

(1, 1)-結び目とその二重分岐被覆について

石井 一平

レンズ空間 $L(p, q)$ ($S^3 = L(1, 1)$, $S^2 \times S^1 = L(0, 1)$ を含む) 内の結び目 k が (1, 1)-結び目であるとは、 $L(p, q)$ の種数 1 の Heegaard 分解 (H-分解) (V_1, V_2) ($V_j = D^2 \times S^1$) に対して k が $\partial V_1 = \partial V_2$ と 2 点で交わり、二つの弧 $k \cap V_j$ ($j = 1, 2$) がともに V_j 内の自明 (境界 ∂V_j に平行) となることをいう。(1, 1)-結び目の二重分岐被覆は、それが存在すれば、Heegaard 種数 2 の 3 次元閉多様体となる。

我々の DS-diagram の立場から見れば、(1, 1)-結び目は block number 1 の (E-cycle 付き) DS-diagram の一つの面が表す DS-knot であり、そこから二重分岐被覆の block number 2 の DS-diagram が自然に導かれる。この稿では、(1, 1)-結び目を表す block number 1 の DS-diagrams のいくつかの系列を示し、それらの二重分岐被覆の DS-diagram を見ることによって block number 2 の DS-diagram の "標準形" への手掛かりを探りたい。(p, q) = (0, 1) の場合もある程度同様に扱うことができるのだが、例外扱いしなければならないことも多いので、この稿では $p \geq 1$ とする。

E-data, block number などに関する詳しい定義については [2] を、結び目補空間の special spine およびその T-DS-diagram については [6], [7] を、また、block number 1 の DS-diagram の面がいかに結び目の (1, 1)-表示を与えるかについては [7] を参照のこと。

1 block number 1 の DS-diagrams の基本的系列

1.1 E-data

E-data \mathcal{E} とは、ある有限集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ に対する次のような arrangement \mathcal{A} と code ϕ の組 $\mathcal{E} = (\mathcal{A}, \phi)$ である (V を \mathcal{E} の頂点集合 という)。

- \mathcal{A} は $V^+ \cup V^-$ の一つの円順列である。ここで、 $V^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$ および $V^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$ はそれぞれ頂点集合 V のコピーである。
- ϕ は、頂点集合 V の各点 v_i に ℓ または r (この値は v_i のタイプと呼ばれる) を与える写像 $\phi : V \rightarrow \{\ell, r\}$ である。

向き付け可能 3 次元多様体を表す E-cycle 付きの DS-diagram は E-data を定める。逆に、全ての E-data が DS-diagram に対応しているわけではないが、E-cycle 付き DS-diagram は E-data によって一意的に決定される。以下では特に断らない限り、E-data といえば、それは DS-diagram に対応するものであるとする。E-data \mathcal{E} に対応する DS-diagram を $\Delta(\mathcal{E})$ で表し、さらにその DS-diagram が定める向き付け可能 3 次元多様体を $M(\mathcal{E})$ で表す。

E-data $\mathcal{E} = (\mathcal{A}, \phi)$ に対し、 $\overline{\mathcal{A}}$ で \mathcal{A} の順序を逆にした arrangement を表し、 \mathcal{A}^* で $\overline{\mathcal{A}}$ に変換 $v_i^{\pm} \rightarrow v_i^{\mp}$ を施したものを表す。さらに、 $\overline{\phi}$ で $\overline{\phi}(v_i) \neq \phi(v_i)$ なる code を表す、すなわち、 $\overline{\phi}$ は ϕ から r と ℓ を入れ替えたものである。そして、E-data $\overline{\mathcal{E}}$ および $-\mathcal{E}$ を $\overline{\mathcal{E}} = (\overline{\mathcal{A}}, \overline{\phi})$, $-\mathcal{E} = (\mathcal{A}^*, \phi)$ と定める。このとき、[2] に示された E-data から DS-diagram を構成する方法をみれば、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 1.1. (1) DS-diagram $\Delta(\overline{\mathcal{E}})$ は、 $\Delta(\mathcal{E})$ の鏡像を取って、さらに全ての辺の方向を逆にすることによって得られる。(2) DS-diagram $\Delta(-\mathcal{E})$ は、 $\Delta(\overline{\mathcal{E}})$ からさらに E-cycle に関して反転することによって得られる。

[2] に示されているように、E-cycle 付き DS-diagram は 向き付けられた多様体とその上の非特異ベクトル場のホモトピー類の組 (combed manifold) を定める。この観点からすると、上の命題は次のように解釈される。

命題 1.2. (1) $\overline{\mathcal{E}}$ の定める combed manifold は、 \mathcal{E} が定めるベクトル場はそのままに多様体の向きを逆にしたものである。(2) $-\mathcal{E}$ の定める combed manifold は、 \mathcal{E} が定める多様体の向きはそのままにベクトル場の向きを逆にしたものである。

1.2 E-data $\mathcal{E}_1(p, q)$

互いに素な 2 つの自然数 p, q ($1 \leq q \leq p$) に対し、 $V = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ を頂点集合とする E-data $\mathcal{E}_1(p, q) = (\mathcal{A}, \phi)$ を $\phi(a_i) = \ell$ ($1 \leq i \leq p$),

$$\mathcal{A} = W^+W^-, \quad W^+ = a_1^+a_2^+a_3^+\cdots a_{p-1}^+a_p^+, \quad W^- = a_{pq}^-a_{(p-1)q}^- \cdots a_{3q}^-a_{2q}^-a_q^-$$

によって定める。ただしここで、 jq ($1 \leq j \leq p$) は $jq \equiv k \pmod{p}$, $1 \leq k \leq p$ なる k を表すものとする。

定理 1.1. $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ のとき、 $\mathcal{E}_1(p, q) = -\mathcal{E}_1(p, q')$ である。

定理 1.2. $M(\mathcal{E}_1(p, q))$ はレンズ空間 $L(p, q)$ である。

例えば E-data $\mathcal{E}_1(5, 2)$ が与える DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_1(5, 2))$ は 図 1.1 に示されるものであり、 $\Delta(\mathcal{E}_1(5, 3)) = \Delta(-\mathcal{E}_1(5, 2))$ である。

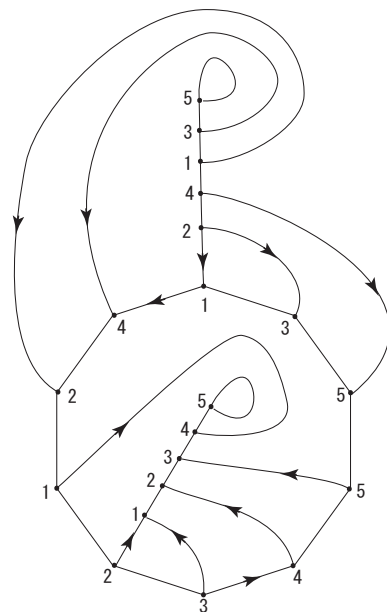


図 1.1: DS-diagram for the E-data $\mathcal{E}_1(5, 2)$

[2] において E-data の regular moves R_1 および R_2 が定義されている。 R_1 は combed manifold を不変にする "3 辺形潰し" であり、 R_2 は combed manifold を不変にする "2 辺形潰し" である。そして、次の定理が示されている。

定理 1.3. 同じ combed manifold を定める 2 つの E-data は互いに R_1^\pm および R_2^\pm の有限列で移りあう。

証明は省略するが、次の定理によって $\mathcal{E}_1(p, q)$ が block number 1 の E-data の標準形と思える。

定理 1.4. (1) レンズ空間 $L(p, q)$ を表す block number 1 の E-data の最小頂点数は p である。 (2) 任意の block number 1 E-data は $R_1^{\pm 1}$ および $R_2^{\pm 1}$ の有限列で $\mathcal{E}_1(p, q)$ または $\overline{\mathcal{E}_1(p, q)}$ に変換される。

