$(-2,3,7)$ pretzel knot の理想四面体分割について

— HAKONE SEMINAR 2014 での誤り訂正とともに —

石井 一平

ここでは、HAKONE SEMINAR 2014 の私の記事（[3]）の §4.2 における誤りを訂正しつつ、$(-2,3,7)$ pretzel knot $p(-2,3,7)$ の理想四面体分割を再考察し、pretzel knot $p(-2,3,7)$ の補空間は 2 種類の方法で 3 個の理想四面体に分割されることを示す。用語は [3] のものを踏襲する。

1 $S^3 - p(-2,3,7)$ の理想四面体分割 I

この節では、$p(-2,3,7)$ の補空間の第一の理想四面体分割を示す。実は、この分割は [3] の中で非双曲的結び目の補空間と報告したもので、これは誤りであった。

1.1 T-DS-diagram $T\Delta_1$

図 1.1 に示された T-DS-diagram（トーラス上の DS-diagram、[3] 参照）を $T\Delta_1$（これは [3] の 図 4.2 と同一のものである）とする。この分節では、$T\Delta_1$ が hyperbolic cusped manifold を表すことを示し、[3] の誤りの訂正とする。T-DS-diagram から理想四面体分割を導く方法は [3] §2.4 に示した通りである。

$T\Delta_1$ は 3 つの頂点 p, q, 4 を持つので、これらの頂点に四面体 T_p, T_q, T_4 を割り当て、これらが理想四面体であると仮定して、それぞれが 図 1.2 に従って複素パラメタ x, y, z でパラメタ付けされるものとする。このとき、T_p, T_q, T_4 それぞれの切頭三角形と T-DS-diagram $T\Delta_1$ との関係は 図 1.3,1.4,1.5 と読み取れる（図 1.2–1.5 の読み方は、やはり [3] §2.4 を参照）。ただしここで、$x_1 = x$, $x_2 = (x-1)/x$, $x_3 = 1/(1-x)$（y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 も同様）であることは [3] で述べた通りである。

上のようなパラメタ付けによって、$T\Delta_1$ の各面 X, Y, Z での gluing equations は

$$X : x_3^2 y_2^2 y_3 z_2^2 z_3 = 1\,, \quad Y : x_2 y_1 y_3 z_1 z_3 = 1\,, \quad Z : x_1^2 x_2 y_1 z_1 = 1 \tag{1.1}$$

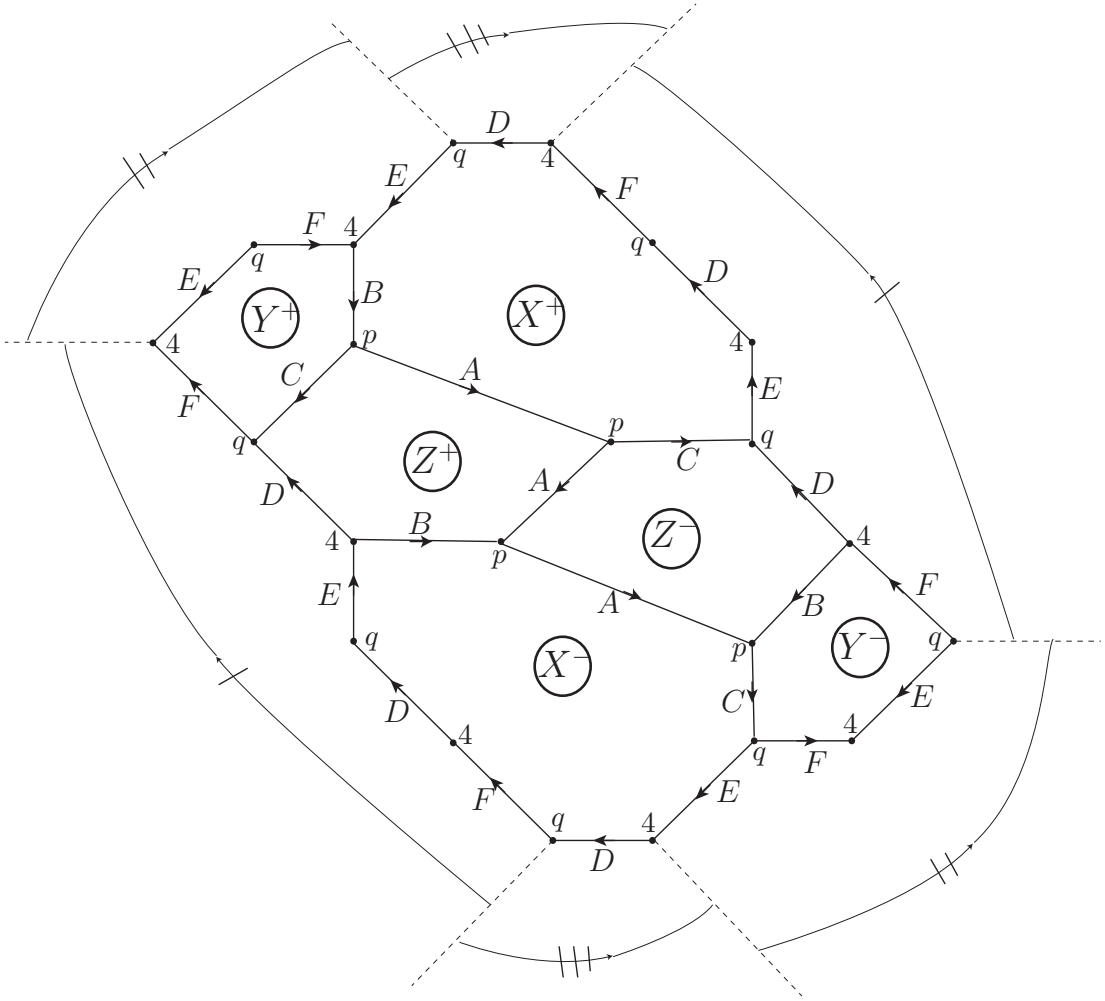

図 1.1: T-DS-diagram $T\Delta_1$

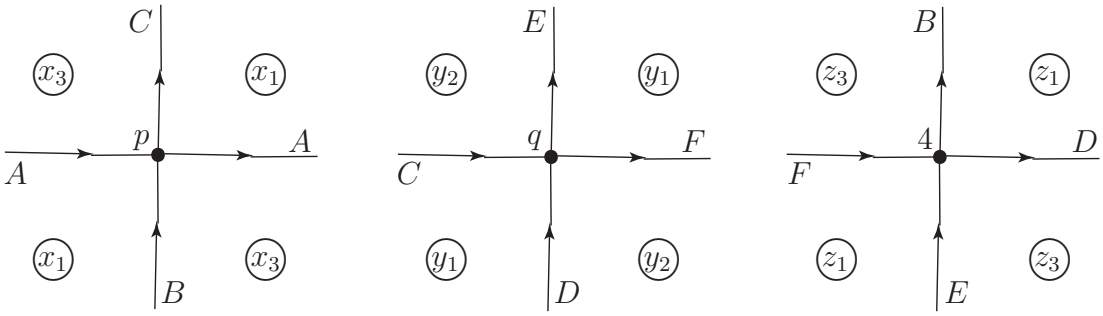

図 1.2: T_p, T_q, T_4 のパラメタ付け

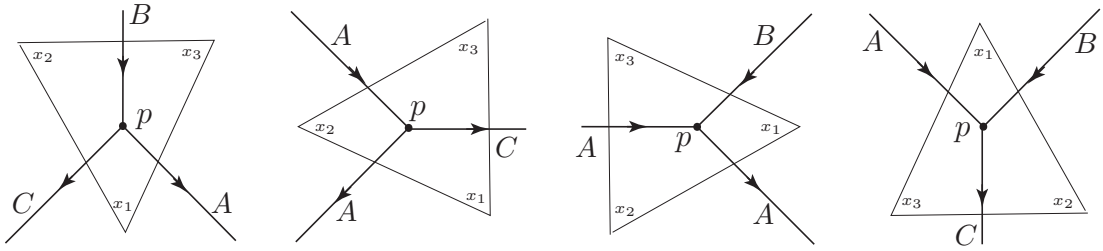

図 1.3: T_p の切頭三角形

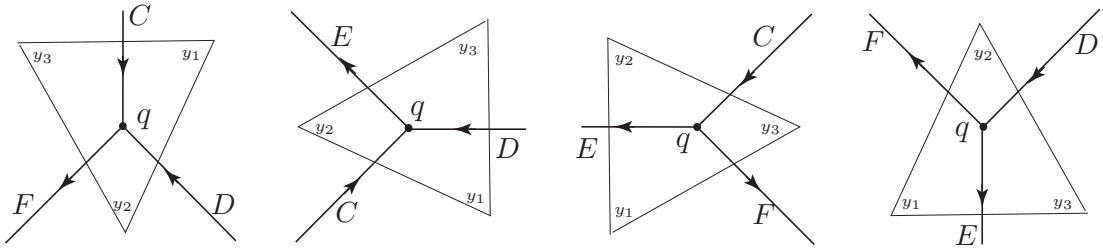

図 1.4: T_q の切頭三角形

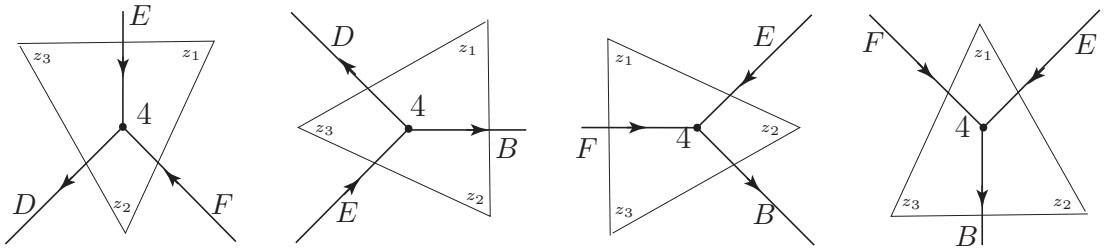

図 1.5: T_4 の切頭三角形

で与えられる。

次に holonomy を記述するために、$T\Delta_1$ 上に二つの単純閉曲線 μ, ν をそれぞれ 図 1.6 および 図 1.7 で与える。このとき、holonomy conditions は

$$H_\mu \equiv -(-(\frac{1}{y_3}\frac{1}{z_2}\frac{1}{x_3})x_1z_1) = 1\,, \quad H_\nu \equiv -(-(-(y_2x_3^2)\frac{1}{z_1}\frac{1}{y_1})\frac{1}{y_3}\frac{1}{z_1}) = 1 \tag{1.2}$$

となる。方程式 (1.1) および (1.2) が x, y, z の虚部がすべて正であるような解を持てば、$T\Delta_1$ が hyperbolic cusped manifold を表すことになる。

少し冗長になるが、(1.1), (1.2) を解いてみよう。ここで、

$$x_1x_2x_3 \;=\; y_1y_2y_3 \;=\; z_1z_2z_3 \;=\; -1 \tag{1.3}$$

が成り立ち、(1.1) 中の条件 X は Y および Z から導かれることに注意しておく。

まず、holonomy condition $H_\nu = 1$ と gluing equation Y $(1/(z_1y_1y_3) = x_2z_3)$ から

$$-y_2x_3^2x_2z_3\frac{1}{z_1} = 1 \tag{1.4}$$

が導かれ、これに再び gluing equation Y $(1/z_1 = x_2y_1y_3z_3)$ を適用すれば

$$1 = -y_1y_2(x_1x_2x_3)^2z_3 = -y_1y_2z_3 = \frac{z_3}{y_3} \tag{1.5}$$

が得られる。したがって、$\mathrm{Im}(z) > 0$, $\mathrm{Im}(y) > 0$ により $z = y$ が成り立つ。 以上により、方程式 (1.1), (1,2) は

$$z = y\,, \quad Y' : x_2 = y_2^2\,, \quad Z' : x_1^2x_2y_1^2 = 1\,, \quad H_\mu = \frac{x_1y_1}{x_3y_2y_3} = 1\,. \tag{1.6}$$

