

結び目補空間の組合せ構造と幾何構造

石井 一平

結び目とは3次元閉多様体 M (S^3 とは限らない) に埋め込まれた円周 S^1 のことをいう。この稿では、専ら M が向き付可能な場合を扱う。結び目 $k \subset M$ が**双曲的**であるとは、補空間 $M - k$ に有限体積完備双曲構造 (定曲率 -1 のリーマン計量) が入ることであった。双曲結び目の補空間は双曲的理想四面体の等長的貼り合せによって得られることが知られている。補空間の分割に必要な理想四面体の最小個数を **tetrahedral complexity** と呼び、 $tc(k)$ と表すことにする。小さい $tc(k)$ を持つ双曲的結び目 k の補空間 (**cusped manifold**) のリストは [2], [3] に挙げられている。ここでは、 $tc(k) \leq 3$ の向き付可能な双曲的結び目補空間 (全部で 11 個) の組合せ構造の詳細を述べる。さらに、これら 11 個の相互関係、あるいは他の非双曲的結び目との関係にも触れる。

1 結び目補空間の位相的理想四面体分割

1.1 用語・定義

引用などの都合により、この稿では箱根セミナー公用語ではなく、ロシア・イタリア方言 ([1] 参照) を使用するので、その用語および定義を簡単に述べておく。

コンパクト連結2次元多面体 P が **simple polyhedron** (箱根公用語では **fake surface**) であるとは、その各点 $x \in P$ の近傍が 図 1.1 の3種類のいずれかであることである。第3の種類のを、 P の頂点といい、その集合を $V(P)$ で表す。第2、第3の種類のを、 P の特異点集合といい $S(P)$ で表す。simple polyhedron P がさらに、「 $P - S(P)$ の各連結成分が開円板に同相」という条件を満たすとき、 P は **special polyhedron** であるという。

M を3次元閉多様体、 P を M に埋め込まれた special polyhedron とする。 $M - P$ が開3-球体に同相であるとき、 P は M の **special spine** (箱根公用語では **standard**

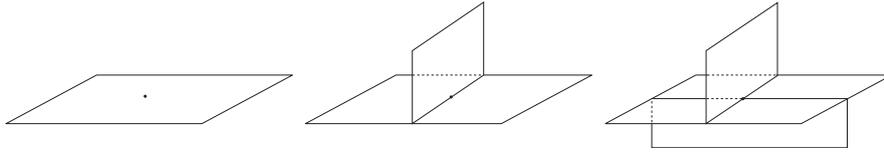


図 1.1: simple polyhedron の点 x の 3 種類の近傍

spine) であるといわれる。 M は special spine P によって $\{M - P, P - S(P), S(P) - V(P), V(P)\}$ と胞体分割され、この胞体分割の双対分割は M の四面体分割になる。

先ず special polyhedron P が与えられ、 P がある 3 次元多様体 W' に埋め込まれる場合を考える (すべての special polyhedron が 3 次元多様体に埋め込み可能であるわけではない)。このとき、 W' 内での P の正則近傍を $W(P)$ とすると、 $W(P)$ は P によって唯一つに定まる境界付コンパクト 3 次元多様体であり、 $W(P) \setminus P$ ($W(P)$ は P にカラプスする) である。 $\partial W(P)$ が唯一つの 2 次元球面であるとき、この球面に 3 次元球体を貼り付けて、 3 次元閉多様体 $M(P)$ が得られ、 P は $M(P)$ の special spine となる。逆に、 3 次元閉多様体 M とその special spine P の組 (M, P) は、このように P から構成される $(M(P), P)$ として得られる。

注意 1. 以下では、 special polyhedron P は、 3 次元多様体に埋め込み可能である場合のみを考え、さらに、 P に対して $M(P)$ と記述したときには、 $\partial W(P)$ が 2 次元球面であることを暗黙に仮定するものとする。

1.2 DS-diagram と DS-knot

special polyhedron P が 3 次元閉多様体 $M(P)$ を定めるとき、 $M(P)$ を P に沿って切り開くと 3-球体 B_P^3 が得られ、その境界 ∂B_P^3 上に同一視写像 $f_P : \partial B_P^3 \rightarrow P$ が与えられていて $G_P = f_P^{-1}(S(P))$ は 2-球面 ∂B_P^3 上の 3-正則グラフとなる。三つ組み $\Delta(P) = (\partial B_P^3, f_P, G_P)$ が DS-diagram と呼ばれている。 DS-diagram が球面上の 3-正則グラフ (通常平面グラフとして表示する) の頂点および (有向) 辺にラベルをつけて図示されることは箱根セミナーではおなじみことであり、 DS-diagram によって special polyhedron P および閉多様体 $M(P)$ が指定されていることもよく知られている。

