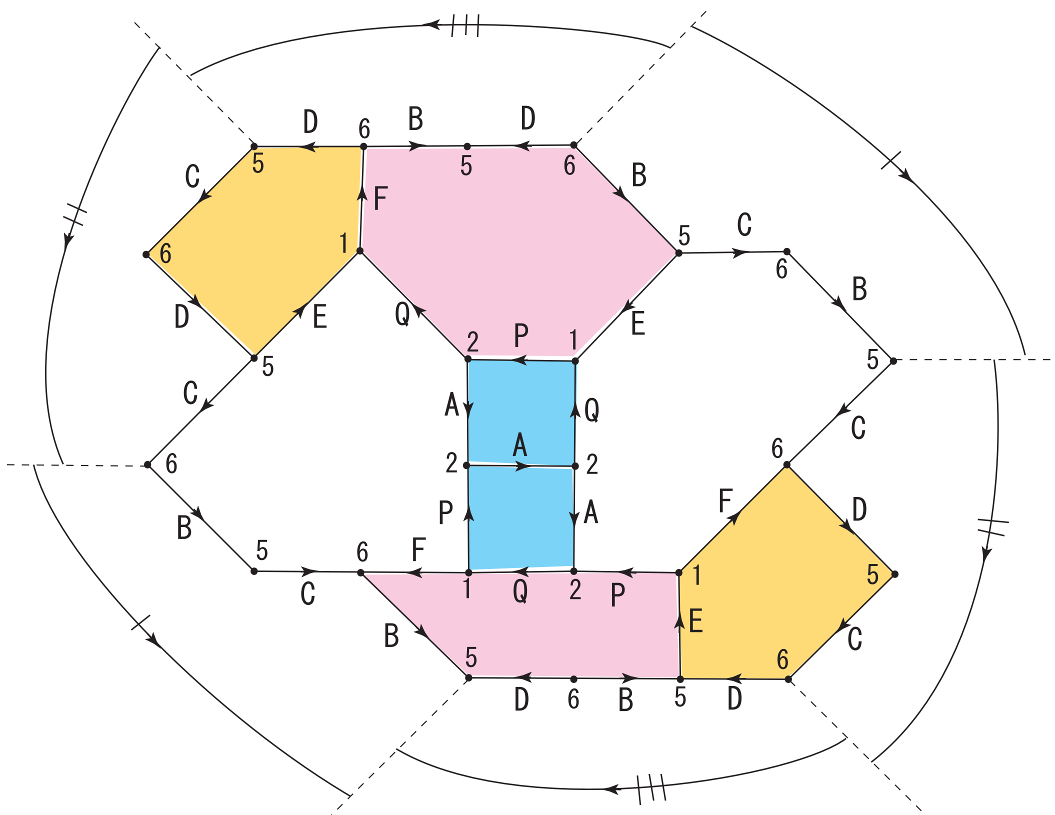


図 3.11: T-DS-diagram $T\Delta_c$ for $S^3 - k4_c$

また、$M(T\Delta_c, \lambda)$ および $M(T\Delta_c, \nu)$ の spine は、共に頂点数が 5 まで落とせることが分かる。そこで、Matveev（[5]）の助けを借りると

$$\begin{aligned} M(T\Delta_c, \lambda) &\cong L(29,8) \quad \text{あるいは} \quad L(29,12) \\ M(T\Delta_c, \nu) &\cong L(30,11) \end{aligned}$$

であることが分かる。

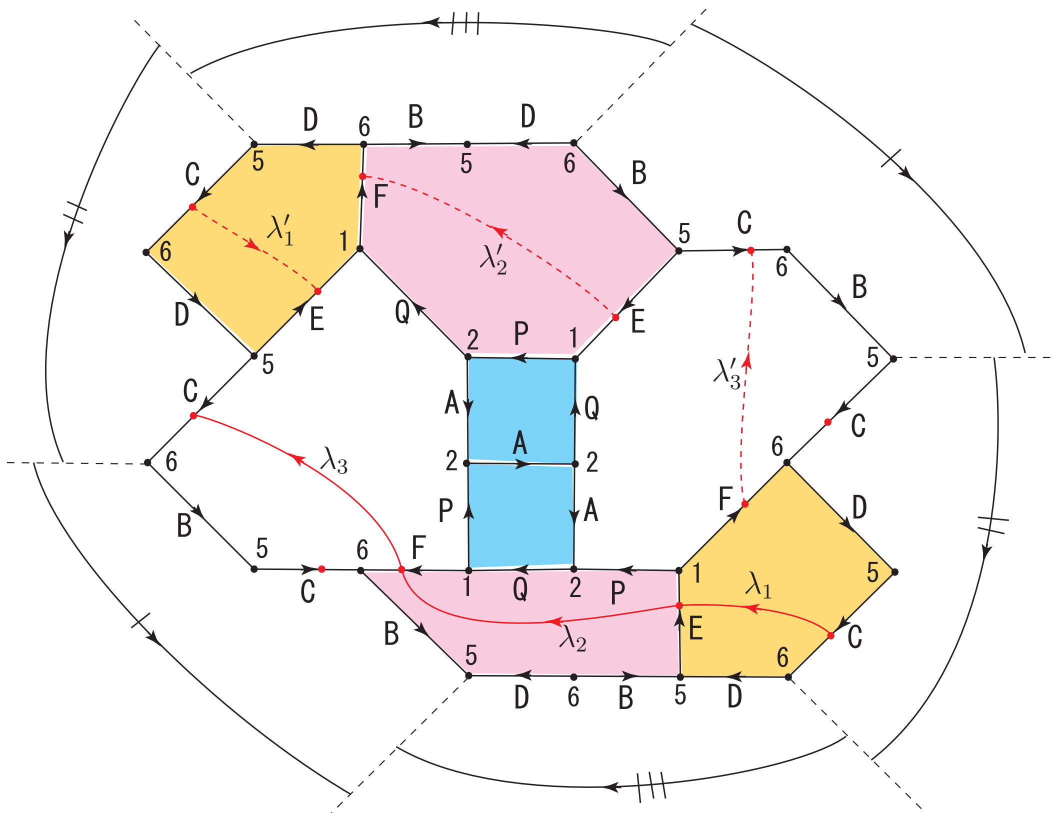


図 3.12: slope $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$ which yields $L(29, ?)$ （$L(29,8)$ or $L(29,12)$）