と同等であることがわかる。

条件 Y' および Z' より

$$x_1^2 = \frac{1}{x_2 y_1^2} = \frac{1}{(y_1 y_2)^2} = y_3^2 \tag{1.7}$$

が得られ、$\mathrm{Im}(x) > 0$, $\mathrm{Im}(y) > 0$ により $x_1 = y_3$ が従う。

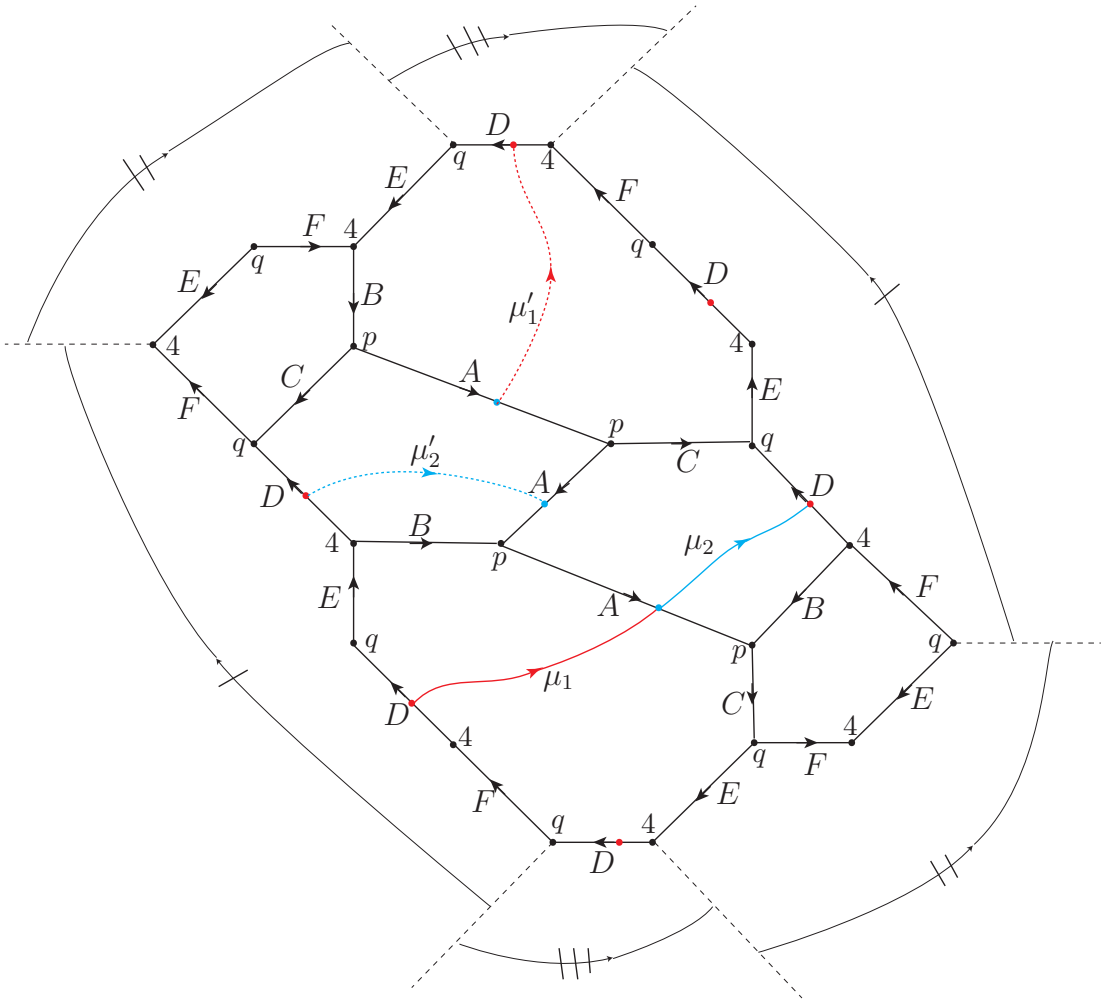

図 1.6: the loop $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$

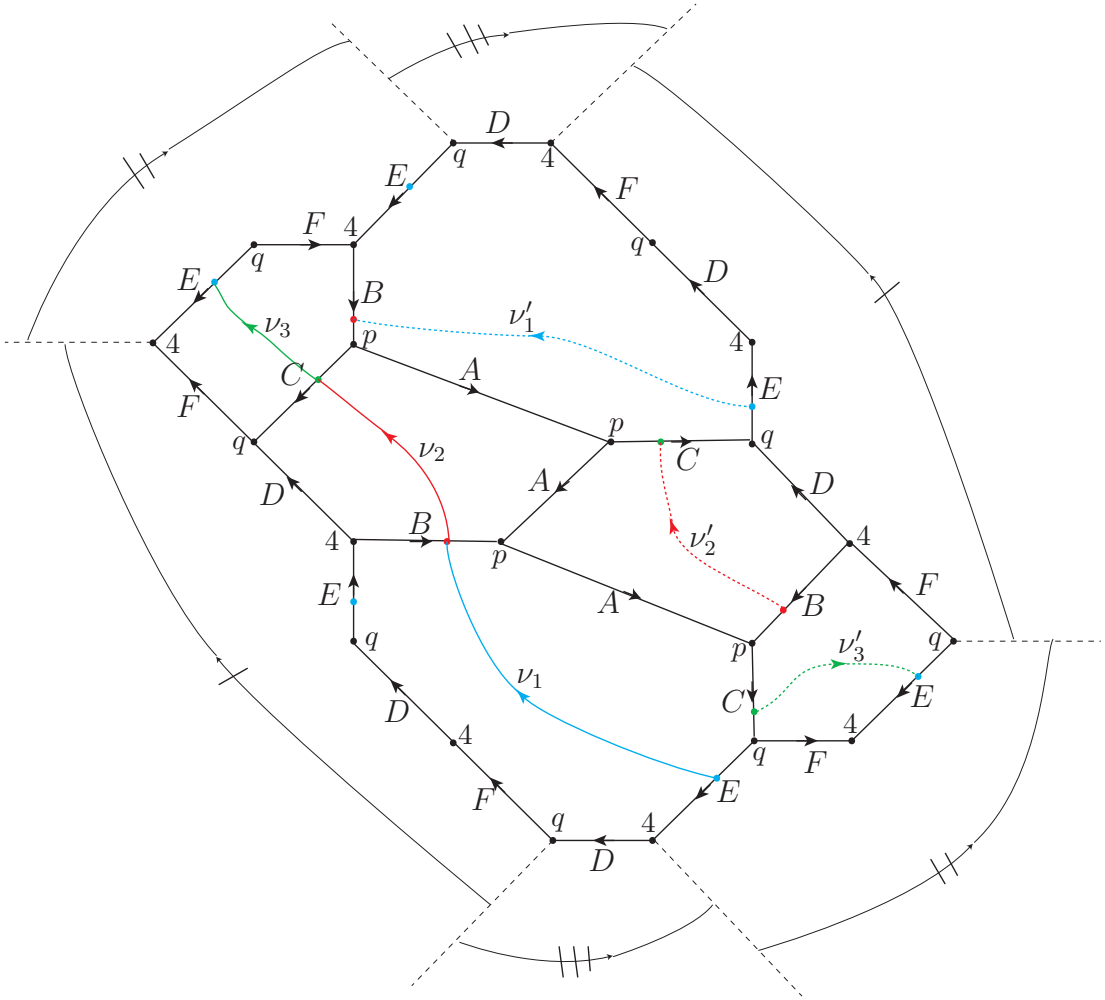

図 1.7: the loop $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3$

さらに、(1.3) と 条件 Y' は

$$-\frac{1}{x_3} = x_1 x_2 = y_3 y_2^2 \,. \tag{1.8}$$

を導く。$x_1 = y_3$ と (1.8) から holonomy condition $H_\mu = 1$ が導かれることが次のように示される。

$$H_\mu \equiv \frac{x_1 y_1}{x_3 y_2 y_3} = -\frac{y_3 y_1 (y_3 y_2^2)}{y_2 y_3} = -(y_1 y_2 y_3) = 1 \,.$$

また、$x_1 = y_3$ によって, 条件 Y' は $y^3 = (1-y)^2$ に帰着され、gluing equations と holonomy conditions の唯一つの解が

$$x = \frac{1}{1-y}\,, \quad z = y\,, \quad y^3 - y^2 + 2y - 1 = 0 \quad (\mathrm{Im}(y) > 0) \tag{1.9}$$

と求められた。これで、$T\Delta_1$ が cusped hyperbolic manifold $W(T\Delta_1)$ を定めることが示された。[3] §2 の記法では $W(T\Delta_1) \simeq 2T(0,1,y,\infty) + T(0,1,x,\infty)$ と表され、さらに $x = 1/(1-y)$ より $T(0,1,x,\infty) \equiv T(0,1,y,\infty)$ であるから、

$$W(T\Delta_1) \simeq 3T(0,1,y,\infty)\,, \quad y^3 - y^2 + 2y - 1 = 0 \quad (\mathrm{Im}(y) > 0) \tag{1.10}$$

となる。

1.2 $W(T\Delta_1)$ が $p(-2,3,7)$ の補空間であることの確認

一般に T-DS-diagram $T\Delta$ に slope γ を与えたとき、$T\Delta$ が表すトーラスを境界とする多様体に γ を meridian とするハンドル体を貼り付ける Dehn 充填で得られる閉多様体を $M(T\Delta,\gamma)$ で表すことにする。T-DS-diagram $T\Delta$ から $M(T\Delta,\gamma)$ の DS-diagram を得る方法は [3] §3 に示された通りである。

1.2.1 $M(T\Delta_1,\mu)$ の DS-diagram

閉多様体 $M(T\Delta_1,\mu)$ の DS-diagram は容易に求まり、それは 図 1.8 で与えられる。この DS-diagram を Δ_1 とし、これが表す閉多様体を $M(\Delta_1)$ とすると、$M(\Delta_1) = S^3$ であることも容易に検証される。図 1.8 に示された面 α（図中の α^+ と α^- を貼り合せた spine の面）に対する DS-knot を $k(\alpha)$ とすると、$T\Delta_1$ が $\overline{S^3 - N(k(\alpha))}$ の spine を与えている。すなわち、DS-diagram Δ_1 から α^+ と α^- を貼り合せて得られる T-DS-diagram が $T\Delta_1$ となっている。

1.2.2　$k(\alpha) \subset S^3$ の $(1,1)$-表示

結び目 $k(\alpha)$ の結び目図式を得るために、Δ_1 に $M(\Delta_1)$ を不変にする変形を施す。変形を施した結果が 図 1.9 の DS-diagram Δ_1' である。変形の詳細は省略するが、この変形で多様体は不変である。、さらにこの変形が結び目 $k(\alpha)$ に触らずに実行されるため、図 1.9 中に着色した面（この面も同じ記号 α で表す）が表す DS-knot が元の $k(\alpha)$ そのものであることがわかる。

Δ_1' から次のようにして $S^3 = M(\Delta_1')$ の種数 1 の H-分解（Heegaard 分解）を読み取ることができる。まず、3-球体 $\mathbb{B}^3$ の境界 $\partial\mathbb{B}^3$ 上に Δ_1' が描かれているとし、3-球体の proper な 2 次元円板 Σ を 図 1.10 の $\partial\Sigma$ を境界とするようにとる。　この Σ に