X を P の一つの面、すなわち $P - S(P)$ の連結成分とする。このとき、 $f_P^{-1}(X)$ は $\partial B_P^3 - G_P$ の二つの連結成分となる（これらを X^+, X^- で表す）。 $x \in X$, $f_P^{-1}(x) = \{x^+, x^-\}$ とし、 γ を x^+ と x^- を結ぶ 3-球体 B_P^3 内の trivial arc とすると、 $k = f_P(\gamma)$ は $M(P)$ 内の結び目で、その isotopy type は面 X のみによって定まる。この結び目を special spine P とその面 X が定める **DS-knot** といい、 $k(P, X)$ あるいは $k(X)$ と表す。以下では、次の 2 つの条件が満たされる場合を考える。

1. $M(P)$ は向き付可能 3 次元閉多様体である。
2. P から面 X を取り去った多面体 $P_X \equiv P - X$ も special polyhedron である。

第 2 の条件は DS-diagram の言葉でいえば、 X^\pm が自己隣接面でも対隣接面でもないということと同じである。また、第 1 の条件によって、結び目 $k(X)$ の $M(P)$ における正則近傍 $N(k(X))$ はソリッドトーラスである。 $k(X)$ の補空間を $C(P, X)$ 、外部を $E(P, X)$ で表す、すなわち

$$C(P, X) = M(P) - k(X), \quad E(P, X) = \overline{M(P) - N(k(X))}$$

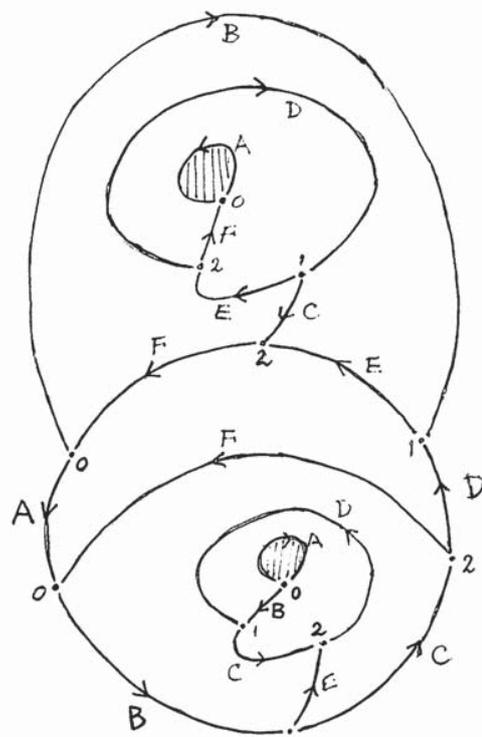
とする。上の条件より、 $\partial E(P, X)$ はトーラスである。また、 $E(P, X) \searrow P_X$ であり、 P_X は $E(P, X)$ の special spine となる

1.3 DS-knot の補空間の位相的理想四面体分割

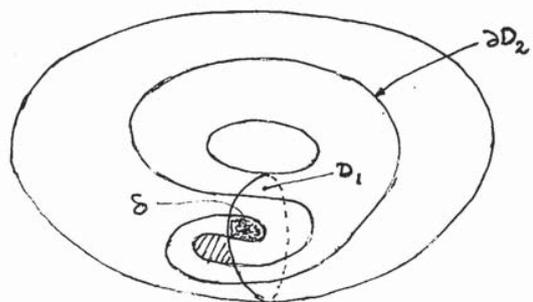
結び目補空間の special spine の双対分割が位相的理想四面体分割であることが [3], [6] に述べられている。これを DS-knot についてみてみよう。

前節で $M(P)$ の DS-diagram $\Delta(P)$ を構成したときと同じ操作を、 $E(P, X)$ とその special spine P_X で行ってみる。 $E(P, X)$ を P_X で切り開くと $\partial E(P, X) \times [0, 1]$ が得られ、その一方の境界トーラス $T_{P,X} \equiv \partial E(P, X) \times \{0\}$ 上に同一視写像 $h_{P,X} : T_{P,X} \rightarrow P_X$ が定まっている。トーラス $T_{P,X}$ 上の 3-正則グラフ $G_{P,X} = h_{P,X}^{-1}(S(P_X))$ によってトーラス上のダイアグラム (**T-DS-diagram** ということにする) $T\Delta(P, X) = (T_{P,X}, h_{P,X}, G_{P,X})$ が定まる。

DS-diagram $\Delta(P)$ から T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ は簡単な操作で得られる。これを例で説明する。図 1.2(1) の (球面上の) DS-diagram によって定まる special spiine (球面を図で示されたように貼り合せたもの) を P とし、斜線で示した面 (これが X^+ および