3.5.4　結論

$k4_a$ の block number 1 DS-diagram から作った knot diagram （最小交点ではない）で交点数を数えると 20 であり、[11] の table にある $k4_3$ の交点数は 18、$k4_4$ の交点数は 22 である。したがって、ここまでの話を総合し [11] の table を信頼すると、

$$k4_a = k4_b = k4_3\,,\ \ k4_c = k4_4$$

と結論付けることができる。

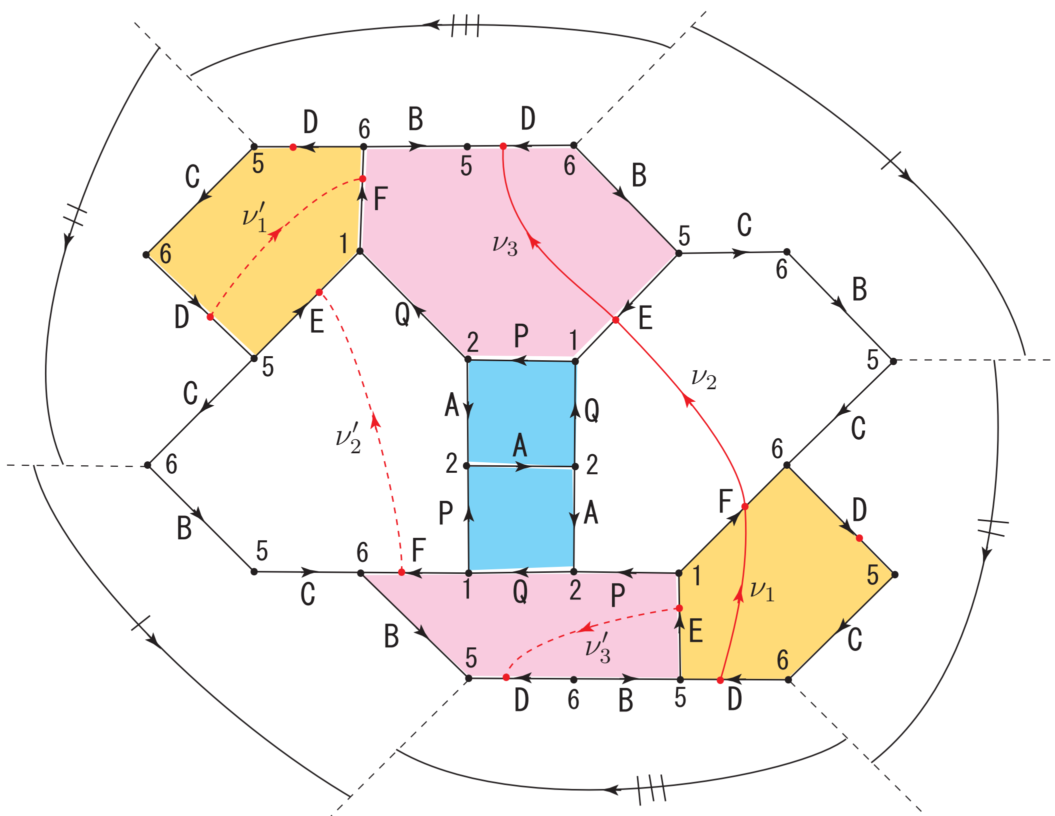


図 3.13: slope $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3$ which yields $L(30, 11)$

参考文献

[1] Callahan P.J., Hildebrand C.M., and Weeks J.R., A census of cusped hyperbolic 3-manifolds, Math. of Computation, vol. 68, no. 225 (1999), 321-332.

[2] Endoh M. and Ishii I., A new complexity for 3-manifolds, Japanese J. of Math. 31 (2005), 131–156.

[3] Garoufalidis S. and Lan Y., Experimental evidence for the volume conjecture for the simplest hyperbolic non-2-bridge knot, Algebraic & Geometric Topology 5 (2005), 379–403.

[4] Koda, Y., A new classification of genus two 3-manifolds –parametrization and Reidemeister torsion–, 2005 年度慶應義塾大学修士論文.

[5] Matveev S., Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, A.C.M. vol.9, Springer (2003).

[6] 石井一平, 結び目補空間の組合せ構造と幾何構造, HAKONE SEMINAR 30 (2014), 35–73.

[7] 石井一平, $(-2,3,7)$ pretzel knot の理想四面体分割について, HAKONE SEMINAR 31 (2015), 11–44.

[8] 石井一平, $(1,1)$-結び目とその二重分岐被覆について, HAKONE SEMINAR 32 (2016), 13–36.

[9] 山下正勝, Block number 2 の 2 種類の DS 図 について, HAKONE SEMINAR 29 (2013), 15–32.

[10] 山下正勝, DS 流 Dehn surgery, HAKONE SEMINAR 29 (2013), 33–55.

[11] Callahan P.J., Hildebrand C.M., and Weeks J.R., Hyperbolic knot cencus, http://www.knotplot.com/hyper/