1.3 E-data $\mathcal{E}_2(p, q)$

互いに素な自然数 p, q ($1 \leq q \leq p$) に対し $(p+2)$ 個の点からなる $V = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p+1}\}$ を頂点集合とする E-data $\mathcal{E}_2(p, q) = (\mathcal{A}, \phi)$ を次のように定める。code ϕ は $\phi(a_0) = r, \phi(a_j) = \ell$ ($1 \leq k \leq p+1$) で定め、arrangement \mathcal{A} は

$$\mathcal{A} = W^+W^-, \quad W^+ = a_0^+ a_1^+ a_2^+ \cdots a_p^+ a_{p+1}^+, \quad W^- = a_1^- a_{1+q}^- a_{1+2q}^- a_{1+3q}^- \cdots a_{1+pq}^- a_0^-,$$

によって与える(ただし $1+jq$ ($2 \leq j \leq p$) は $1+jq \equiv k \pmod{p}$ なる k ($2 \leq k \leq p+1$) を表す)。

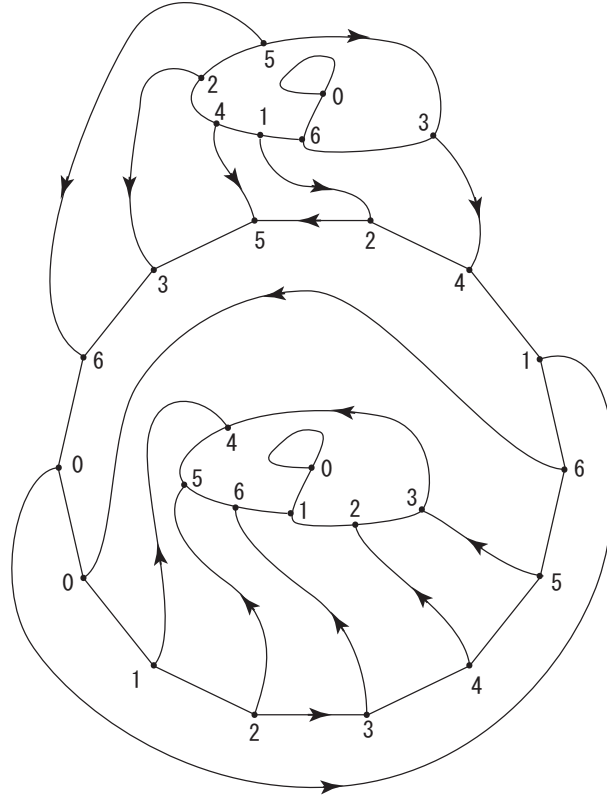


図 1.2: DS-diagram for the E-data $\mathcal{E}_2(5, 3)$

例として、図 1.2 に $\mathcal{E}_2(5, 3)$ が定める DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_2(5, 3))$ を示す。E-data $\mathcal{E}_2(p, q)$ が多様体 $M(\mathcal{E}_2(p, q))$ はレンズ空間 $L(p, q)$ である。

1.4 E-data $\mathcal{E}_n(p, q)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

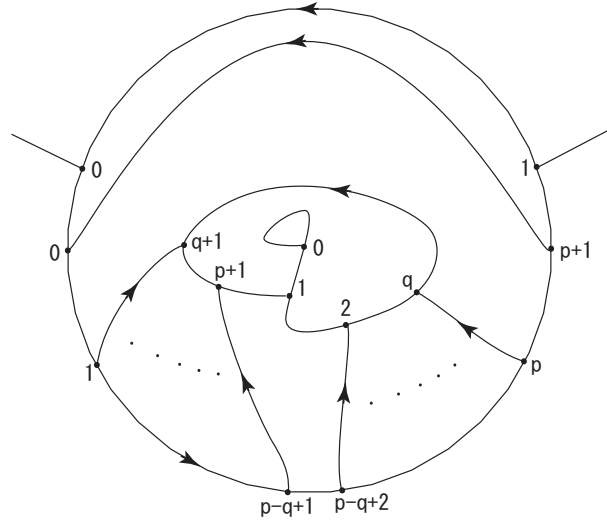


図 1.3: DS-diagram for the E-data $\mathcal{E}_2(p, q)$ (E-cycle の片側)

一般に、DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_2(p, q))$ E-cycle の片側は 図 1.3 に示されるものになる。E-data から DS-diagram を構成する方法 ([2]) をみれば、このような E-cycle 片側の DS-diagram から E-data が読み取れることがわかる。とくに block number 1 の場合には、頂点のラベルがなくても E-data がただ一通りに読み取ることができる。

このような意味で、図 1.3 は block number 1 の E-data を指定している。図 1.3 に 2 本の辺を加えた 図 1.4 (辺に指定される向きの変化にも注意) が表す E-data を $\mathcal{E}_3(p, q)$ とする。さらに、これに 2 本の辺を付け加えた 図 1.5 が表す E-data を $\mathcal{E}_4(p, q)$ とし、以下同様に E-data $\mathcal{E}_n(p, q)$ ($n = 5, 6, \dots$) を定める。

定理 1.1 と同様に、

定理 1.5. $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ のとき $\mathcal{E}_n(p, q') = -\mathcal{E}_n(p, q)$ である。

が成り立つ。さらに、block number 1 の DS-diagram に現れる 2 辺形はすべて R_2 (combed manifold を不変にする 2 辺形潰し) が適用可能であることから、次の定理が導かれる。

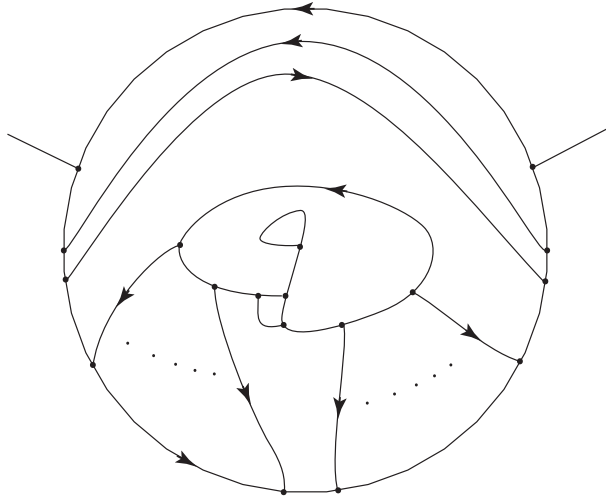


図 1.4: DS-diagram for the E-data $\mathcal{E}_3(p, q)$ (E-cycle の片側)

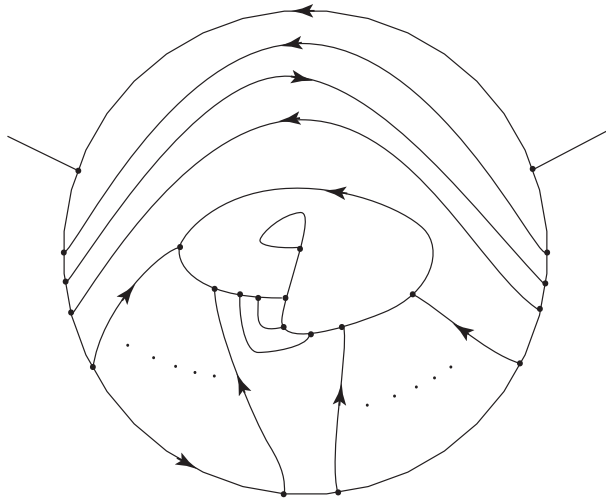


図 1.5: DS-diagram for the E-data $\mathcal{E}_4(p, q)$ (E-cycle の片側)

定理 1.6. (1) E-data $\mathcal{E}_n(p, q)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はレンズ空間 $L(p, q)$ の DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_n(p, q))$ を与え、これらの DS-diagram は 2 辺形を持たない。 (2) 任意の block number 1 DS-diagram は、 R_2 を有限回施すことによって $\Delta(\mathcal{E}_n(p, q))$ または $\Delta(\overline{\mathcal{E}_n(p, q)})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のいずれかに変換される。