(1) DS-knot としての 8 の字結び目



(2) (1) の special spine の実体

図 1.2: 8 の字結び目の DS-knot 表示

$M2_1, Q_1^2$

vol = 2.02988
in $S^3(4_1)$

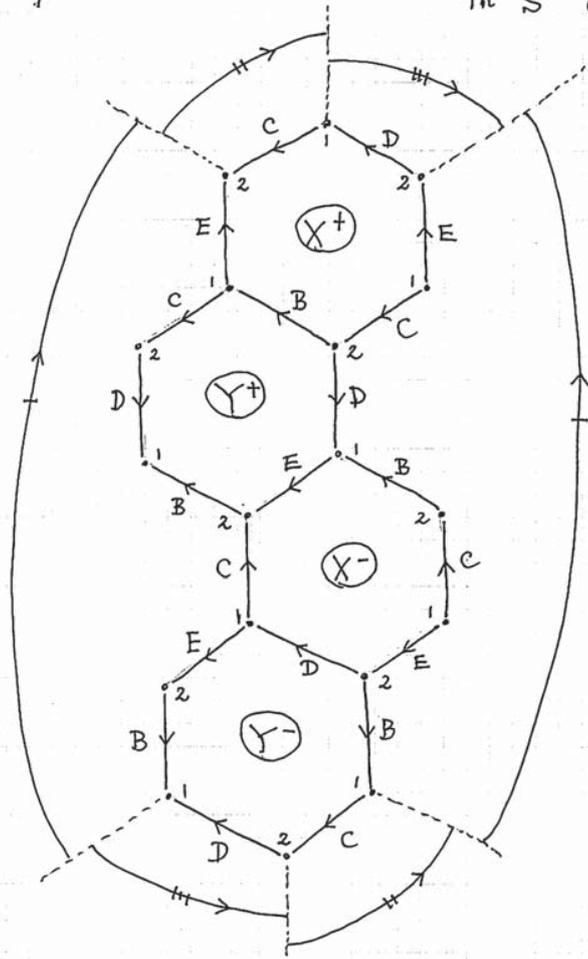


图 1.3: T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ (the cusped manifold $M2_1(Q_1^2)$)

X^-) を X とすると、 $M(P)$ は 3-球面 S^3 で $k(X)$ は 8 の字結び目である。球面 ∂B_P^3 の 2 つの面 X^+ , X^- を f_P によって貼り合せ、 $f_P(X^\pm)$ を取り除くと、図 1.3 のトーラス上のダイアグラムが得られる。この操作で、図 1.2(1) の頂点 0 は消滅し、辺 B と F が繋がって一つの辺となるのでそれを図 1.3 では B で表した。これが T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ を図示したものである。図 1.3 は図示されたように境界を貼り合せてトーラス上の図とみてもよいし、 R^2 上に展開された普遍被覆とみてもよい。

図 1.2(1) の DS-diagram が表す special spine $P \subset S^3$ は次のようなもの (図 1.2(2) 参照) である。 (V_1, V_2) を S^3 の種数 1 の Heegaard splitting とし (図 1.2(2) に描かれたソリッドトーラスが V_1)、 V_1, V_2 それぞれの meridian disk D_1, D_2 を図に示されたように配置する。このとき、 $P_1 = D_1 \cup D_2 \cup \partial V_1$ は special polyhedron であり、 $S^3 - P_1$ は丁度二つの開 3-球体となる。したがって、 ∂V_1 内の図に示された開円板 δ を取り除くと $P = P_1 - \delta$ は S^3 の special spine となる。この P が図 1.2(1) の DS-diagram が定める special spine である。

図 1.3 のような T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ から補空間 $C(P, X)$ の位相的理想四面体分割がどのように読み取れるのかを説明しよう。まず、 P_X の各頂点 v (今の場合、頂点集合は $V(P_X) = \{1, 2\}$) に対して、 $v \in E(P, X)$ の近傍での P_X の双対四面体 T_v を考える、すなわち v のまわりの P_X で区切られる 4 つの領域それぞれに対して T_v の 4 つの 0-simplex、 v に集まる P_X 6 つの面それぞれに対して T_v の 1-simplex、 v から出る 4 つの辺 ($S(P_X) - V(P_X)$ の連結成分) それぞれに T_v の 2-simplex を対応させたもの。これらの四面体たちの P_X の同じ辺に対応する 2-simplex 同士、同じ P_X の面に対応する 1-simplex 同士を貼り付ける。このような貼り付けの結果として、四面体たちの 0-simplex はすべて 1 点に集約される。この 1 点に集約された頂点を結び目 $k(X)$ に飛ばすことによって、これを $C(P, X)$ の位相的理想四面体分割と見なすことができる ([6] 参照)。この分割が双曲的理想四面体の等長的貼り合せで実現できれば、補空間 $C(P, X)$ の双曲構造が与えられたことになる。

1.4 位相的理想四面体分割から双曲的理想四面体分割へ

T-DS-diagram から構成された位相的理想四面体分割の $\partial E(P, X)$ での切り口をみると、四面体の各頂点のまわりの切頭三角形 (truncated triangle) によるトーラス $\partial E(P, X)$ の三角形分割が得られている。この切頭三角形による三角形分割の双対分割