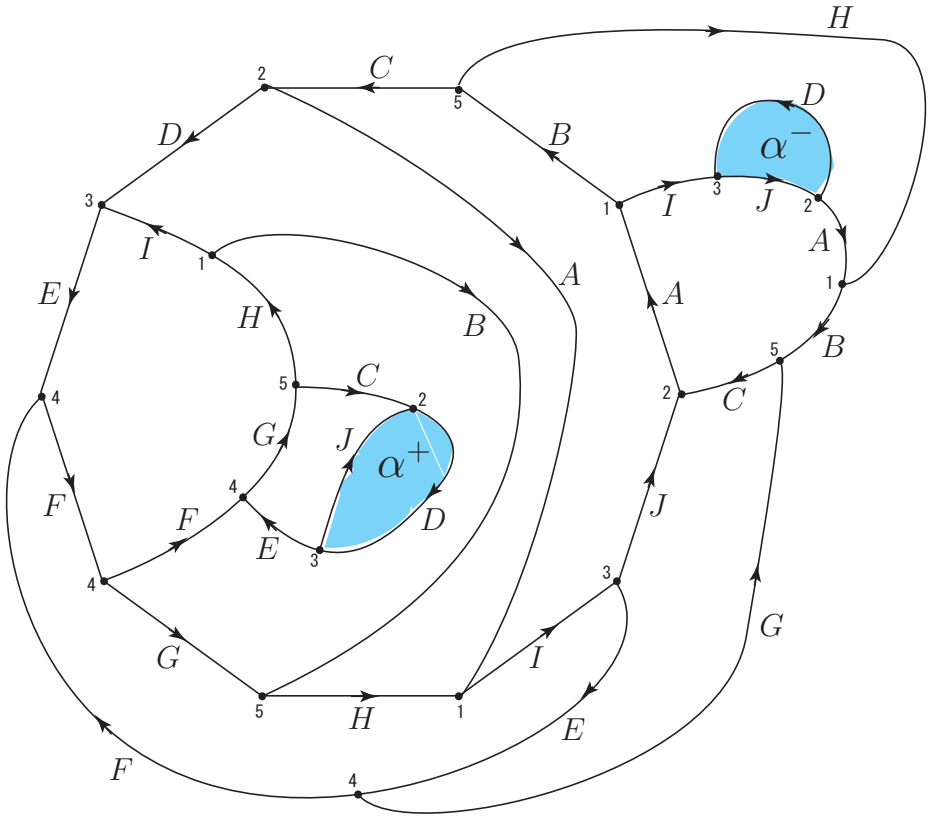

図 1.8: $M(T\Delta_1, \mu)$ の DS-diagram

よって、$\mathbb{B}^3$ は 2 つの 3-球体 B_1, B_2 に分割される（図 1.10 の内側を B_1 とする）。∂B_k

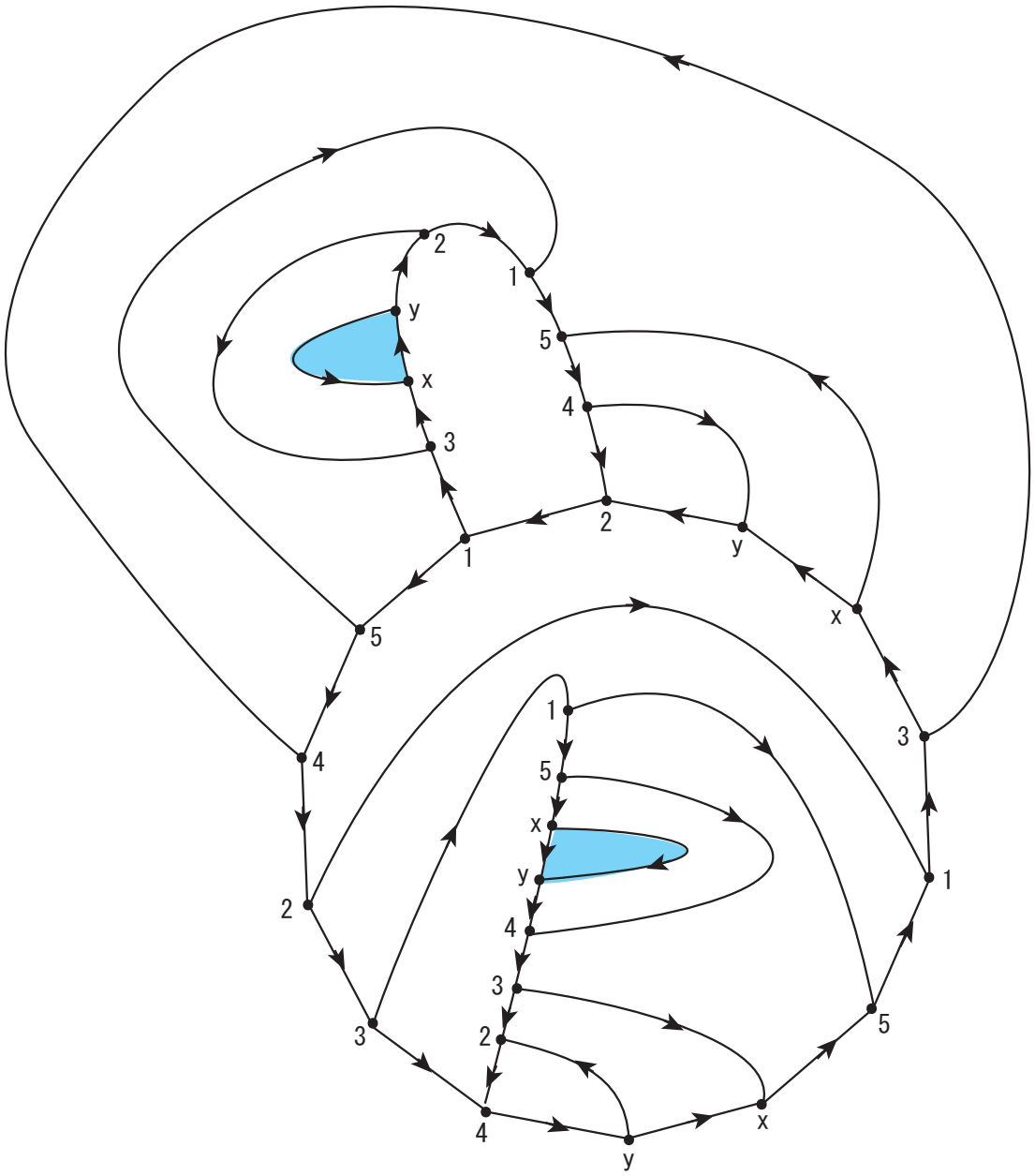

図 1.9: DS-diagram Δ_1'

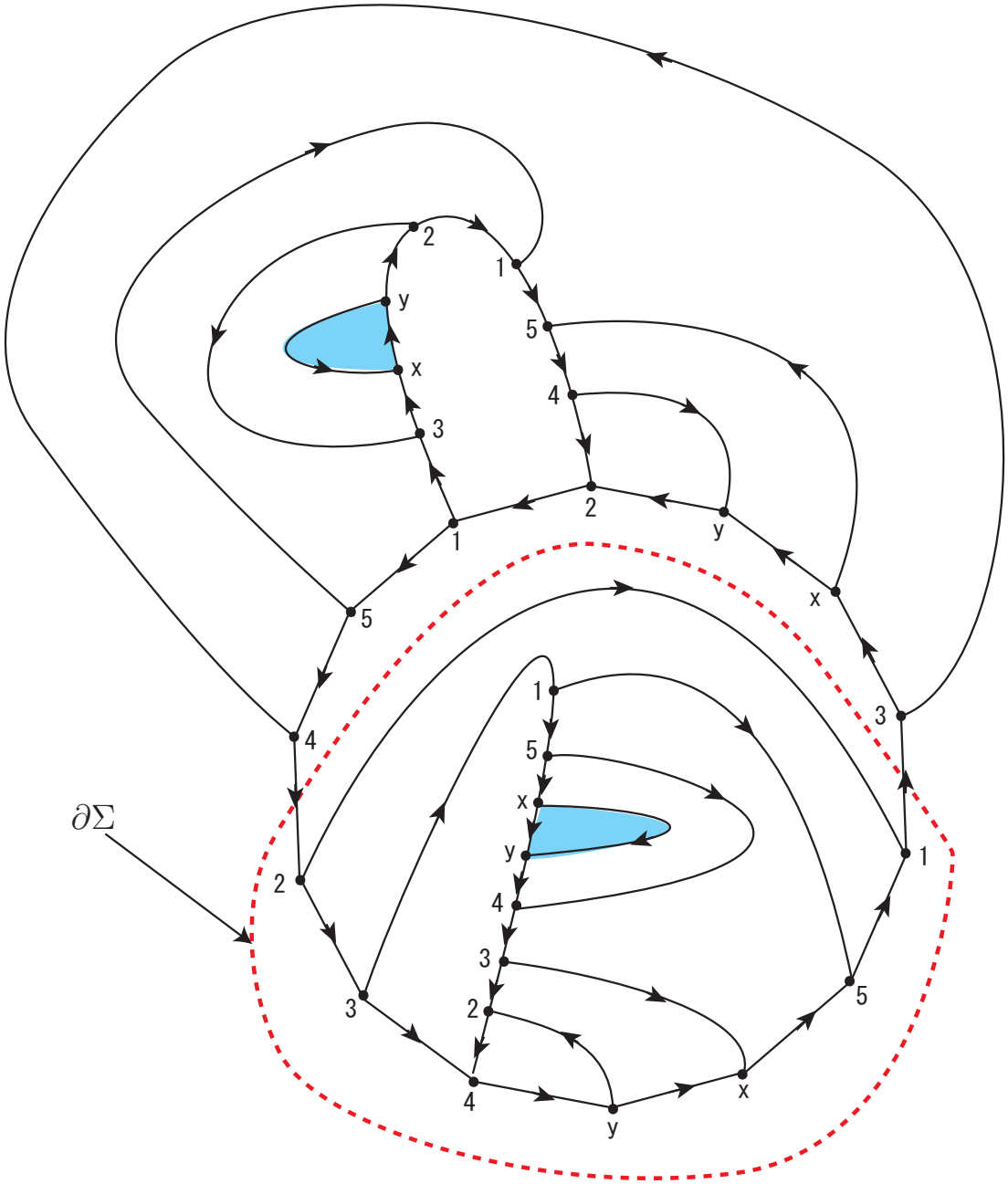

図 1.10: Δ_1' 上の H-分解を与える loop $\partial\Sigma$

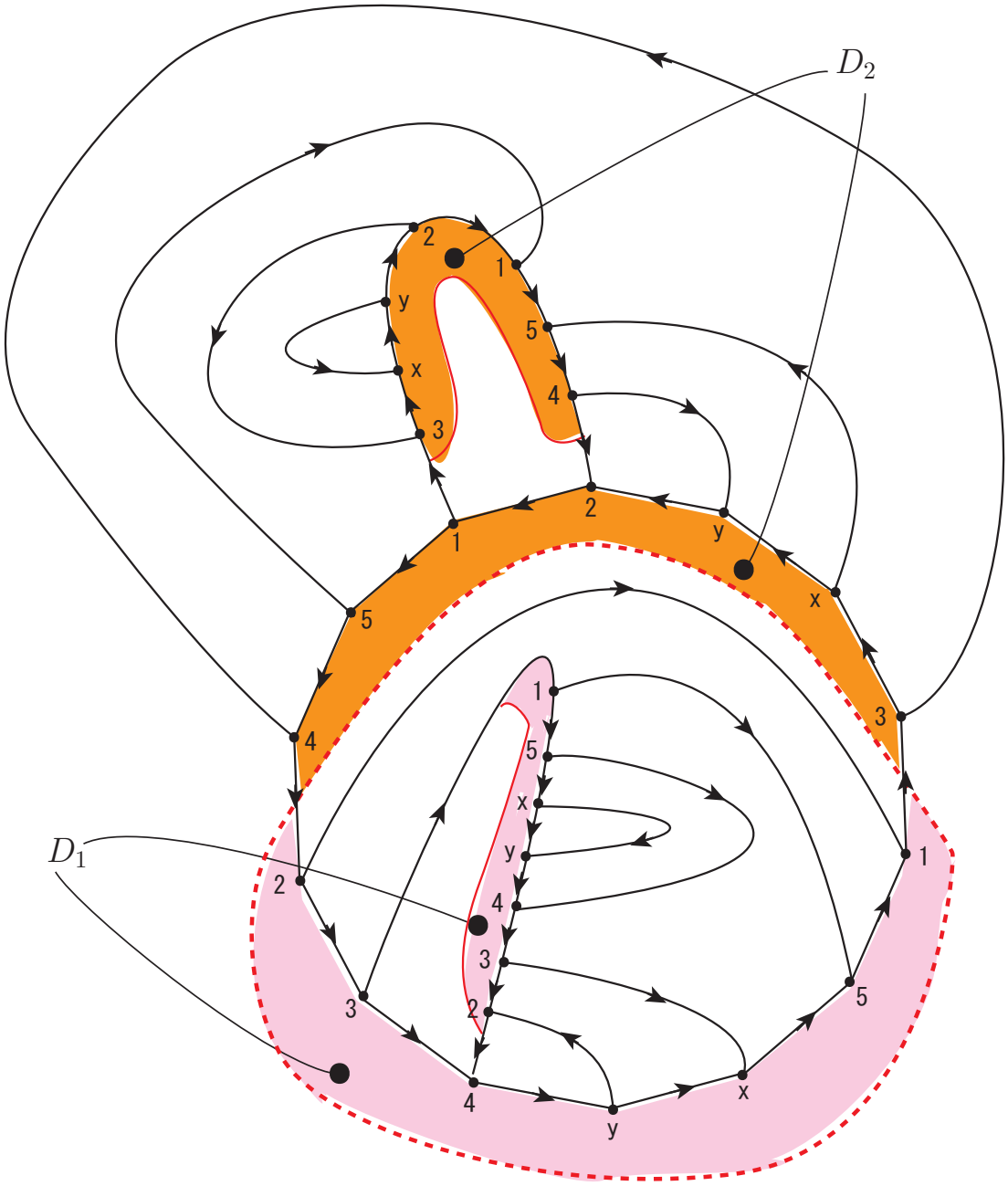

図 1.11: DS-diagram Δ_1' が定める H-分解の meridian disks

$(k=1,2)$ は 図 1.11 に示された D_k が同一視されるので、この同一視で貼り合せた $V_k = B_k/\sim (k=1,2)$ はそれぞれソリッドトーラスとなり、(V_1, V_2) が S^3 の H-分解を与えている。さらに、Δ_1' が表す spine を $P(\Delta_1')$ とすると

$$P(\Delta_1') \ = (\partial V_k \cup D_1 \cup D_2) - \Sigma$$

となっていて、V_1, V_2 の meridian disk としてそれぞれ D_1, D_2 をとったときの H-図式（Heegaard diagram）が Δ_1' によって与えられている。

DS-knot $k(\alpha)$ と H-分解 (V_1, V_2) の関係を調べてみると、$k(\alpha)$ と ∂V_k の交わりは $P(\Delta_1')$ の面 α との交わり a と Σ との交わり σ の 2 点であり、$k(\alpha) - \{a, \sigma\}$ の 2 つの弧はそれぞれ V_1, V_2 の中で自明な弧となっている。すなわち、H-分解 (V_1, V_2) は結び目 $k(\alpha)$ の $(1,1)$-表示を与えている。