2 (1, 1)-結び目

2.1 DS-knot としての (1, 1)-結び目

DS-diagram Δ が定める 3 次元閉多様体を $M(\Delta)$ 、その special spine を $P(\Delta)$ とし、 Δ が指定する同一視写像を $f : \partial\mathbb{B}^3 \rightarrow P(\Delta)$ とする。 $P(\Delta)$ の一つの面 X が定める DS-knot $k(X) \subset M(\Delta)$ とは次のように定められるものであった。 X 内の 1 点 x を取ると $\partial\mathbb{B}^3$ 上の 2 点 $f^{-1}(x) = \{x^+, x^-\}$ が定まる。これら 2 点を端点とする \mathbb{B}^3 内の自明な弧 γ をとると $f(\gamma)$ により $M(\Delta)$ 内の結び目 (のイソトピー類) が定まる。この結び目を面 X が定める DS-knot といい、 $k(X)$ で表す。以下では、"DS-diagram Δ の面 X に対する DS-knot $k(\Delta; X)$ " は $P(\Delta)$ の面 $f(X)$ が表す DS-knot $k(f(X))$ を意味するものとする。さらに、cusped manifold $M(\Delta) - k(\Delta; X)$ が双曲的であるとき、DS-knot $k(\Delta; X)$ は双曲的であるといい、 $M(\Delta) - k(\Delta; X)$ の双曲体積を $vol(k(\Delta; X))$ で表すことにする。

DS-diagram の move の意味を考えると次の命題が成り立つことは明らかであろう。

命題 2.1. DS-diagram Δ に move を施して Δ' が得られ、この move の間の連続的追跡によって Δ の面 X から Δ' の面 X' が得られるとすると、 $k(\Delta; X) = k(\Delta'; X')$ である。

とくに、次の命題が成り立つ。

命題 2.2. DS-diagram Δ が 2 辺形 Y を持ち、 Δ に Y を潰す move R_2 を適用して DS-diagram Δ' が得られるとする。このとき、 $X \neq Y$ なる Δ の面に対して $k(\Delta; X) = k(\Delta'; X')$ となる Δ' の面 X' が存在する。

(1, 1)-結び目 k は、block number 1 E-data \mathcal{E} が定める DS-diagram $\Delta(\mathcal{E})$ とその一つの面 X によって $k = k(\Delta(\mathcal{E}); X)$ と表せる。命題 2.2、定理 1.6 さらに 命題 1.2 を

考え合わせると、 $(1, 1)$ -結び目 $k(\Delta(\mathcal{E}); X)$ の同相類は \mathcal{E} および X が次の (a), (b) の場合ですべて尽くされていることがわかる。

- (a) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n(p, q)$ で X は $\Delta(\mathcal{E}_n(p, q))$ の一つの面。
- (b) \mathcal{E} は $\Delta(\mathcal{E})$ が (E-cycle の片側に) 唯一つの 2 辺形を持つ block number 1 E-data で、 X はその 2 辺形 (正確には、それが表す special spine の 2 辺形)。

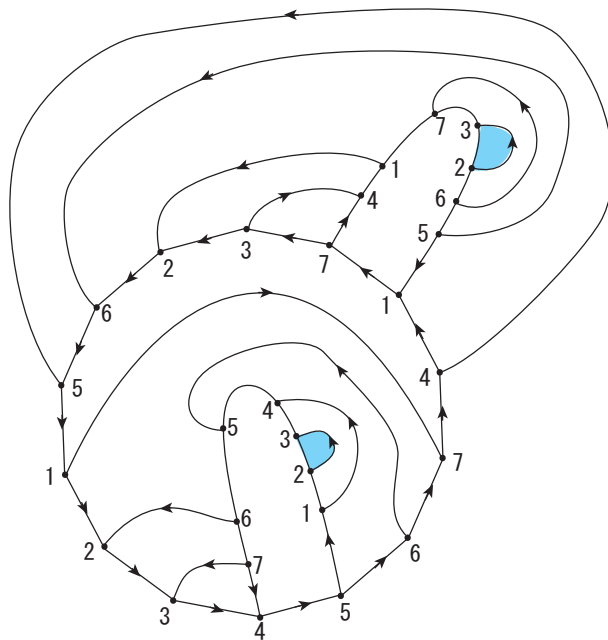


図 2.1: pretzel knot $p(-2, 3, 7) \subset S^3$

(b) の場合の例として、図 2.1 を示しておく。これは、pretzel knot $p(-2, 3, 7)$ を block number 1 DS-diagram の DS-knot として表したものである ([7])。この DS-diagram に 3 回 R_2 を施せば $\mathcal{E}_1(1, 1)$ が得られるが、当然ながらこの変形によって結び目を表す 2 辺形は消滅する。

一般に、 $(1, 1)$ -結び目の (a), (b) のような DS-knot 表示に対して、 m 回の R_2 によって $\mathcal{E}_n(p, q)$ に到達するという整数の組 (m, n) が対応する。この (m, n) は $(1, 1)$ -結び目のある種の複雑さを表す量であると考えられる。

2.2 $\Delta(\mathcal{E}_n(p, q))$ の 1 辺形が表す $(1, 1)$ -結び目

各々の $\Delta(\mathcal{E}_n(p, q))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は一つの 1 辺形 X_0 を持つ。この 1 辺形が定める DS-knot $k(\Delta(\mathcal{E}_n(p, q)); X_0)$ を $K_n(p, q)$ で表すことにする。

注意 1. 命題 1.2 と 定理 1.5 によって、 $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ のとき、 $K_n(p, q)$ と $K_n(p, q')$ は一つの向き付けられた多様体 $M(\mathcal{E}_n(p, q)) = M(\mathcal{E}_n(p, q'))$ 中の一つの結び目の向きを互いに入れ替えたものとみることができる。この意味で $K_n(p, q') = -K_n(p, q)$ と表示する。

以下この分節では、 $K_n(p, q)$ について判明していることを列挙する。

- まず $K_n(1, 1) \subset S^3$ について。 $K_1(1, 1)$ は 3_1 -knot、 $K_2(1, 1)$ は 4_1 -knot、 $K_3(1, 1)$ は 5_2 -knot、 $K_4(1, 1)$ は 6_1 -knot \dots と $K_n(1, 1)$ は twist knot の系列を与える。
- 以下のようなことから、 $n \geq 2$ のときすべての $K_n(p, q)$ が双曲結び目であることが強く予想される。(1) $K_2(p, 1)$ は双曲結び目で、その補空間は $p + 1$ 個の理想四面体に分割される。(2) $p \geq 3$ のとき、 $K_2(p, p - 1)$ は双曲結び目で、その補空間は $p + 1$ 個の理想四面体に分割される。(3) $K_3(p, 1)$ は双曲結び目で、その補空間は $p + 2$ 個の理想四面体に分割される。(4) $K_2(5, 3) = -K_2(5, 2)$ は双曲結び目で、その二重分岐被覆は Fomenko-Matveev-Weeks manifold と呼ばれる体積最小の双曲的閉 3 次元多様体である ([3])。
- $K_1(p, 1)$ はトーラス結び目 (種数 1 の H-分解を与えるトーラス上にある結び目) である。
- $K_1(2k + 1, 2) = -K_1(2k + 1, k + 1)$ は非双曲的である。これは、補空間の spine が胞体的でないものまで縮約されることからわかる。
- $p \geq 5$ のとき、 $K_1(p, p - 1)$ は双曲的で $p - 3$ 個の理想四面体に分割され、 $vol(K_1(p, p - 1)) = vol(K_2(p - 4, 1))$ である。とくに、その補空間が理想正四面体 2 個に分割される $K_1(5, 4)$ は "figure eight sister" と名付けられているようである。
- 3 個の理想四面体に分割される cusped manifolds M_{3_5}, M_{3_9} (この名前は [1] による) はそれぞれ $K_1(9, 4) = -K_1(9, 7)$ および $K_1(11, 7) = -K_1(11, 8)$ の補空

間である。 M_{39} は $L(6, 5)$ 内の $(1, 1)$ -結び目の補空間ともなるが、この $(1, 1)$ -結び目は (b)-type で 1 回の R_2 で $\Delta(\mathcal{E}_1(6, 5))$ に落ちる DS-knot である。さらに、この M_{39} は $L(17, 12)$ 内の $(1, 1)$ -結び目の補空間でもある。このときの $(1, 1)$ -結び目は $\Delta(\mathcal{E}_1(17, 12))$ の 1 辺形 X_0 とは異なるある面 X_* が表す DS-knot $k(\Delta(\mathcal{E}_1(17, 12)), X_*)$ となる (次分節参照)。