が T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ となっている。special spine P_X の各頂点 $v \in V(P_X)$ に対する T-DS-diagram 上の点 $h_{P_X}^{-1}$ は 4 点であり、これらの 4 点それぞれのまわりのトールス T_{P_X} 上のグラフ G_{P_X} の双対三角形が四面体 T_v のの 4 つの頂点での切頭三角形を表している。そして、各三角形が四面体 T_v のどの頂点に対応する切頭三角形であるか、三角形の各角が T_v のどの辺に対応する面角であるかは T-DS-diagram が持つ情報から読み取ることができる。したがって、T-DS-diagram を用いて、位相的理想四面体分割が双曲的理想四面体分割として実現されるための条件を代数的に記述することができる（次節で例を用いてこのことをより詳しく説明する）。

2 双曲的結び目補空間

2.1 $tc(k) \leq 3$ の向き付可能双曲的結び目補空間

少ない個数の双曲的理想四面体分割を持つ双曲結び目補空間（cusped manifold ともいう）が [2], [3] に示されている。この分節では、 $tc(k) \leq 3$ の双曲結び目の T-DS-diagram を示しておく。

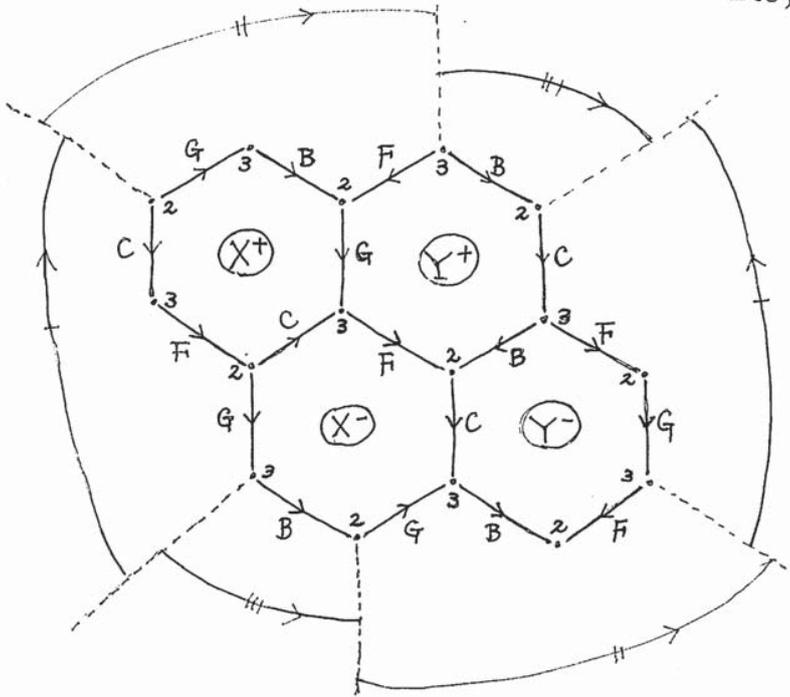
まず、[2] で M_{2_1} （[3] では Q_1^{θ} ）と名付けられたもの、これは S^3 における 8 の字結び目の補空間で、これはすでに 図 1.3 に示されている。

次は M_{2_2} （これは [2] での名前で、[3] では Q_2^{θ} ）で、この T-DS-diagram を 図 2.1 に示した。 $tc(k) \leq 2$ を満たす向き付可能な双曲的結び目の補空間は M_{2_1}, M_{2_2} の 2 個であり、その体積はともに $2D(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}) = 6\mathbb{J}(\pi/3) = 2.02988\dots$ である。ここで、 $D(z)$ は Bloch-Wigner 関数、 $\mathbb{J}(\theta)$ は Lobachevsky 関数である（[4], [5] 参照）。図 2.2 には、 M_{2_2} を与える DS-knot を示した、ここで DS-knot を定める斜線領域と同一視されるのは一番外側の領域（平面上の図では非有界領域）である。図 2.2 は 図 2.1 から、ある slope での Dehn 充填で得られる（T-DS-diagram を Dehn 充填する方法については後に述べる）。図 2.2 の DS-diagram が表す多様体はレンズ空間 $L(5, 4)$ である（レンズ空間については、DS-diagram の標準形が知られている）。

$tc(k) = 3$ で向き付可能な双曲的結び目補空間は 9 個存在し、これらは [2] では M_{3_i} ($1 \leq i \leq 9$) と、[3] では Q_i^{θ} ($3 \leq i \leq 11$) と名付けられている。図 2.3-2.11 にこれら 9 個の結び目補空間の T-DS-diagram を示す。いくつかの短い slope での Dehn 充填によって得られる多様体を調べた。その結果 M_{3_i} のどれもが、あるレンズ空間の結び目