1.2.3 $k(\alpha)$ の結び目図式

前分節 §1.2.2 で調べたことを図示することによって、$k(\alpha)$ の結び目図式が自然に得られることを見てみよう。

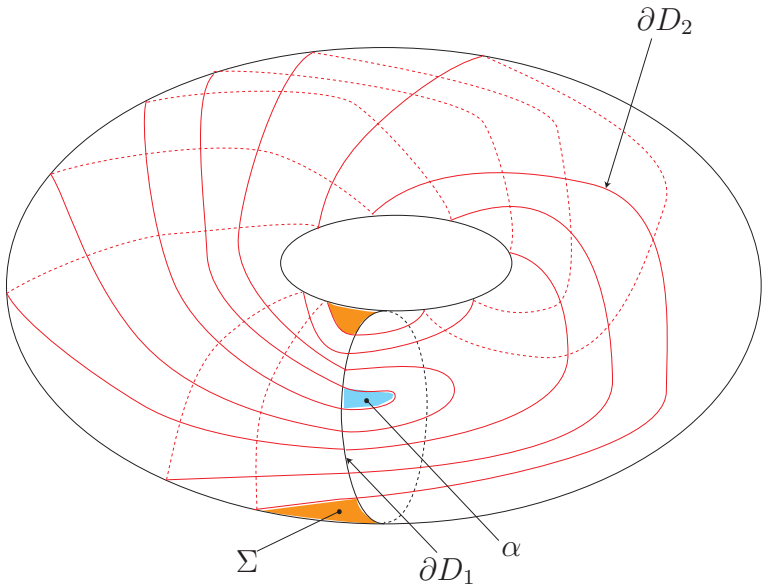

図 1.12: ∂V_1 上に描いた H-図式

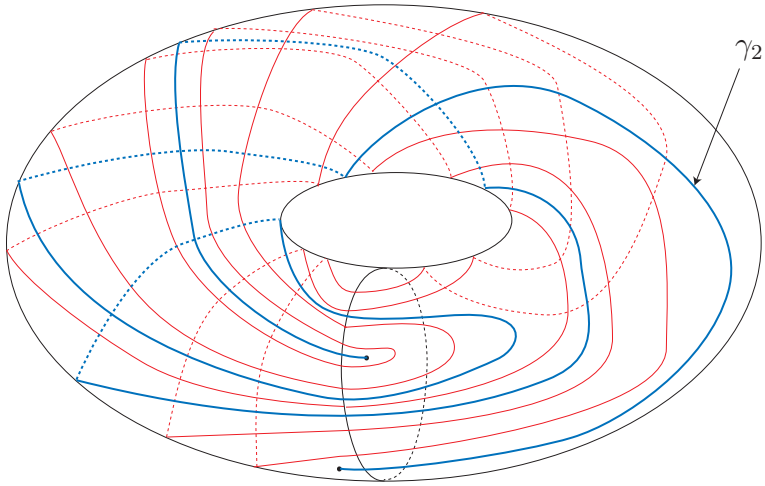

図 1.13: $k(\alpha) - \{a, \sigma\}$ の一つの弧 $\gamma_2 \subset V_2$

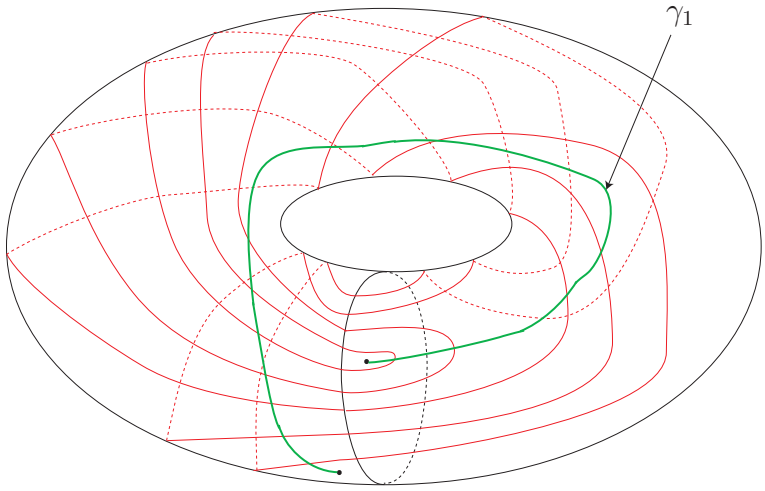

図 1.14: $k(\alpha) - \{a, \sigma\}$ のもう一つの弧 $\gamma_1 \subset V_1$

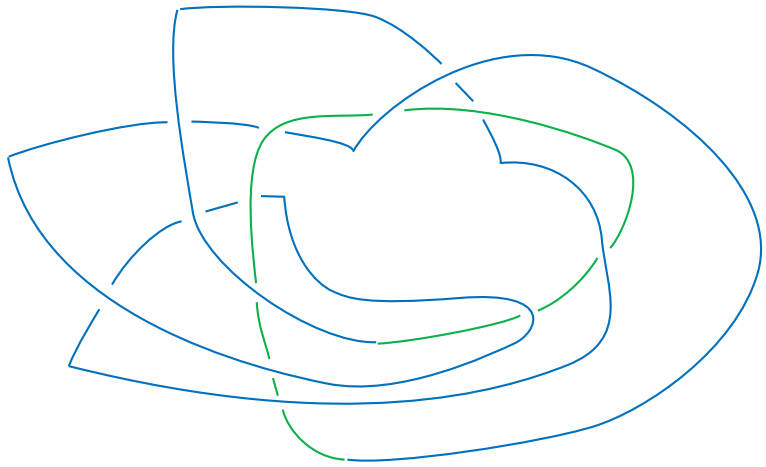

図 1.15: $k(\alpha)$ の結び目図式

まず、ソリッドトーラス V_1 を $\mathbb{R}^3$ 内に標準的に置き、DS-diagram Δ_1' を用いて ∂V_1 上に ∂D_2 を描く（図 1.12）。このとき注意するのは、∂D_2 が $\mathbb{R}^3 - V_1$ で円板を張るように、すなわち ∂D_2 と V_1 の中心線との絡み数が 0 となるように、描くことである（実は、[3] においてはこれを間違って誤った結論を導いてしまった）。

次に、$k(\alpha) - \{a, \sigma\}$ の二つの弧 $\gamma_k \subset V_k$ $(k = 1, 2)$ を描く。γ_2 は 2 点 a, σ を結ぶ ∂V_1 上の ∂D_2 とは交わらない弧としてよい（図 1.13）。γ_1 は V_1 の内部で 2 点 a, σ を D_1 と交わらないように結ぶ ∂V_1 と平行な弧としてとる（図 1.14）。こうして描かれた $\gamma_1 \cup \gamma_2$ から V_1 を取り去れば（図 1.15）、$k(\alpha)$ の結び目図式が姿焼きになって浮かび上がる。

図 1.15 の図式はライデマイスター移動で簡単に交差点数を 12 まで落とせる。それが $p(-2, 3, 7)$ の結び目図式であることも確認できる。

1.3 $T\Delta_1$ のレンズ空間を生成する Dehn 充填

前節に示したように slope μ での Dehn 充填は $M(T\Delta_1, \mu) = S^3$ である。この slope の他にレンズ空間を生成する slope が 2 つあることが知られている。この 2 つの slope

とは 図 1.7 の ν と、次の 図 1.16 に示す λ である。実際、

$$M(T\Delta_1, \mu) = S^3\,,\ \ M(T\Delta_1, \nu) = L(18, 5)\,,\ \ M(T\Delta_1, \lambda) = L(19, 7)$$

であることを示すことができる。このことは、[3] §3 の方法で DS-diagram を構成し、

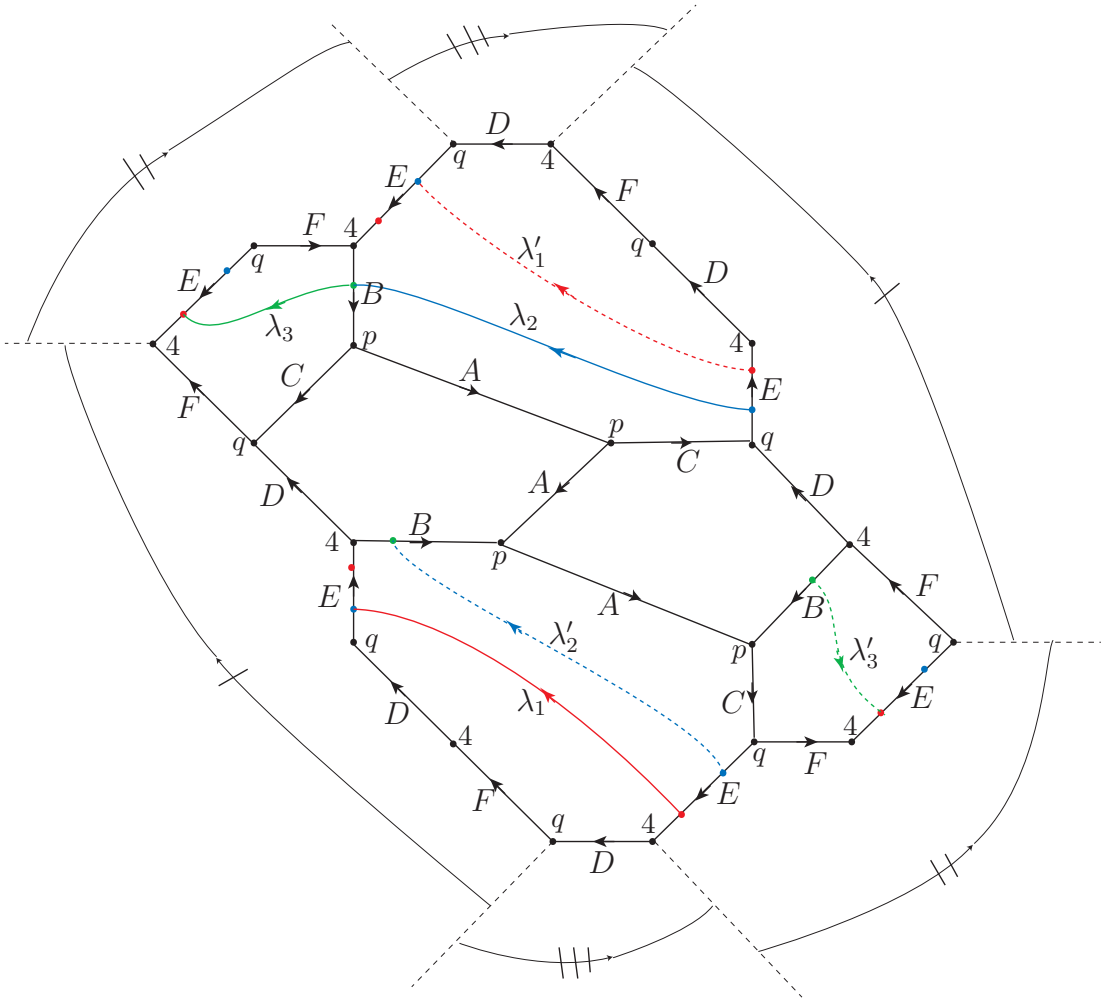

図 1.16: slope $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$

それをレンズ空間の標準形まで変形することによって示される。しかし、DS-diagram の変形はいかにも冗長な図の羅列になるので、ここでは $\pi_1(M(T\Delta_1, \lambda)) = \mathbb{Z}_{19}$ を確認する方法を示すに留める。

1.3.1 $\pi_1(M(T\Delta_1,\lambda)) = \mathbb{Z}_{19}$ の確認

[3] §3 の方法で構成される $M(T\Delta_1,\lambda)$ の special spine（DS-diagram）$P \equiv P(T\Delta_1,\lambda)$ を考える（想像する）。P の頂点は $T\Delta_1$ の頂点に、λ と辺 B との交点および辺 E との 2 つの交点を付け加えた合計 6 点、P の辺は λ_k $(k=1,2,3)$ が付け加わり、さらに辺 B は B_1, B_2 に、辺 E は E_1, E_2, E_3 に分割される。P の特異点集合 $S(P)$ は, 上に述べた 6 個の頂点と辺 A, B_1, B_2, C, D, E_1, E_2, E_3 F, λ_1, λ_2, λ_3 からなる 4 正則グラフである。special spin P による胞体分割から、標準的な方法で基本群の表示を求める。

まず、グラフ $S(P)$ の極大木として B_1, B_2, C, λ_2, λ_3 を選び、残りの有向辺（これらを小文字で a, d, f, e_1, e_2, e_3, λ_1 と表す）を生成元とする。これらの生成元の間の関係は P の面によって与えられる。P の面は $T\Delta_1$ の面 Z、X が分割されてできる 3 つの面（X_1, X_2, X_3）、Y が分割されてできる 2 つの面（Y_1, Y_2）、および λ_1, λ_2, λ_3 に囲まれる面（Λ で表す）である。これらの面による関係を書き上げると

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda) : \lambda_1 = 1 \\
&(X_1) : ae_1 = 1\,, \quad (X_2) : e_2\lambda_1 e_2 e_3 = 1\,, \quad (X_3) : e_3 d f d e_1 = \lambda_1 \\
&(Y_1) : e_1 e_2 = f\,, \quad (Y_2) : e_3 = f \\
&(Z) : da^2 = 1
\end{aligned}
$$

となる。関係 (Λ), (X_1), (Y_1), (Y_2), (Z) から

$$\lambda_1 = 1\,, \quad d = a^{-2}\,, \quad e_1 = a^{-1}\,, \quad e_2 = af\,, \quad e_3 = f$$

が導かれ、これを (X_2) と (X_3) に代入して

$$\pi_1(M(\lambda)) =< a,\, f \,|\, fa^{-2}fa^{-3},\, afaf^2 >$$

という表示が得られる。ここで、$u = af$ と置くと表示

$$\pi_1(M(\lambda)) =< u,\, f \,|\, f(fu^{-1})^2 f(fu^{-1})^3,\, u^2 f >$$

に変換される。さらに $f = u^{-2}$ であるから $\pi_1(M(\lambda)) =< u \,|\, u^{19} >\equiv \mathbb{Z}_{19}$ が結論される。