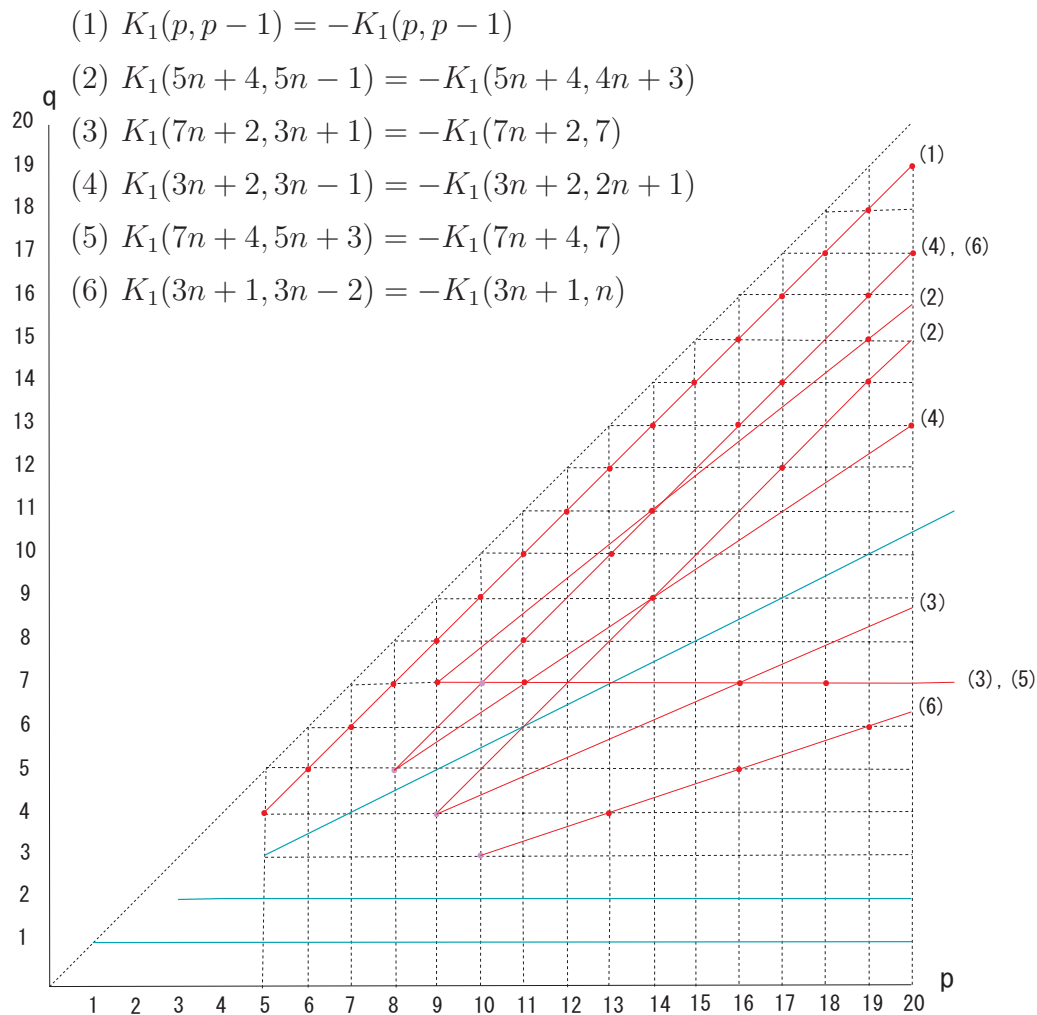


図 2.2: hyperbolicity of the knots $K_1(p, q) \subset L(p, q)$

- cusped manifold M_{435} は体積が理想正八面体と等しいものの一つであり ([1])、

直角二等辺三角形を切頭三角形とする理想四面体 4 個に分割される。この $M_{4_{35}}$ は $K_1(16, 7) = -K_1(16, 7)$ の補空間である。因みに、 $K_2(4, 3)$ は 5 個の理想四面体に分割されるが $vol(K_2(4, 3)) = vol(K_1(16, 7))$ である。

- 図 2.2 に $K_1(p, q)$ が双曲的となることが確かめられた (p, q) をプロットしてみた。大きい p に対しては、双曲的になるような q の比率は大きくなるのだろうか？

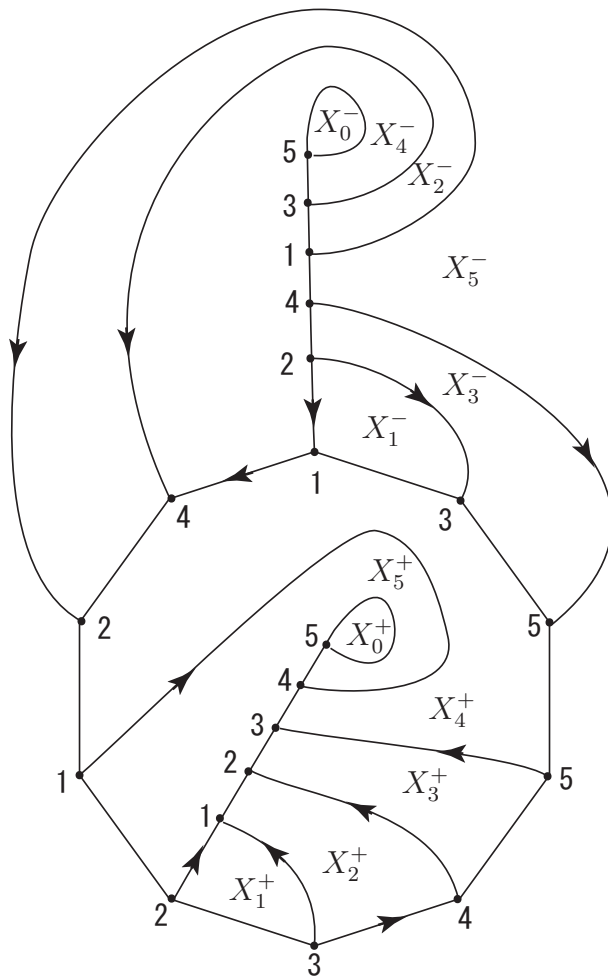


図 2.3: $\Delta(\mathcal{E}_1(5, 2))$ の面への番号付け

2.3 $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ の 1 辺形以外の面に対応する $(1, 1)$ -結び目 $K_1(p, q; k)$

$\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ (が定める special spine) は $p + 1$ 個の面を持ち、その 1 辺形を X_0 と名付けた。他の p 個の面 X_1, \dots, X_p の番号付けを $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ を E-cycle の片側 (内側) で次のように決める。図 2.3 に $\Delta(\mathcal{E}_1(5, 2))$ の場合に具体的に示したように、 X_1 を 3 辺形とし、 X_1 から次々と隣り合う面を順に X_2, X_3, \dots, X_p とする。図 2.3 では、E-cycle の内側にある面を X_k^+ で示し、それと同一視される外側の面を X_k^- で示した。図 2.4 に一般の (p, q) に対する $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ の面への番号付けを E-cycle の内側で示した。 $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ の面 X_k ($k = 1, 2, \dots, p$) が表す DS-knot $k(\Delta(\mathcal{E}_1(p, q)), X_k)$ を $K_1(p, q; k)$ で表すことにする。