$M2_2, Q_2^{\vec{0}}$

vol = 2.02988
in $L(5,4)$



$G.$

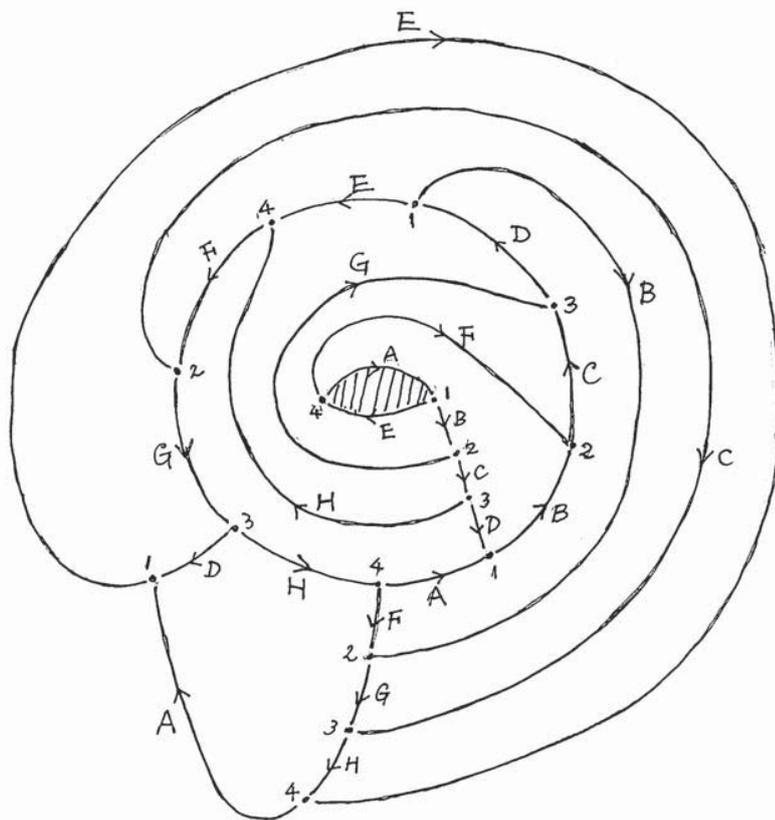
$$b = cfc$$

$$f^2 = bcb$$

$$\pi_1(M-K) = \langle c, f \mid cfc^2fcf^{-2} \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5$$