2　$S^3 - p(-2,3,7)$ の理想四面体分割 II

この節で扱うのは、[3] で hyperbolic cusped manifold $M3_7$ の T-DS-diagram であると報告したものである。[3] においては結果の報告だけであったので、改めて少しは詳しく報告する。

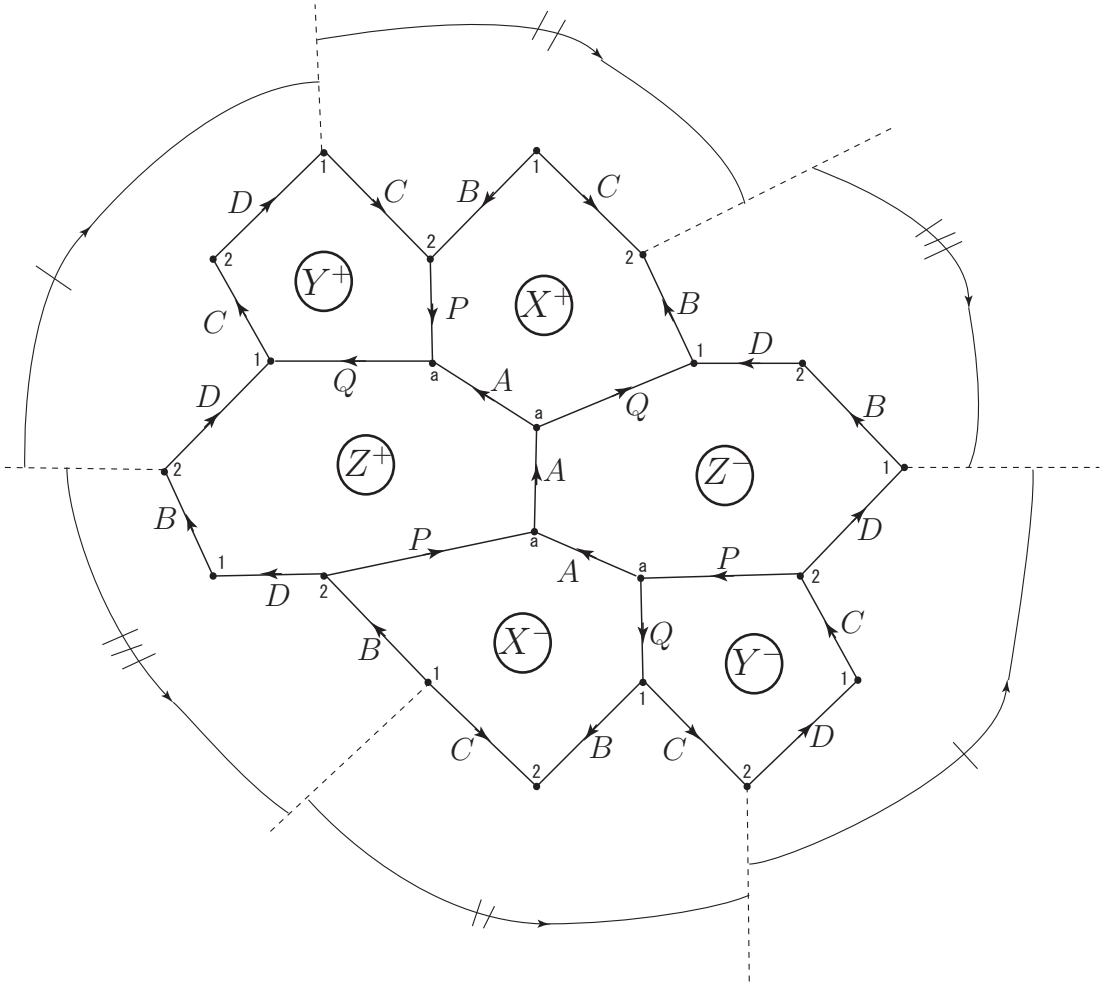

図 2.1: T-DS-diagram $T\Delta_2$

2.1 T-DS-diagram $T\Delta_2$

図 2.1 に示された T-DS-diagram を $T\Delta_2$ とする。これが cusped hyperbolic manifold $W(T\Delta_2)$ を定めることが §1 と同様に確かめられることを簡単に見てみる。まず、頂点 1, 2, a に対応する四面体を、それぞれ u, v, w で 図 2.2 に従ってパラメタ付けすると、gluing equations は

$$X\,:\,u_1u_2v_1v_2w_3^2=1\,,\quad Y\,:\,u_2u_3v_2v_3w_2=1\,,\quad Z\,:\,u_1u_2v_1v_2w_1^2w_2=1 \tag{2.1}$$

で与えられる。

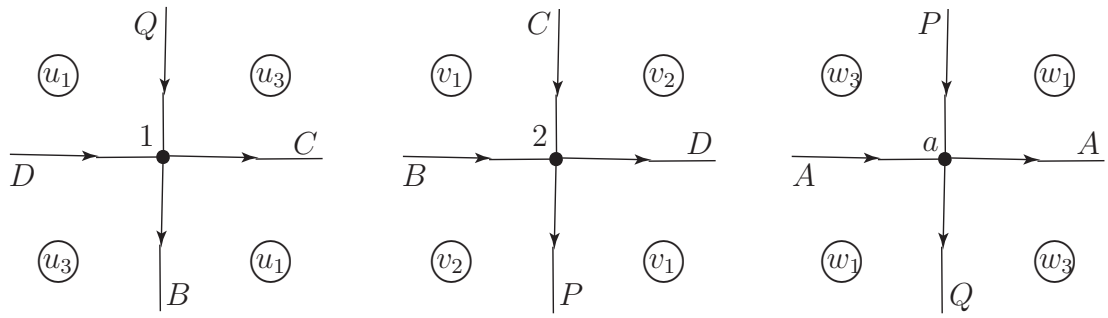

図 2.2: 頂点 1, 2, a に対応する四面体のパラメタ付け

次に、単純閉曲線 μ, λ を 図 2.3 および 図 2.4 で定めると、holonomy conditions は

$$H_\mu\equiv-(-(v_3u_1w_1w_2)w_3v_2)=1\,,\quad H_\lambda\equiv-(-(-(u_3v_3u_1)\frac{1}{w_3}\frac{1}{w_1})v_3u_2)=1 \tag{2.2}$$

と表される。方程式 (2.1), (2.2) を §1 と同様にして解くと

$$v=w=u\,,\quad u^3-u+1=0\quad(\mathrm{Im}(u)>0) \tag{2.3}$$

と唯一つの解が得られる。これから、

$$W(T\Delta_2)\simeq 3T(0,1,u,\infty)\,,\;\; u^3-u+1=0\;\;(\mathrm{Im}(u)>0) \tag{2.4}$$

が導かれる。

続く分節において示されるように $W(T\Delta_2)$ は $W(T\Delta_1)$ と同相であるから、剛性定理によって当然 $vol.(W(T\Delta_1))=vol.(W(T\Delta_2))$ が成り立つ筈である。ここで、(1.10) と (2.4) から両者の体積が等しいことを代数的に保証する次の事実に注意しておく。

注意 *1.* 二つの複素数 y, u が

$$y^3 - y^2 + 2y - y = 0 \ \ (\mathrm{Im}(y) > 0)\,, \quad u^3 - u + 1 = 0 \ \ (\mathrm{Im}(u) > 0)$$