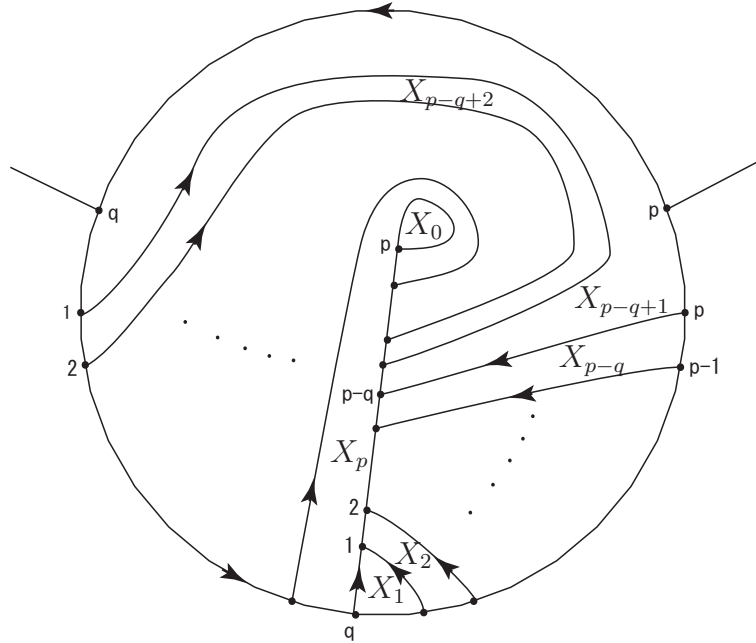


図 2.4: $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ の面への番号付け

図 2.3 の E-cycle の反対側 (外側) は、辺の向きを逆にすれば $\Delta(\mathcal{E}_1(5, 3))$ ($\mathcal{E}_1(5, 3) = -\mathcal{E}_1(5, 2)$ である) を表すことに注意すれば、

$$K_1(5, 3; 1) = -K_1(5, 2; 1), \quad K_1(5, 3; 2) = -K_1(5, 2; 3), \quad K_1(5, 3; 3) = -K_1(5, 2; 5), \\ K_1(5, 3; 4) = -K_1(5, 2; 2), \quad K_1(5, 3; 5) = -K_1(5, 2; 4)$$

となっていることがわかる。一般に $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ のとき、 $(k-1) \equiv (k'-1)q \pmod{p}$ ($1 \leq k, k' \leq p$) なる k, k' に対して $K_1(p, q'; k') = -K_1(p, q; k)$ となっている。

参考文献 [7] に記した block number 1 DS-diagram から種数 1 の H-分解を得る方法を適用してみよう。DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ が描かれた $\partial\mathbb{B}^3$ 上に図 2.5 に破線で示したような円周 $\partial\Sigma$ を取り、これに \mathbb{B}^3 の内部で円板 Σ を張る。そして、この Σ によって分割される \mathbb{B}^3 の二つの部分を B^+, B^- (図に見える方を B^+) とする。 $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ に指定された同一視を行うと、 B^+ の図に色付けて示した部分が互いに貼り合わされて、 B^+ は $M(\mathcal{E}(p, q))$ 内のソリッドトーラス (これを V^+ とする) を表す。同様に、 B^- もソリッドトーラス V^- を表し、 (V^+, V^-) が $M(\mathcal{E}_1(p, q)) = L(p, q)$ の種数 1 の H-分解を与える。図 2.5 の色付けられた部分を互いに貼り合わせたものが V^+ の meridian disk D^+ である。色付けられた部分は面 X_p の一部分であるから、結び目 $K_1(p, q; p)$ は D^+ と唯一点で交わるソリッドトーラス V^+ の core (とイソトピック) である。同様に、 $K_1(p, q; p-q+1) = -K_1(p, q'; p)$ は V^- の core である。

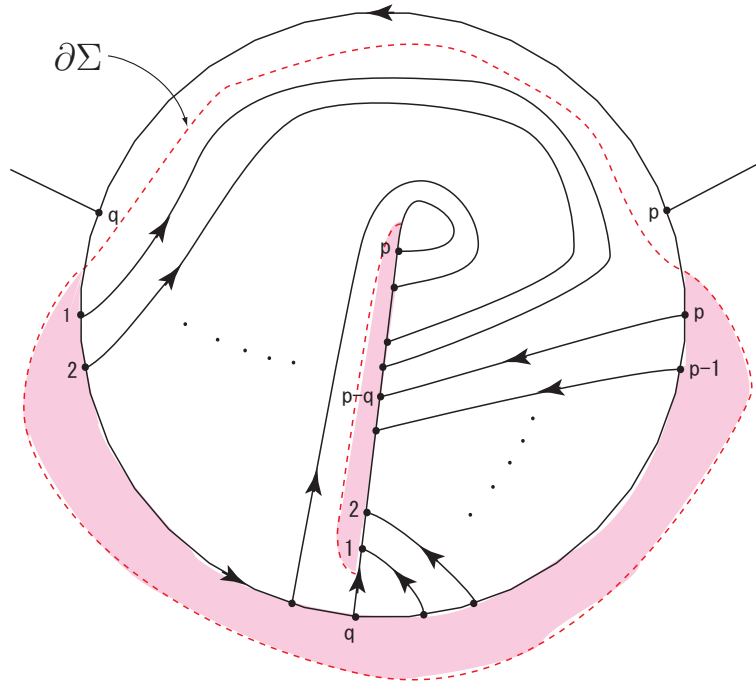


図 2.5: $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ が定める H-分解

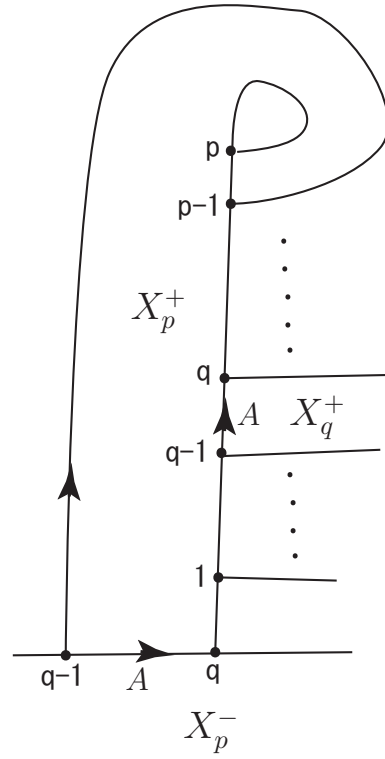


図 2.6: DS-diagram $\Delta(\mathcal{E}_1(p, q))$ 上の面 X_p と X_q

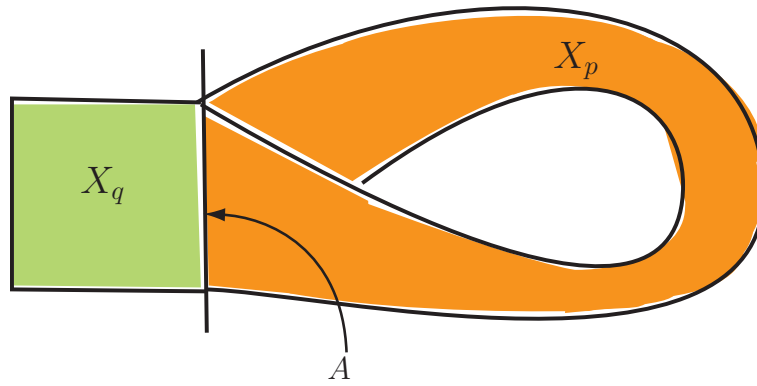


図 2.7: $M(\mathcal{E}_1(p, q))$ 内の spine 上の面 X_p, X_q と辺 A (Möebius triplet)

さらに、 $K_1(p, q; q)$ が torus knot であることが次のようにして分かる。面 X_p を DS-diagram 上でみると 図 2.6 に示したようにその境界に辺 A が 2 回同じ方向で現れる、いわゆる "対隣接面" である。このことは、DS-diagram によって指定される同一視を行えば、面 X_p は special spine の面としては Möbius band であり、辺 A から他の一つの面が分岐していることを示している。この分岐する面が X_q であることが DS-diagram から読み取れる。したがって、special spine の中で X_p と X_q は図 2.7 のようになっている。 $K_1(p, q; p)$ は、 X_p と 1 点で交わり spine と平行な結び目なので、この Möbius band の中心線 c (にイソトピック) としてよい。一方上に述べたように $K_1(p, q; p)$ は V^+ の core であるから、 c の正則近傍 $N(c)$ は V^+ にイソトピックである。そして、面 X_q と 1 点で交わり spine に平行な結び目 $K_1(p, q; q)$ は $\partial N(c)$ 上に取ることができる。したがって $K_1(p, q; q)$ は torus knot である。まったく同様にして、 $K_1(p, q; p - q + 2) = -K_1(p, q'; q')$ が torus knot であることが示される。