☒ 2.1: the cusped manifold $M2_2$



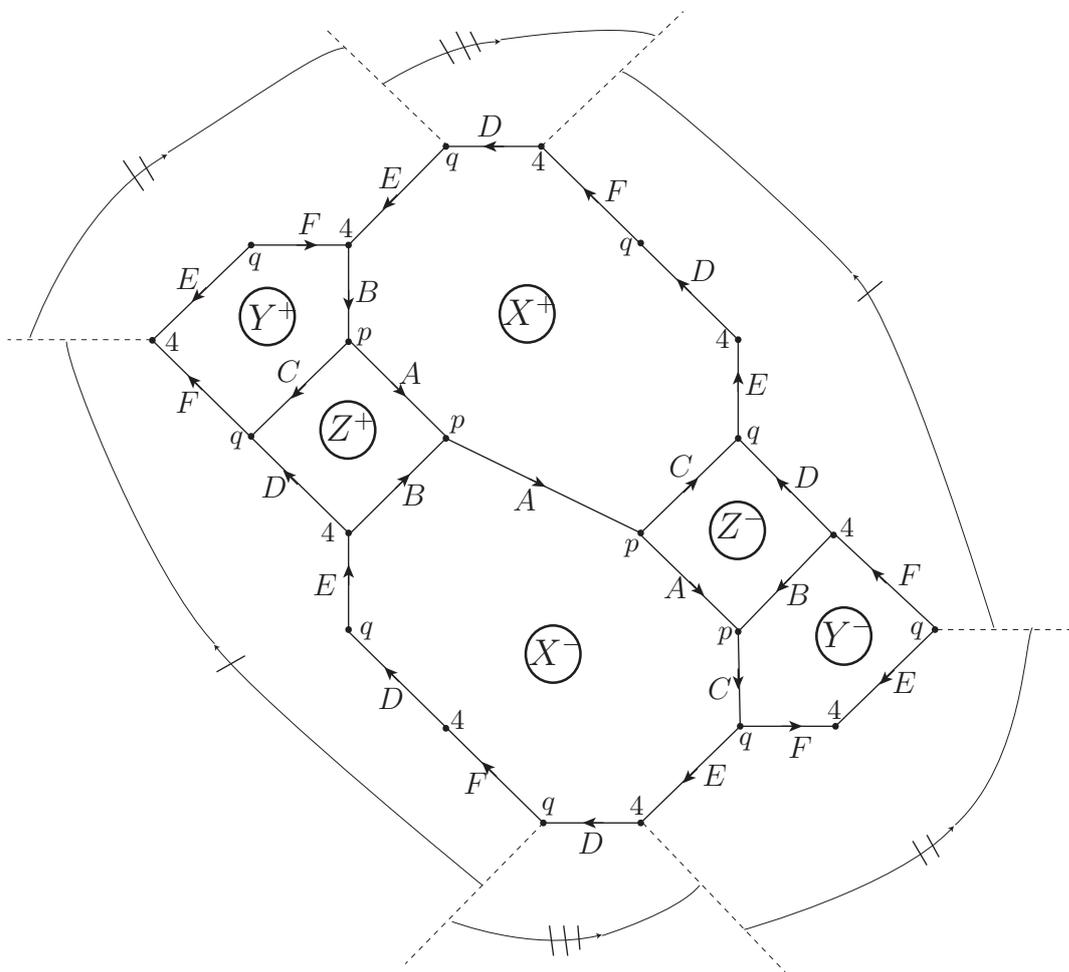
$L(5,4)$

$(M2_2)$

图 2.2: DS-knot which gives $M2_2$

$M3_1, Q_9^\partial$

$vol. = 2.56898\dots$
in $L(5, 2)$ and $L(15, ?)$



$$B, C, \quad ad = 1, e = f^2, a^2edfde = 1$$

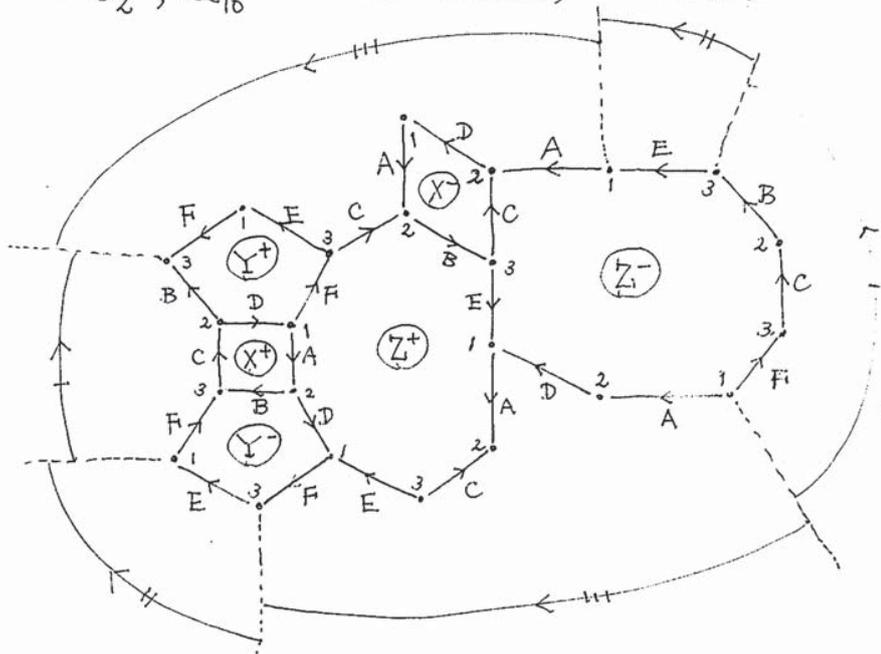
$$\pi_1(M - K) = \langle a, f \mid a^2 f^2 a^{-1} f a^{-1} f^2 \rangle$$

$$H_1(M - K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$$

⊠ 2.3: the cusped manifold $M3_1$

$M3_2, Q_{10}^2$

$vol = 2.56898, \text{ in } L(3,1)$



F_i, D

$$\begin{cases} abc = 1 \\ e = \theta \\ ae^{-1}ca^{-1}e^{-1}b^{-1}c^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$\pi_1(M-K) = \langle a, \theta \mid a\theta^{-2}a^{-2}\theta^{-2}a\theta \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$$