を満たすとき、$y_2 \equiv (y-1)/y = 1/\overline{u}$ が成り立つ。

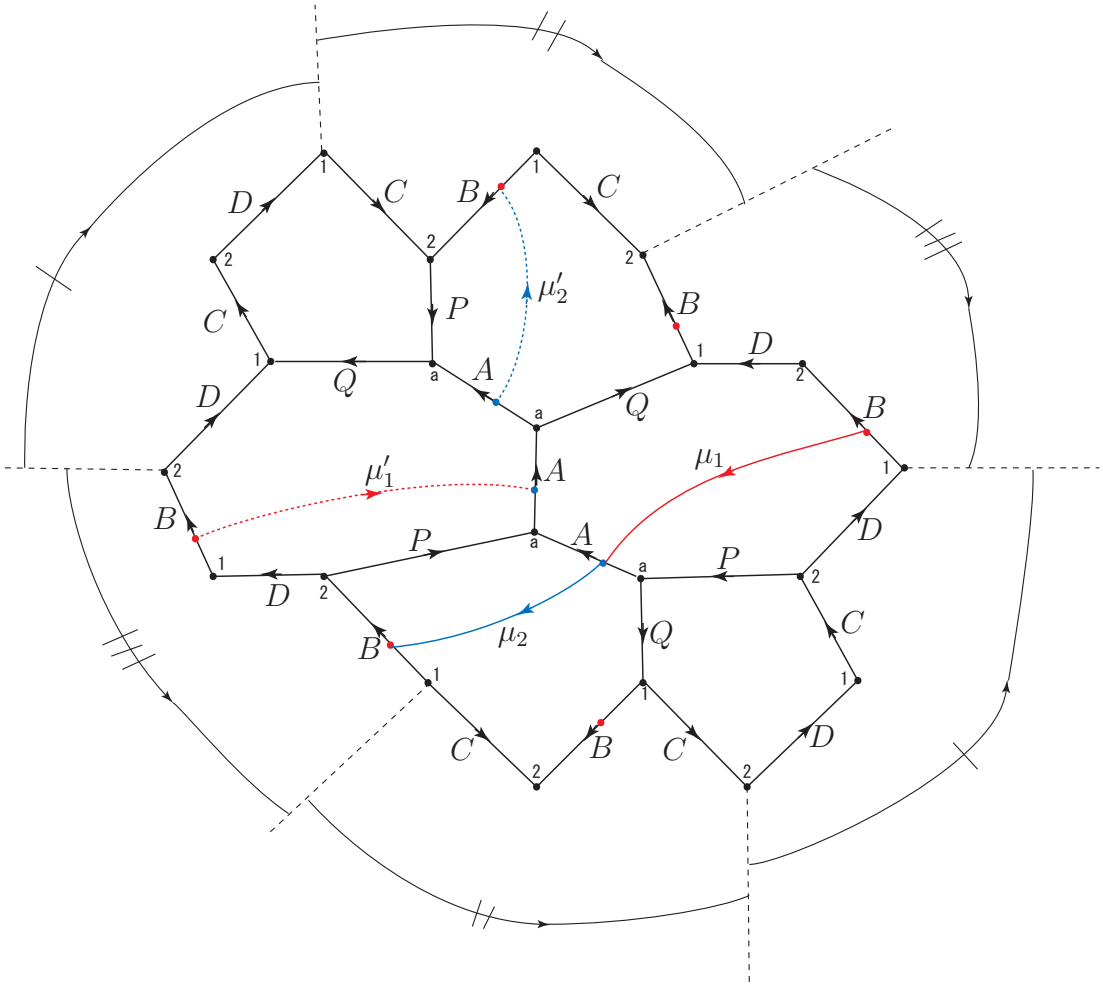

図 2.3: the slope $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$

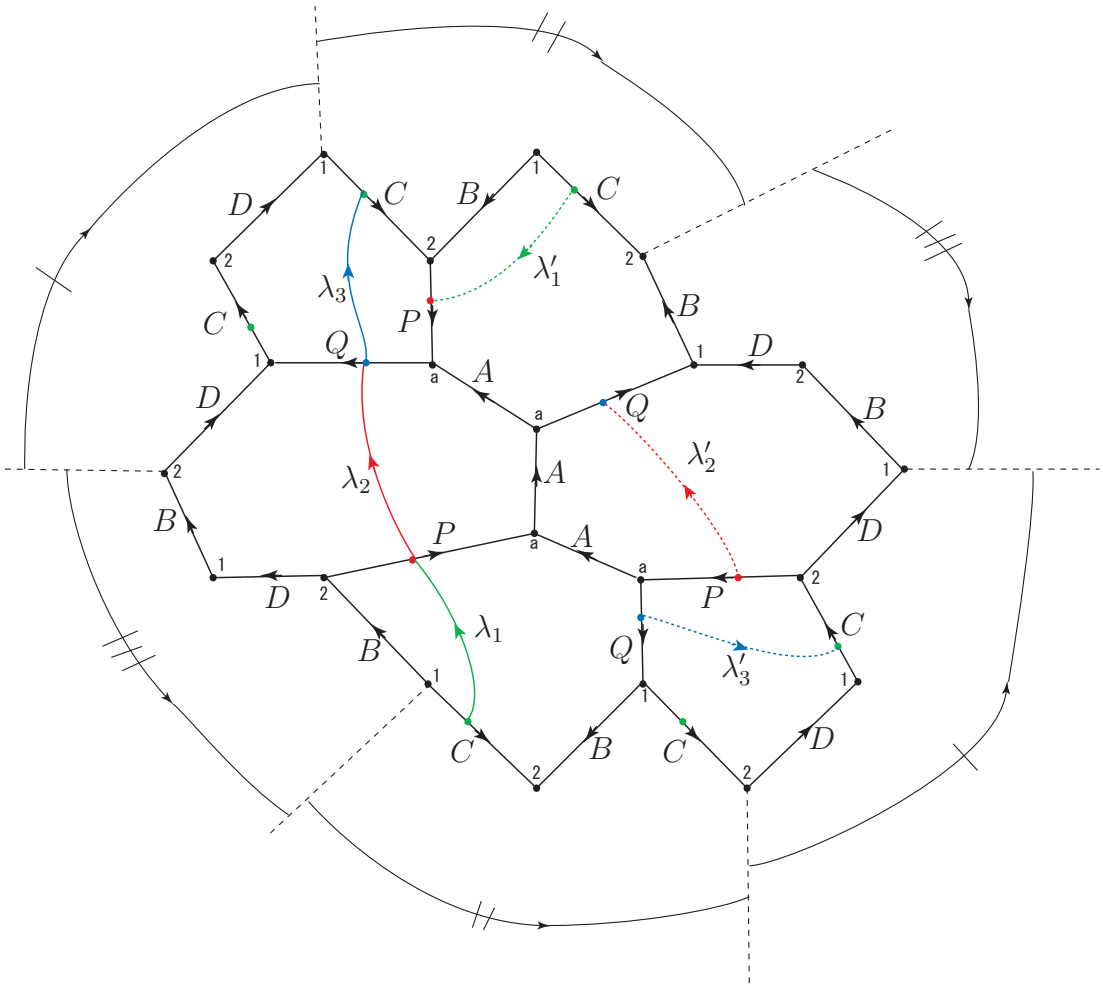

図 2.4: the slope $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$

2.2 $W(T\Delta_2)$ も $p(-2,3,7)$ の補空間であることの確認

$W(T\Delta_2)$ もまた $p(-2,3,7)$ の補空間であることが、§1.2 とまったく同様にして示すことができる。

2.2.1 $M(T\Delta_2, \mu)$ の DS-diagram

図 2.5 が $M(T\Delta_2, \mu)$ の DS-diagram Δ_2 であり、この図に着色して示した面 β の表す DS-knot を $k(\beta)$ とすれば。$k(\beta)$ の $M(T\Delta_2, \mu)$ における補空間が $W(T\Delta_2)$ となっている。$M(T\Delta_2, \mu) = S^3$ であることは容易に確かめることができる。

2.2.2 $k(\beta)$ の結び目図式

ここから $k(\beta)$ の結び目図式を求める道筋も \$1.2 とまったく同様である。まず、Δ_2 を Δ_2'（図 2.6）に変形する。すると、$S^3 = M(\Delta_2')$ の種数 1 の H-図式が得られる（図 2.8）。この DS-diagram Δ_2' に付随した H-図式により、DS-knot $k(\beta)$ の (1,1)-表示が求まる（図 2.8）。この (1,1)-表示は、そのまま $k(\beta)$ の結び目図式（図 2.9）を与える。この結び目図式も $p(-2, 3, 7)$ のものである。

2.3 Dehn 充填

$W(T\Delta_2) = W(T\Delta_1)$ であるから、$T\Delta_2$ 上にも Dehn 充填によってレンズ空間 S^3, $L(18, 5)$, $L(19, 7)$ をを与える slope が存在する。それらを具体的に与えておこう。二つの slope μ, λ は §2.2 で既に与えられたものとし、ν を 図 2.10 の slope とすると

$$M(T\Delta_2, \mu) = S^3\,, \;\; M(T\Delta_2, \nu) = L(18, 5)\,, \;\; M(T\Delta_2, \lambda) = L(19, 7)$$

が成り立つ。

3 切頭三角形が作る複素平面のモザイク模様

3.1 $W(T\Delta_1)$ の普遍被覆

双曲上半平面を $\mathbb{H}^3 = \{(\xi, \eta, t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t > 0\}$ とし、$\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1}$ によって (ξ, η)-平面を複素平面 $\mathbb{C}$ と見做す。さらに、$\mathbb{H}^3$ の理想境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の 4 点 0, 1, ζ, ∞ ($\zeta \in \mathbb{C}$) を頂点とする理想四面体を $T(\zeta)$ で表すことにする。

T-DS-diagram $T\Delta_1$ が表す cusped manifold $W(T\Delta_1)$ は、3 つの頂点 p, q, 4 に対する四面体 T_p, T_q, T_4 の面を $T\Delta_1$ の指定にしたがって貼り合せて構成されたものである。

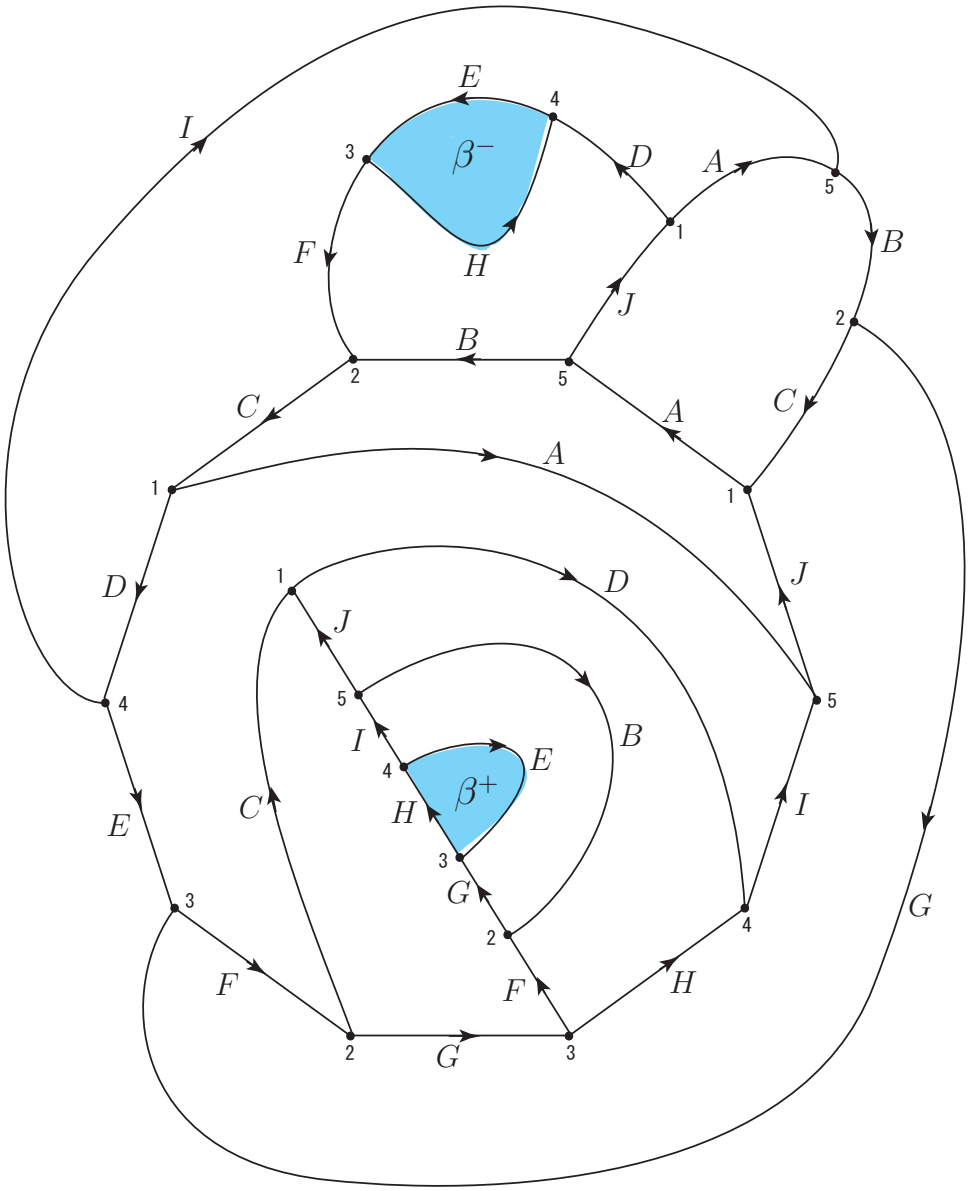

図 2.5: DS-diagram Δ_2

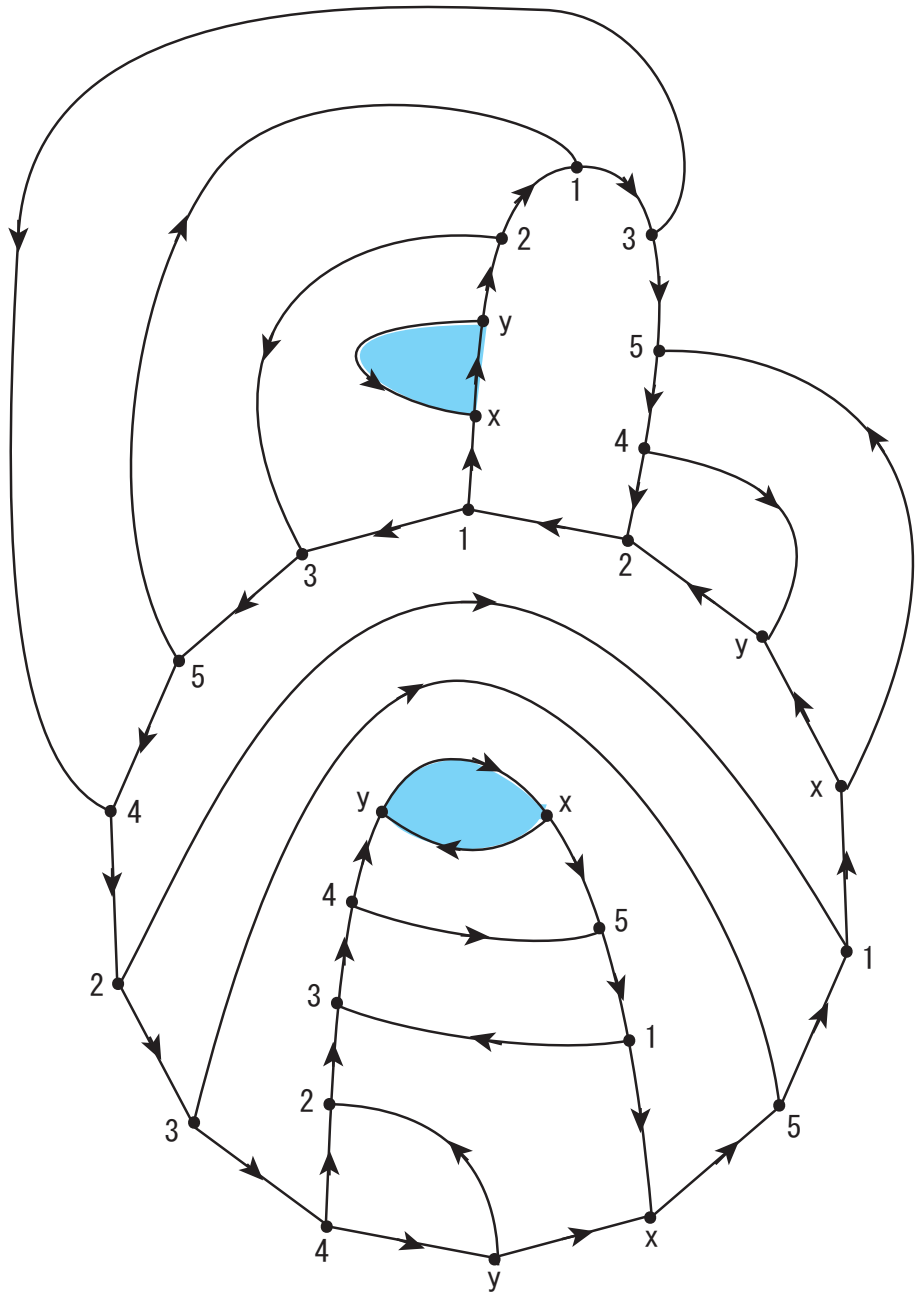

図 2.6: DS-diagram Δ_2'