参考文献 [9] では、 $K_1(p, q; p - q) = -K_1(p, q'; p - q')$ の二重分岐被覆が連結和 $L(p, q) \# L(p, q)$ であることが示されている。

この分節の最後に、補空間が双曲的になることが確かめられた $K_1(p, q; k)$ を列挙する。そのような $K_1(p, q; k)$ は多くはなく、また無限系列で確定されたものもない。

- $K_1(15, 11; 8) = -K_1(15, 11; 3)$ の補空間は $M3_1$ ([1]) であり、これは理想四面体 3 個に分割される cusped manifold である。 $M3_1$ は $L(5, 2)$ 内の $(1, 1)$ -結び目 ((b)-type) の補空間としても表される ([6] 参照)。
- pretzel knot $p(-2, 3, 7) \subset S^3$ の補空間は $M3_7$ と名付けられた hyperbolic cusped manifold である ([1])。参考文献 [7] に示したように、 $M3_7$ は 2 種類の方法で 3 個の理想四面体に分割することができ、これに応じて $p(-2, 3, 7)$ の $(1, 1)$ -結び目表示を与える block number 1 DS-diagram も 2 種類できる (そのうちの 하나가 図 2.1、他の一つも (b)-type)。また、 $M3_7$ は Dehn-充填によってレンズ空間を与える slope を 3 つ持ち、そのレンズ空間は $S^3, L(18, 5), L(19, 8)$ である。 $L(18, 5), L(19, 8)$ 内の結び目でその補空間が $M3_7$ である結び目の $(1, 1)$ -表示はそれぞれ 2 つあり、それらは

$$\begin{aligned} K_1(18, 7; 16) &= -K_1(18, 13; 16), & K_1(19, 8; 15) &= -K_1(19, 12; 17), \\ K_1(18, 5; 2) &= -K_1(18, 11; 12), & K_1(19, 8; 18) &= -K_1(19, 12; 15) \end{aligned}$$

である。 $K_1(18, 7; 16)$ と $K_1(18, 5; 2)$ は $L(18, 5) \cong L(18, 7)$ の中でイソトピックなのであろうか？ また、 $K_1(19, 8; 15)$ と $K_1(19, 8; 18)$ は $L(19, 8)$ の中でイソトピックなのだろうか？

- $K_1(17, 12; 2) = -K_1(17, 10; 11)$ の補空間は $M_{39}([1])$ であり、これは前分節で述べたように $K_1(11, 7) = -K_1(11, 8)$ の補空間でもある。

3 (1, 1)-結び目の二重分岐被覆

種数 2 の閉 3 次元多様体は、block number 2 の DS-diagram によって表示される。参考文献 [2], [3], [8], [9], [10] などで、block number 2 DS-diagram のいくつかの系列が調べられている。ここでは、(1, 1)-結び目の二重分岐被覆とそれから派生する block number 2 DS-diagram について、形式的なことが多いが、調べてみたことを報告したい。

3.1 block number 1 DS-diagram から作る二重分岐被覆

$\mathcal{E} = (\mathcal{A}, \phi)$ を block number 1 E-data で DS-diagram $\Delta(\mathcal{E})$ に対応しているとし、 $\Delta(\mathcal{E})$ の一つの面 X ($\partial\mathbb{B}^3$ 上では X^+ と X^-) が定める (1, 1)-結び目 $k(\Delta(\mathcal{E}); X)$ の二重分岐被覆を考える。

まず、球面 $\partial\mathbb{B}^3$ 上の $\Delta(\mathcal{E})$ を表す各辺に向きが付けられた 3 正則グラフ G に対し、2 点 x^+, x^- ($x^\pm \in X^\pm$) で分岐する二重分岐被覆を作り、これを \tilde{G} とする。結び目 $k(\Delta(\mathcal{E}); X)$ の二重分岐被覆を表す block number 2 E-Data $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\phi})$ を、その DS-diagram が定める $\partial\mathbb{B}^3$ 上のグラフが \tilde{G} であるようなものとして求める。

\mathcal{E} が block number 1 であることから、その頂点集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に適当な番号付けをすると、arrangement \mathcal{A} はある置換 σ によって

$$\mathcal{A} = W_1^+ W_2^- , \quad W_1^+ = a_1^+ a_2^+ \dots a_n^+ , \quad W_2^- = a_{\sigma(1)}^- a_{\sigma(2)}^- \dots a_{\sigma(n)}^-$$

と表わされる。例えば、図 2.1 では $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ である。この \mathcal{A} に対して、 $2n$ 個の頂点集合 $\{c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n\}$ を持つ "formal double" と呼

ばれる次のような arrangement \mathcal{A}_{fd} のクラスを考える。

$$\mathcal{A}_{fd} = W_{11}^+ W_{21}^- W_{12}^+ W_{22}^-, \quad W_{11}^+ = c_1^+ c_2^+ \dots c_n^+, W_{21}^- = u_{\sigma(1)}^- u_{\sigma(2)}^- \dots u_{\sigma(n)}^-$$

$$W_{12}^+ = d_1^+ d_2^+ \dots d_n^+, \quad W_{21}^- = v_{\sigma(1)}^- v_{\sigma(2)}^- \dots v_{\sigma(n)}^-$$

ただしここで、 $u_j^- = c_j^-$ or d_j^- , $v_j^- = c_j^-$ or d_j^- でかつ $u_j^- \neq v_j^-$ であるとする。そして、 $\tilde{\phi}(c_j) = \tilde{\phi}(d_j) = \phi(a_j)$ と code $\tilde{\phi}$ を定義し、formal double $\tilde{\mathcal{A}}$ を E-data $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\phi})$ が DS-diagram を定め、 $\Delta(\tilde{\mathcal{E}})$ のグラフが \tilde{G} と一致するように選ぶ (各 \mathcal{E}, X の組に対して、このような formal double $\tilde{\mathcal{A}}$ の個数は 0, 1, 2 のいずれかである)。このように構成された $\tilde{\mathcal{E}}$ が表す多様体 $M(\tilde{\mathcal{E}})$ は、結び目 $k(\Delta(\mathcal{E}), X)$ の二重分岐被覆となっている。逆に、(1, 1)-結び目の二重分岐被覆はこのような方法で得られる。