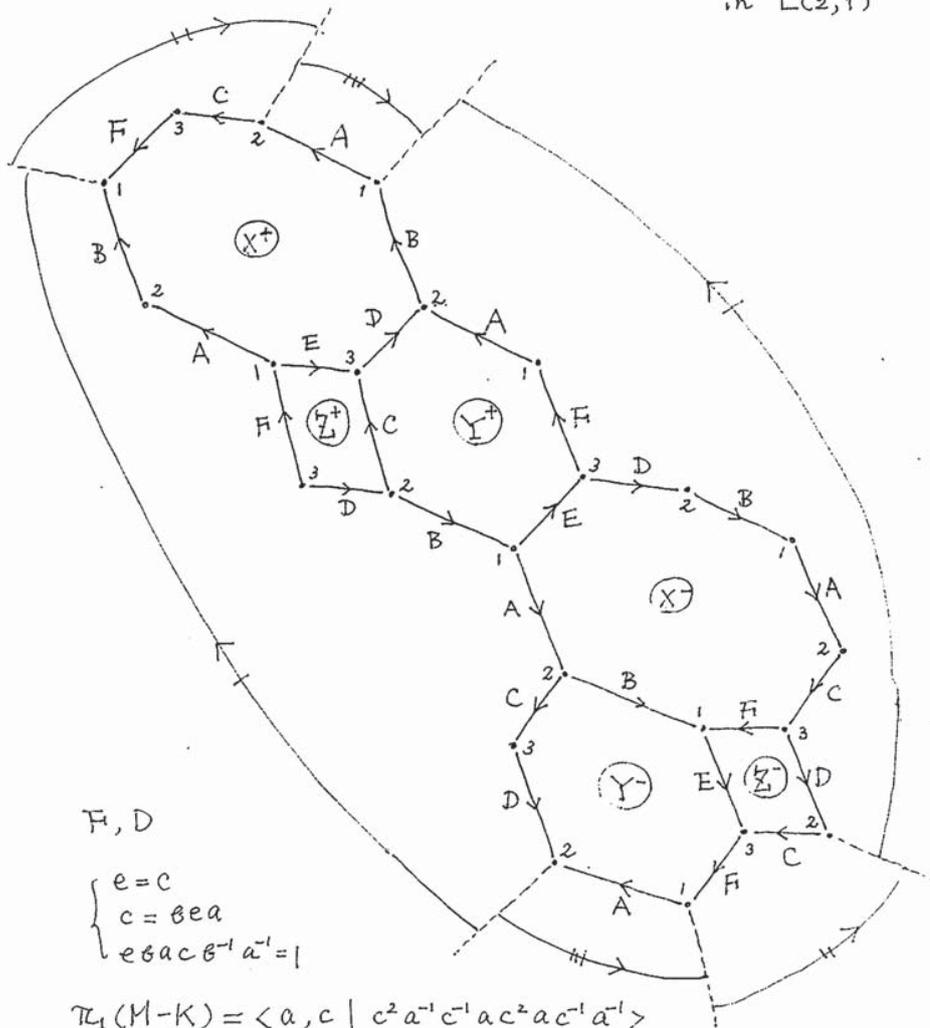
$3\theta = 0$

⊠ 2.4: the cusped manifold $M3_2$

$M3_3, Q_3^2$

vol = 2.66680

in $LC(2,1)$



F, D

$$\begin{cases} e=c \\ c=bea \\ e\beta ac\beta^{-1}a^{-1}=1 \end{cases}$$

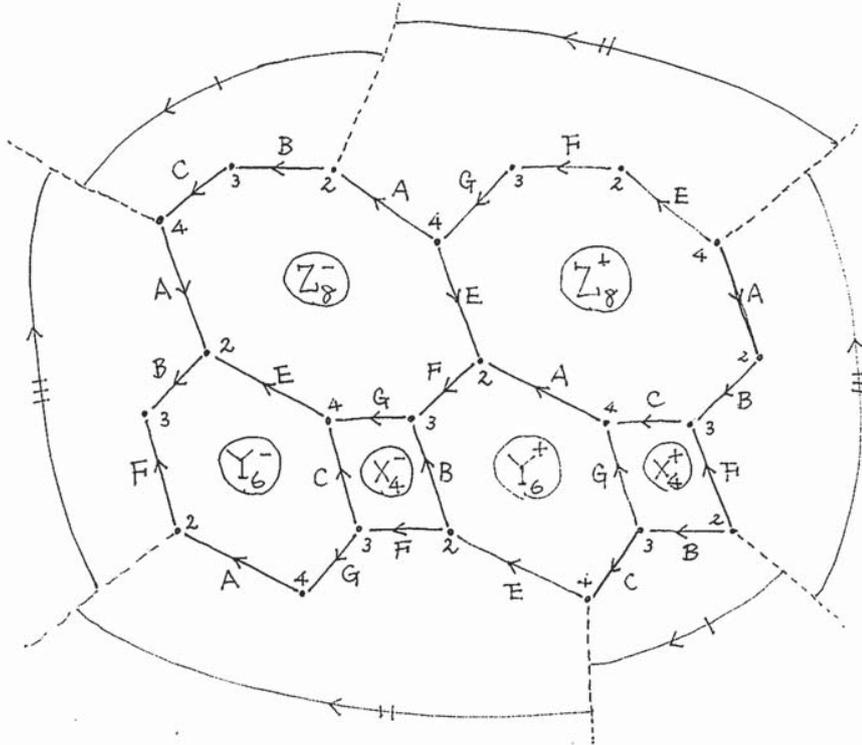
$$\pi_1(M-K) = \langle a, c \mid c^2 a^{-1} c^{-1} a c^2 a c^{-1} a^{-1} \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