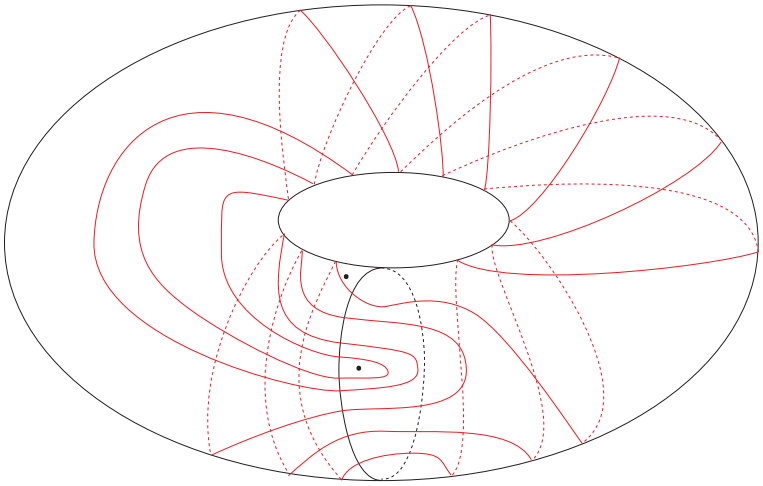

図 2.7: Δ_2' から定まる $S^3 = M(\Delta_2')$ の H-図式

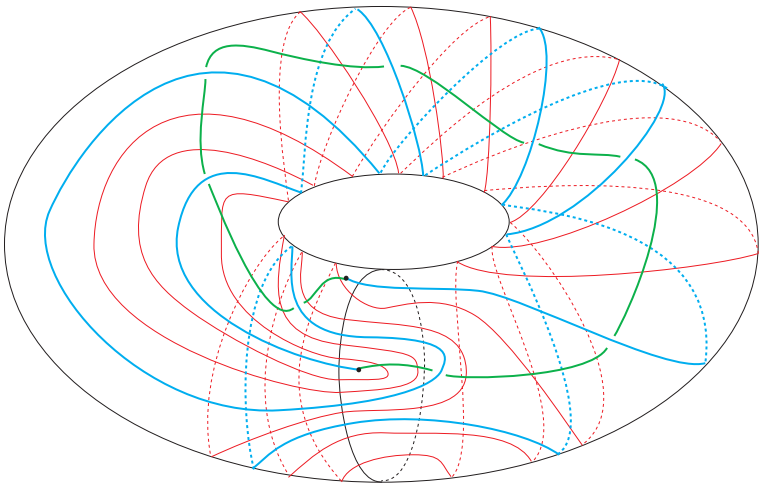

図 2.8: $k(\beta)$ の (1,1)-表示

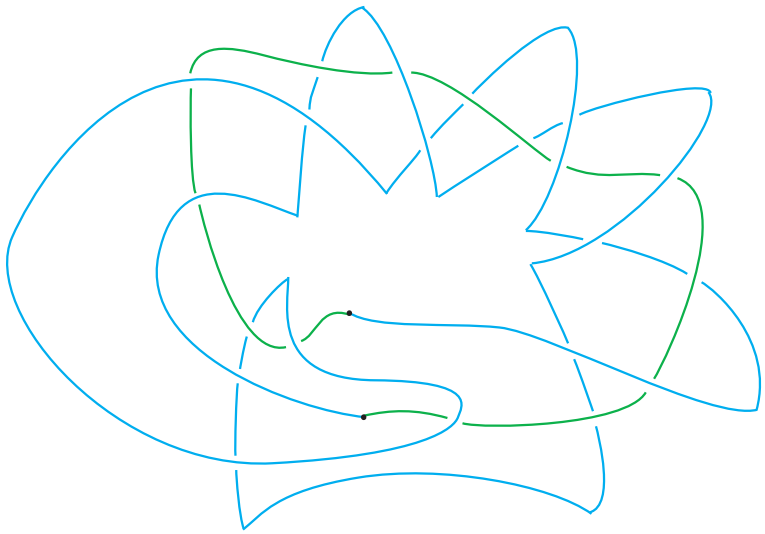

図 2.9: $k(\beta)$ の結び目図式

四面体 T_p, T_q, T_4 にそれぞれ理想四面体 $T(x)$, $T(y)$, $T(z)$, を対応させて、これら（と合同な理想四面体）の面を指定にしたがって $\mathbb{H}^3$ 内で次々と等長写像によって貼り合せる。複素数 x, y, z が方程式 (1.1), (1.2) を満たすことから、このような貼り合せで $\mathbb{H}^3$ が過不足なく覆われ、$W(T\Delta_1)$ の普遍被覆が構成される。

3.2 複素平面上のモザイク模様

上のように構成された $\mathbb{H}^3$ の理想四面体達による分割の ∞ におけるホロ球面（これを (ξ, η)-平面に射影して $\mathbb{C}$ と同一視する）による切り口をみると、$\mathbb{C}$ 上に理想四面体達の切頭三角形（これらはユークリッド三角形）が作るモザイク模様が見える。このモザイク模様を描いてみよう。$T(x)$, $T(y)$, $T(z)$ $(z = y)$ の切頭三角形は 図 3.1 に示されたものである（x に対するものは y に対するものに相似）。 したがって、モザイク模様はこの三角形に相似な三角形を並べて構成される。隣り合う三角形のどの辺とどの辺を貼り合せるべきかは、図 1.3,14,1.5 と T-DS-diagram $T\Delta_1$ が教えてくれる。3 つの四面体 T_p, T_q, T_4 それぞれの 4 つの頂点（合計 12 個）が各 1 回づつ現れる部分が **基本領域** となる。図 3.2 に $T\Delta_1$ によるモザイク模様の基本領域を示した。この基本領域

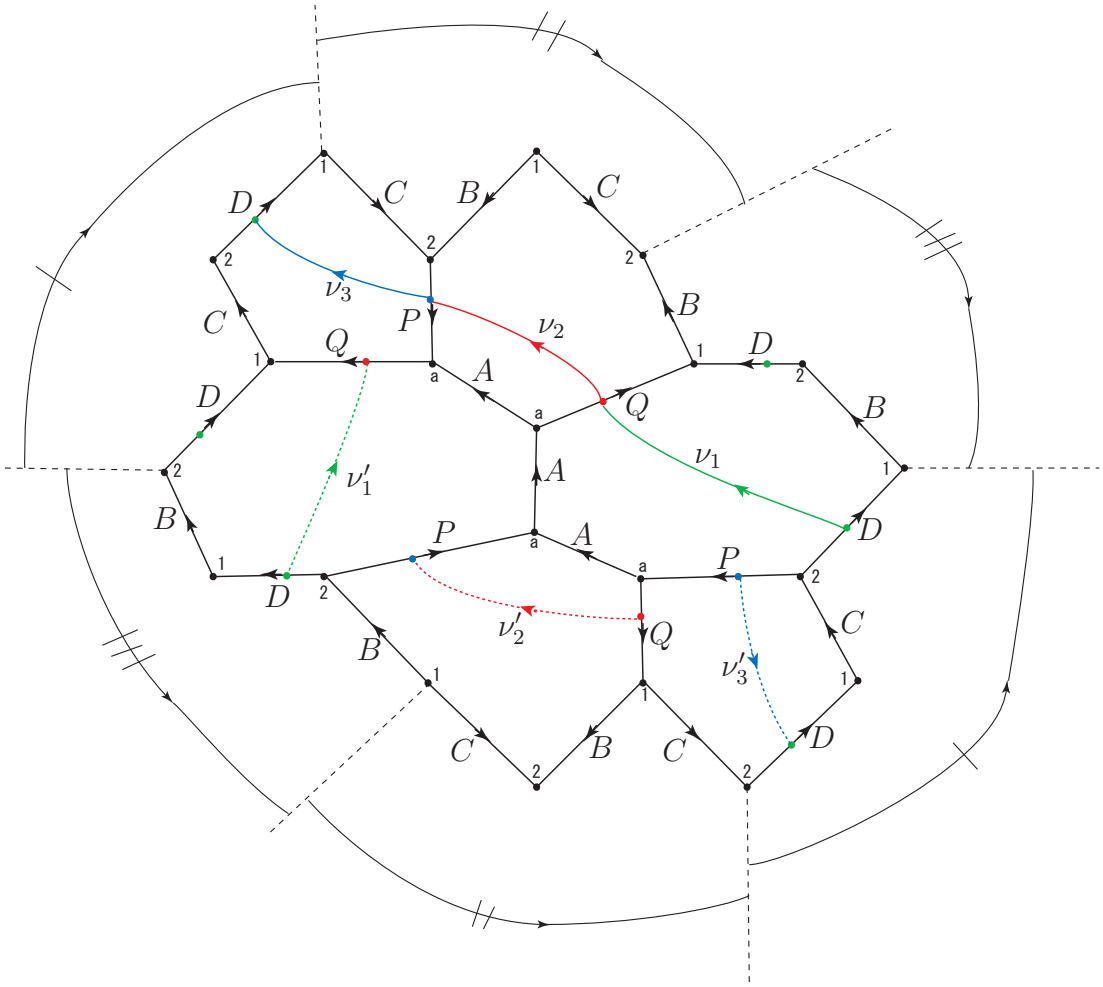

図 2.10: the slope $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3$

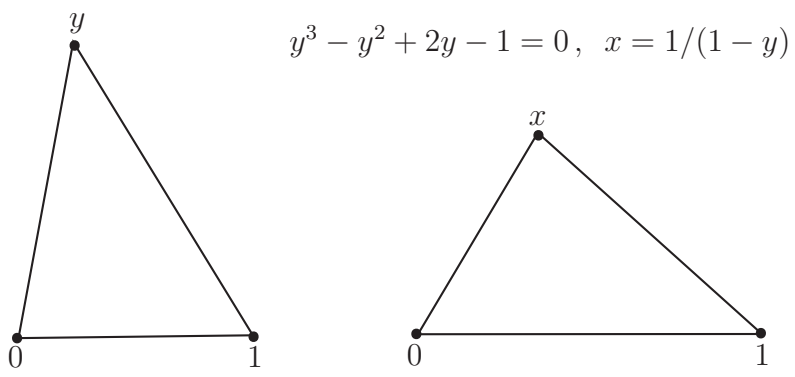

図 3.1: 解 (1.9) が定める理想四面体の切頭三角形

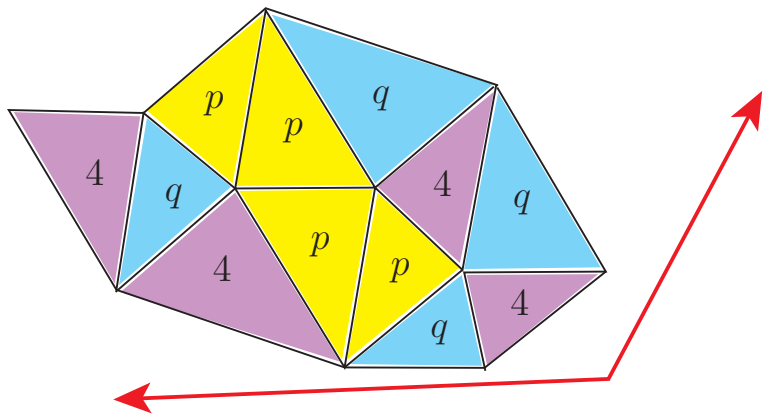

図 3.2: $T\Delta_1$ による切頭三角形が作る複素平面上のモザイク模様の基本領域

に、図に示した方向の平行移動を繰り返せば $\mathbb{C}$ 全体のモザイク模様が得られる。なお、図中の p, q, 4 の記号は、どの理想四面体の切頭三角形であるかを示すものである。

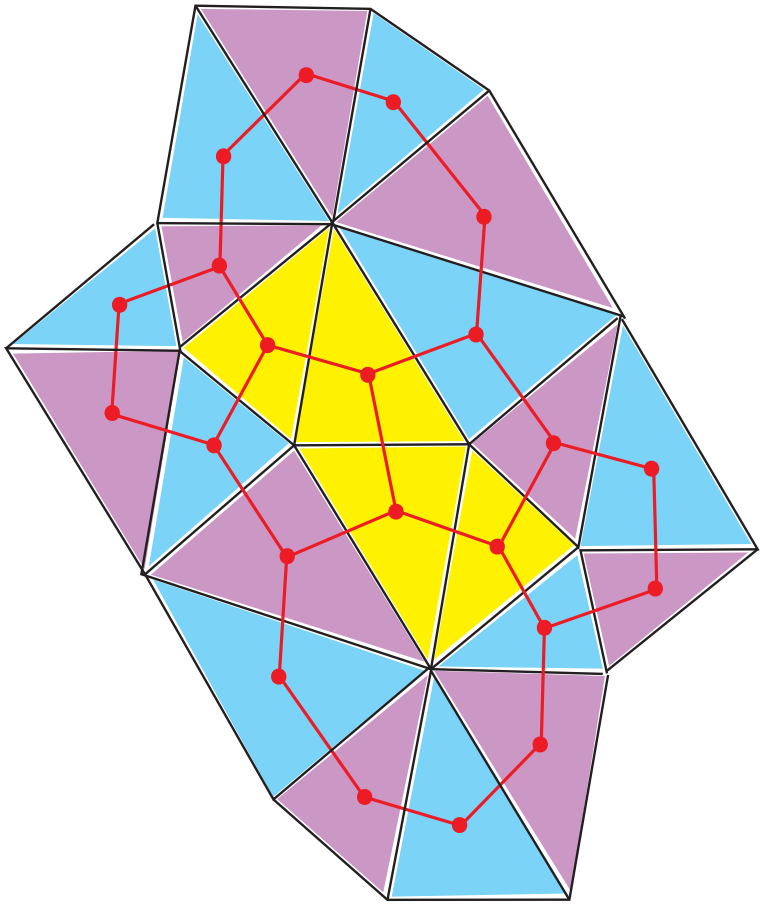

図 3.3: モザイク模様と $T\Delta_1$ の幾何的表示

3.3 モザイク模様から再び T-DS-diagram へ

このように構成した $\mathbb{C}$ のモザイク模様の各三角形の重心をとり、互いに辺を共有する三角形の重心を線分で結ぶ（図 3.3)、すなわち、モザイク模様の双対分割を作る。この双対分割から一つの基本領域を選べば、至極当然のことながら T-DS-diagram $T\Delta_1$