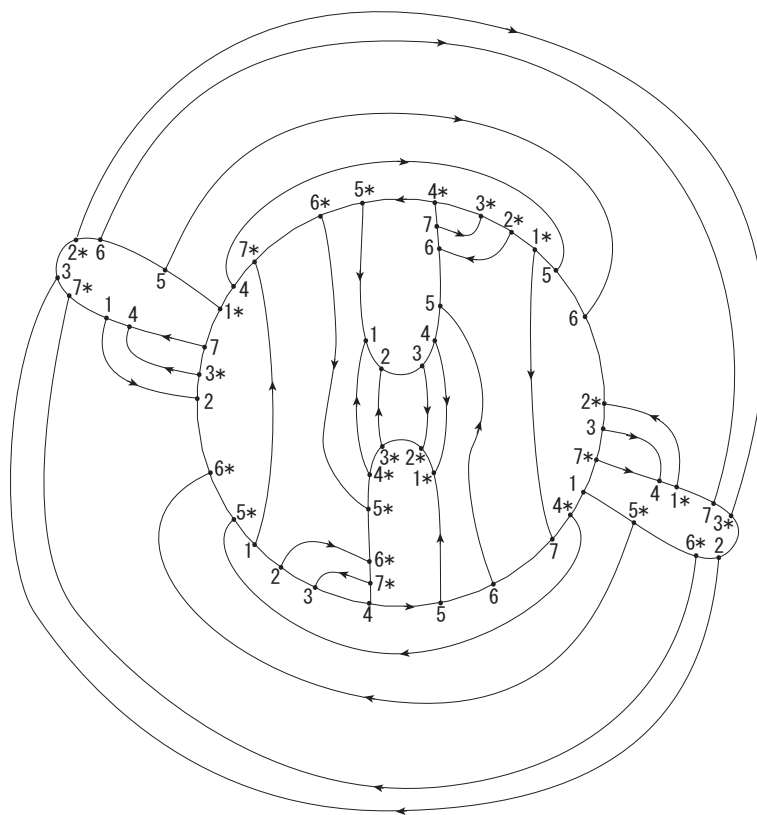
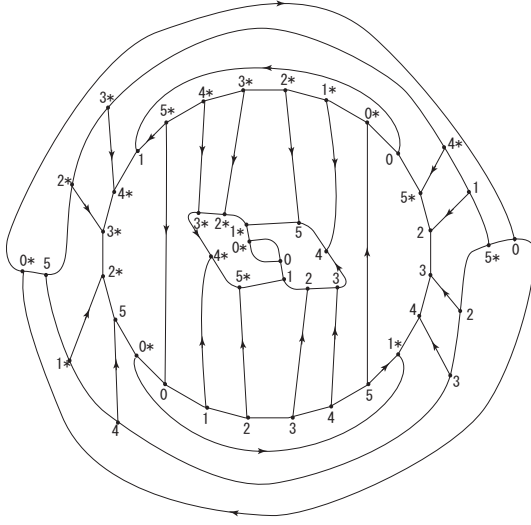
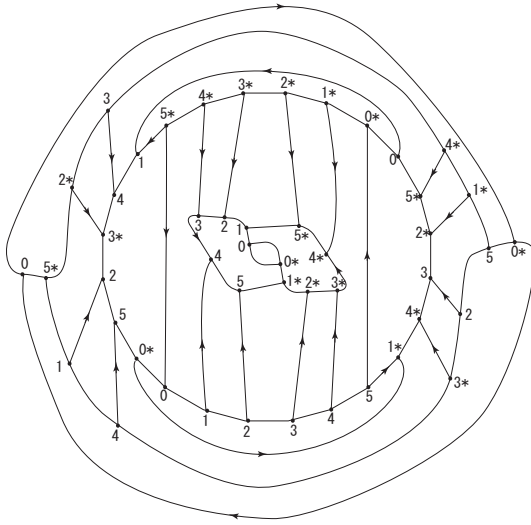


図 3.1: pretzel knot $p(-2, 3, 7) \subset S^3$ の二重分岐被覆



☒ 3.2: a 2-fold branched covering of $K_2(4,3)$



☒ 3.3: another 2-fold branched covering of $K_2(4,3)$

図 3.1 は上に述べた方法で 図 2.1 (面 X は図中で色付けられた面) から構成されたものである。この場合には、唯一つの formal double が二重分岐被覆を与える。

図 3.2 および 図 3.3 はともに $K_1(4, 3)$ の二重分岐被覆であり、これらは互いに異なる多様体である。すなわち、 $K_2(4, 3)$ に対しては二重分岐被覆を与える formal double が 2 個存在し、これら 2 個の formal doubles はそれぞれ異なる多様体を表す。

二重分岐被覆を与える formal double が 2 個存在しながら、二重分岐被覆となる多様体は 1 個ということもある。例えば、 $K_1(16, 7) = -K_1(16, 7)$ に対しては 2 個の formal double \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 が二重分岐被覆を与えるが、 $(\tilde{A}_1, \tilde{\phi}) = -(\tilde{A}_2, \tilde{\phi})$ となり多様体としては同じものを定めることを確かめることができる。

次に、二重分岐被覆を持たない $(1, 1)$ -結び目の例を挙げる。図 3.4 に示される $L(6, 5)$ 内の $(1, 1)$ -結び目の補空間は [1] で M_{39} と名付けられた hyperbolic cusped manifold である。これに対しては二重分岐被覆を与える formal double が存在せず、この $(1, 1)$ -結び目の二重分岐被覆は存在しない。

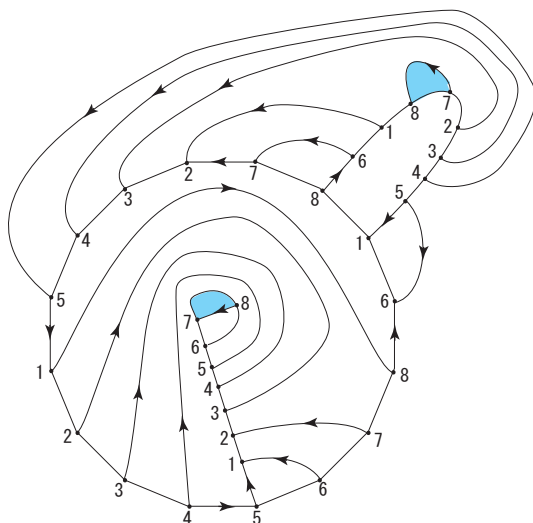


図 3.4: $M_{39} \subset L(6, 5)$ which has no 2-fold branched covering

注意 2. 一般に、3次元多様体 M 内の結び目 k が何個の二重分岐被覆を持つかは、 $H_1(M - k; \mathbb{Z})$ と k の meridian μ のホモロジー類 $[\mu] \in H_1(M - k; \mathbb{Z})$ を調べれば分かることである。結び目を DS-knot として表し、二重分岐被覆をその DS-diagram とともに求めることによって見えてくる構造もあると思われる。

3.2 core knots

種数 2 の H-分解 (V_1, V_2) を持つ多様体 M を考える、すなわち V_1, V_2 はそれぞれ種数 2 のハンドル体で $M = V_1 \cup V_2, \partial V_1 = \partial V_2$ とする。ハンドル体 V_1 の complete meridian disk system を (D_{11}, D_{12}) とし、 k_{11} を ∂V_1 上の単純閉曲線で $k_{11} \cap D_{12} =$ かつ D_{11} とは唯 1 点で交わるものとする。 M の H-種数が 2 であるとき、このような結び目を M の core knot ということにする。core knot は meridian disk の取り方に依存し、 V_1, V_2 それぞれの complete meridian disk systems を定めるとそれに応じて 4 個の core knots が定まる。H-種数 2 の多様体をその core knot で Dehn 手術して得られる多様体の H-種数は 2 以下であることから、H-種数 2 の多様体を考える上で core knots は重要であると思われる。ここでは、 $(1, 1)$ -結び目の二重分岐被覆について、その core knot の調べ方を紹介し、いくつかの結果を報告する。

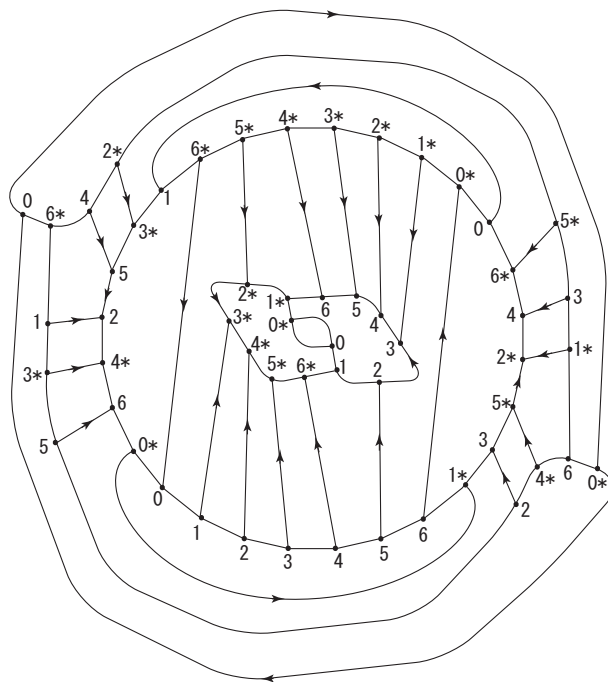


図 3.5: $K_2(5, 2)$ の二重分岐被覆

図 3.5 に示された $K_2(5, 2)$ の二重分岐被覆 (この多様体は Matveev-Fomenko-Weeks manifold と呼ばれる体積最小の双曲的閉 3 次元多様体である) を例にとって、core knot

をどのように捉えるかを説明しよう。

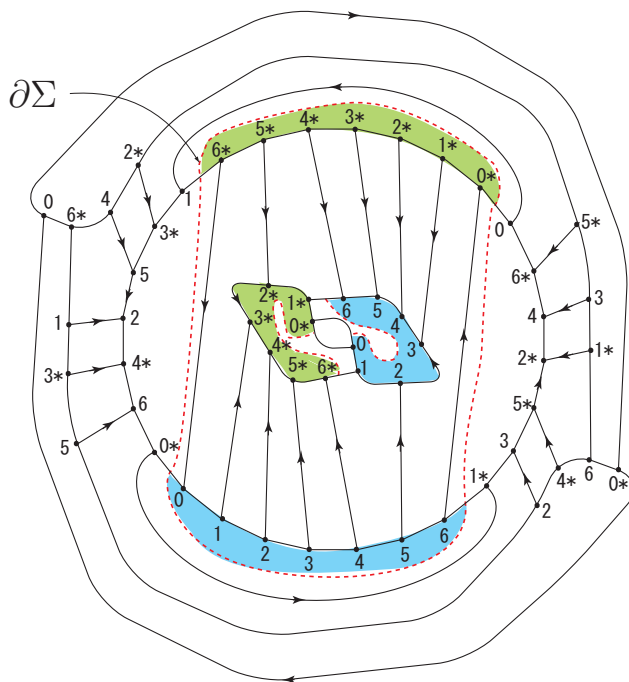


図 3.6: $K_2(5, 2)$ の二重分岐被覆の H-分解と meridian disk

block number 2 の DS-diagram の場合には、図 3.6 のようにとった DS-diagram が描かれた $\partial\mathbb{B}^3$ 上の円周 $\partial\Sigma$ を境界とする \mathbb{B}^3 内の円板 Σ によって多様体は 2 つの種数 2 ハンドル体 V_1, V_2 (図で $\partial\Sigma$ の内側を V_1 とする) に分ける H-分解が得られる。 V_1 の meridian disks は図に色付けて示したように取ることができ、 V_1 の core knots k_{11}, k_{12} がそれぞれの面に対応する DS-knot として読み取れる。今の場合、二重分岐被覆の DS-diagram の作り方から、 k_{11} と k_{12} は同相な結び目である。 V_2 の core knots k_{21}, k_{22} も同様に DS-knot として読み取ることができる。DS-knot として表された結び目に対しては、その補空間の spine (あるいは T-DS-diagram) を [6] に示された方法で求めることができ、その双曲性などを調べることができる。このようにして上の core knots を調べてみると、 k_{1j} の補空間は M_{3_1} ($K_1(15, 11; 8)$ の補空間) であり k_{2j} の補空間は M_{2_2} ($K_1(5, 4)$ の補空間) であることが分かる。

同様の方法で図 3.1 の $p(-2, 3, 7)$ の二重分岐被覆を調べると、4 個の core knot の補空間はすべて M_{2_1} (figure eight knot の補空間) となっている。

いくつかの $(1, 1)$ -結び目の二重分岐被覆について調べてみたが、まだ core knot の補空間が $(1, 1)$ -結び目にならないものは発見されていない。そこで、次のような問題が考えられる。

問題 1. core knot の補空間は、レンズ空間の結び目補空間となるか？ あるいは、meridian disks をうまく選べばそのようになるか？ また、 $(1, 1)$ -結び目の二重分岐被覆に限ればどうだろうか？

3.3 core knot の Dehn 手術

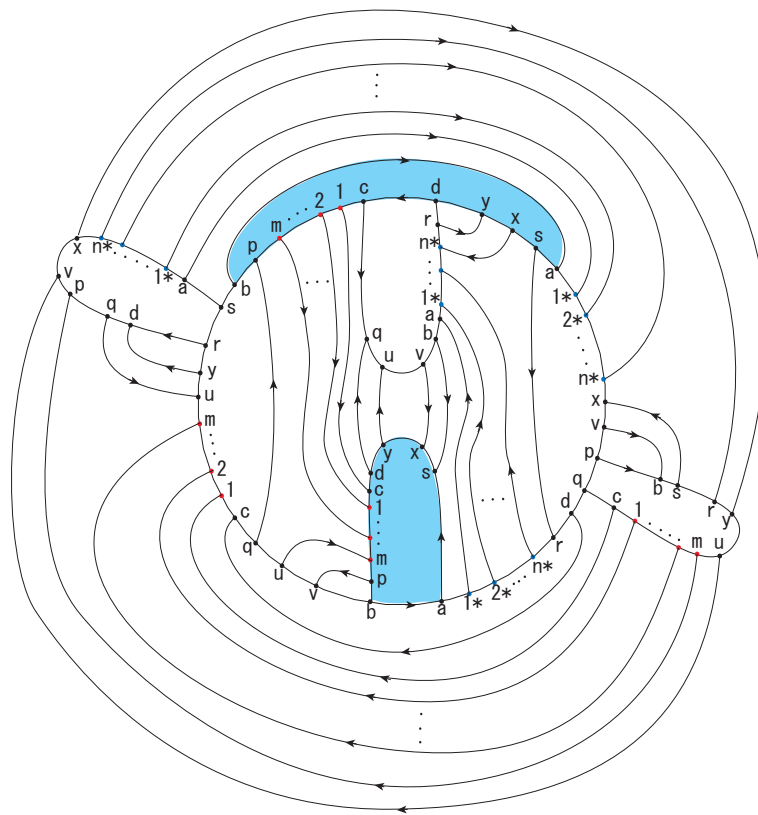


図 3.7: $M(m, n)$ の DS-diagram

2つの自然数 m, n に対して、図 3.7 に示したような block number 2 DS-diagram の

系列が得られる。頂点の名前は変わっているが、 $(m, n) = (1, 1)$ のときは、図 3.1 の $p(-2, 3, 7)$ の二重分岐被覆である。

図 3.7 DS-diagram が定める多様体を $M(m, n)$ とし、図中に色付けした面が表す core knot を $k(m, n)$ で表すことにする。自然数 n を一つ固定し、 $M(m, n) - k(m, n)$ および $M(m', n) - k(m', n)$ の T-DS-diagram を [6] の方法で求めると、まったく同一の T-DS-diagram が得られる。したがって、次が成り立つ。

定理 3.1. $M(m, n) - k(m, n)$ は $M(1, n) - k(1, n)$ と同相であり、これは $K_2(n, 1) \subset L(n, 1)$ の補空間と同相である。とくに、 $M(m, 1) - k(m, 1)$ は figure eight knot の補空間と同相、すなわち $M(m, 1)$ は figure eight knot の Dehn 手術で得られる多様体である。

任意の $(1, 1)$ -結び目について、その二重分岐被覆から派生する block number 2 DS-diagram の系列が得られ、その系列に対し上の定理と同様の結果が示される。このことについては、次回箱根セミナーで整理して報告したい。

参考文献

- [1] Callahan P.J., Hildebrand C.M., and Weeks J.R., A census of cusped hyperbolic 3-manifolds, *Math. of Computation*, vol. 68, no. 225 (1999), 321-332.
- [2] Endoh M. and Ishii I., A new complexity for 3-manifolds, *Japanese J. of Math.* 31 (2005), 131–156.
- [3] Koda, Y., A new classification of genus two 3-manifolds –parametrization and Reidemeister torsion–, 2005 年度慶應義塾大学修士論文.
- [4] Matveev S. and Fomenko A., Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic 3-manifolds, *Russian Math. Surveys* 43 (1988), 3-24.

- [5] Matveev S., Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, A.C.M. vol.9, Springer (2003).
- [6] 石井一平, 結び目補空間の組合せ構造と幾何構造, HAKONE SEMINAR 30 (2014), 35–73.
- [7] 石井一平, $(-2, 3, 7)$ pretzel knot の理想四面体分割について, HAKONE SEMINAR 31 (2015), 11–44.
- [8] 井上俊太郎, Combinatorial classification of genus 2 three-dimensional manifolds, 2010 年度慶應義塾大学修士論文.
- [9] 大塚昭嘉, block number 2 の DS-diagram, 2004 年度上智大学修士論文.
- [10] 山下正勝, Block number 2 の 2 種類の DS 図 について, HAKONE SEMINAR 29 (2013), 15–32.