が出来上がる。図 1.1 が単に組合せ的な情報のみを表すのに対し、このように描かれた 図 3.3 は幾何的な情報も併せ持つことになる。

3.4 $T\Delta_2$ が定めるモザイク模様

T-DS-diagram $T\Delta_2$ からも同じようにして、モザイク模様と幾何的表示が得られる。これを 図 3.5, 3.6 に示した。$T\Delta_2$ の場合、理想四面体の切頭三角形として現れるのは図 3.4 に示したものとユークリッド的に相似な三角形である。

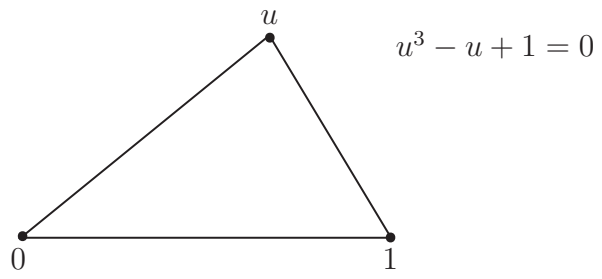

図 3.4: $T\Delta_2$ が定める理想四面体の切頭三角形

いくつかの注意

この節の最後に、ここに述べた事と他の文献（[1]、[2]）に書かれていることとの関連で気づいた事を述べる。

注意 *2.* 参考文献 [1] では、$p(-2,3,7)$ の補空間は hyperbolic cusped manifold $M3_7$ としてリストアップされている。その $M3_7$ に対し、理想四面体分割が（彼らの記法で）一つ与えられている。しかし、そこに記されている理想四面体分割が $T\Delta_1$ なのか $T\Delta_2$ なのかは、私には解読できていない。

注意 *3.* 参考文献 [2] の 92 頁、93 頁には、頂点数 3 個までの orientable hyperbolic cusped manifold の special spine が 14 個 P_k $(1 \leq k \leq 14)$ として列挙されている。この中の P_{12} が $T\Delta_1$ であり、P_6 が $T\Delta_2$ である。このリスト中 P_1, P_2 は、頂点数が 2 である。また、P_{13}, P_{14} は頂点数 3 であるが、それぞれ P_1, P_2 に簡約される。したがって、orientable hyperbolic cusped manifold の special spine で最小頂点数 3 を与え

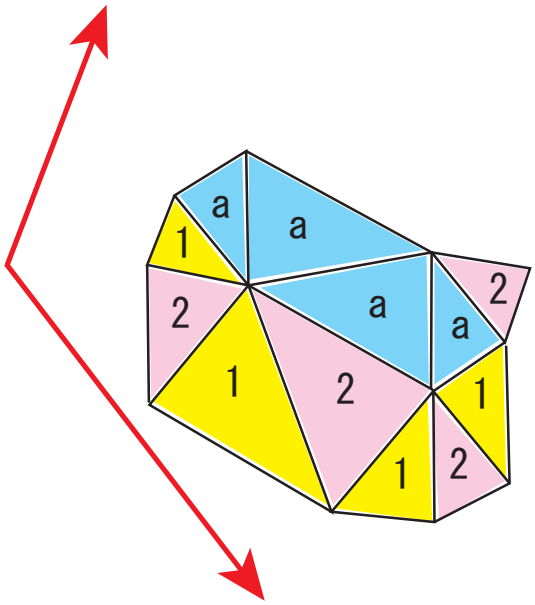

図 3.5: $T\Delta_2$ による切頭三角形が作る複素平面上のモザイク模様の基本領域

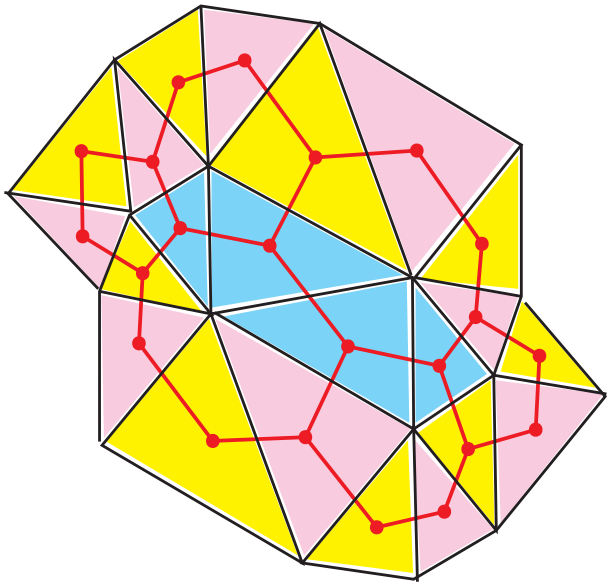

図 3.6: モザイク模様と $T\Delta_2$ の幾何的表示

るものは P_3, P_4, ..., P_{12} の 10 個である。一方、最小頂点数 3 の special spine を持つ orientable hyperbolic cusped manifold が 9 個であることが [1] に述べられている。したがって、P_3, P_4, ..., P_{12} のうち同じ多様体を与えるのは (P_6, P_{12}) の唯一組である。

注意 *4.* 上に述べた [2] のリストの内、P_1 の [2] 中の図は明らかに誤りであると思われるので、老婆心ながら 図 2.11 に P_1 の訂正図を示しておく。

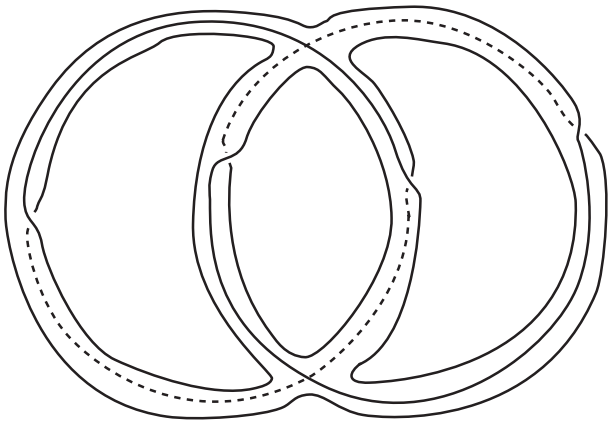

図 3.7: [2] 92 頁 P_1 の正しい図

4　5_2-knot の場合

5_2-knot の補空間は $p(-2,3,7)$ の補空間と同じ体積を持つ hyperbolic cusped manifold として知られている。5_2-knot 補空間の T-DS-diagram は [3] に 図 2.8 として与えられている。

§1 と同様の計算で、5_2-knot の補空間の理想四面体分割も、$p(-2,3,7)$ の場合の $T\Delta_1$ と同じ $T(y)$ $(y^3-y^2+2y-1=0, \mathrm{I}m(y)>0)$ 3 個で構成される。この計算結果をもとに、5_2-knot が定める理想四面体の切頭三角形が作る $\mathbb{C}$ のモザイク模様を描いてみると 図 4.1 が得られる。この図に描かれたように基本領域を平行四辺形に取ることができて、図 3.2、図 3.5 の $p(-2,3,7)$ の基本領域に比べて、整った形に見える。ところが、モザイク模様の双対分割である幾何的 T-DS-diagram を描いてみると（図 4.2 および 図 4.3)、special spine の一つの面に対応する T-DS-diagram の面の対のうち、Y^+ と Y^- のアンバランスが際立って目につく。一方、$p(-2,3,7)$ の場合の 図 3.3、図 3.6 を見ると、このような面の対はすべて、互いにユークリッド的に合同な多角形として現れている。したがって、T-DS-diagram では、5_2-knot に比べて $p(-2,3,7)$ の方が整っているようにも見える。このような単なる観察結果ではあるが、何か幾何的な性質を反映しているのだろうか？

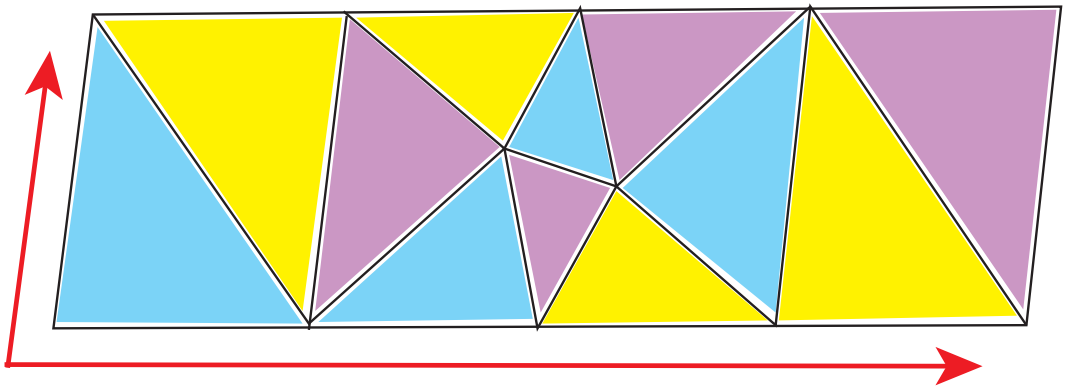

図 4.1: 5_2-knot から構成されるモザイク模様（基本領域）

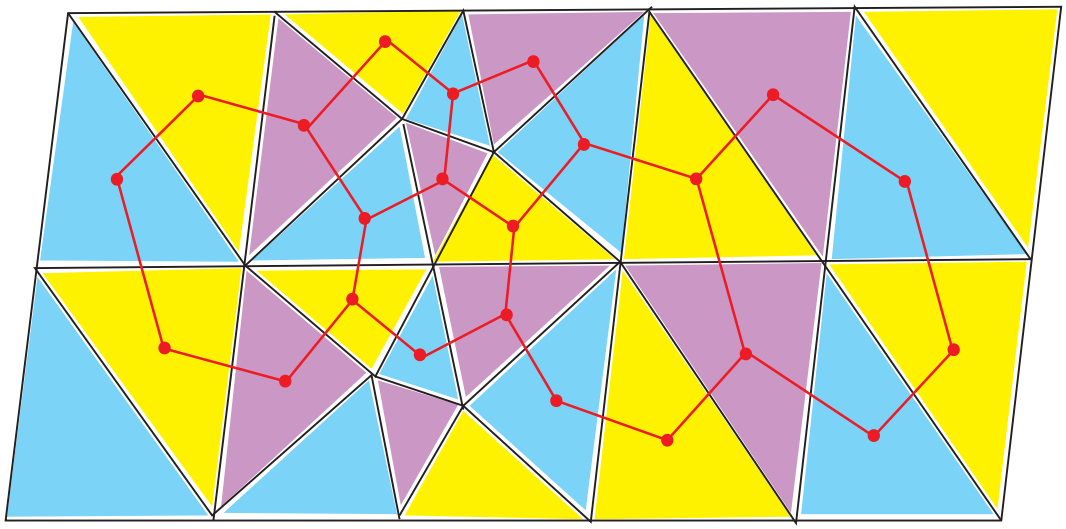

図 4.2: モザイク模様と 5_2-knot 補空間の幾何的 T-DS-diagram

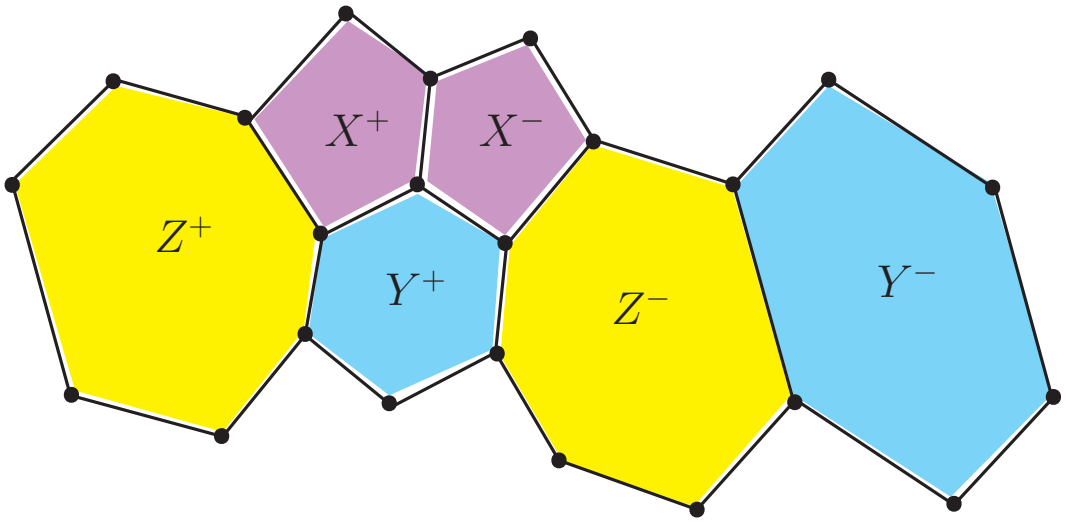

図 4.3: 5_2-knot 補空間の幾何的 T-DS-diagram

参考文献

[1] Callahan P.J., Hildebrand C.M., and Weeks J.R., A census of cusped hyperbolic 3-manifolds, Math. of Computation, vol. 68, no. 225 (1999), 321-332.

[2] Matveev S., Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, A.C.M. vol.9, Springer (2003).

[3] 石井一平, 結び目補空間の組合せ構造と幾何構造, HAKONE SEMINAR 30 (2014), 35–73.