☒ 2.5: the cusped manifold $M3_3$

$M_{3,4}, Q_4^2$

vol = 2.66680
in $L(6,5)$



F, G

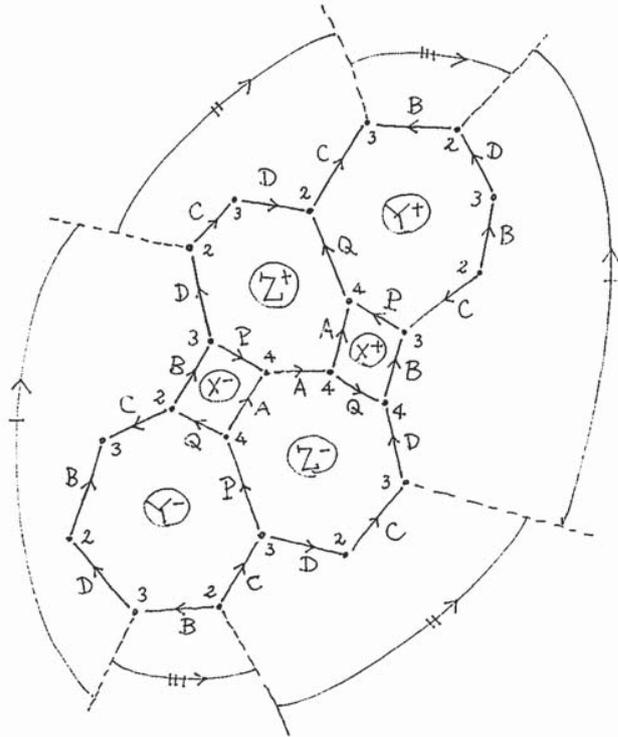
$$\begin{cases} c = e \\ a = ce \\ e^2 = abca \end{cases}$$

$$\pi_1(M-K) = \langle a, e \mid a e^2 a e a^{-1} e^2 a^{-1} e \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$$

☒ 2.6: the cusped manifold $M_{3,4}$

$M3_5, Q_7^0$ $vol = 2.78186$, in $L(9,4)$, $L(13,3)$



P, Q

$$\begin{cases} e = a \\ c^2 = ed e \\ a^2 = ded \end{cases}$$

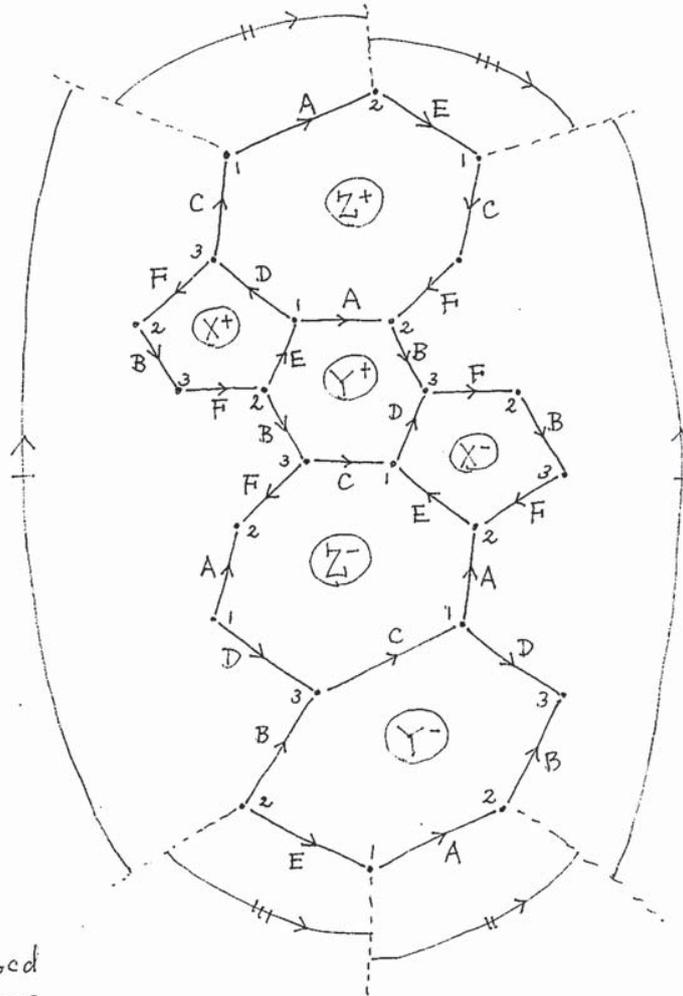
$$\pi_1(M-K) = \langle a, c \mid a^{-4} c^2 a^{-1} c a^{-1} c^2 \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z}$$

⊠ 2.7: the cusped manifold $M3_5$

$M3_6, Q_{11}^2$

vol = 2.82812
in $S^3 (5_2)$



E, F

$$\begin{cases} ed=1 \\ at=ecd \\ dcac=a \end{cases}$$

$$\pi_1(M-K) = \langle a, \epsilon \mid a^{-1}\epsilon^{-2}a\epsilon^2a\epsilon^{-1}a\epsilon^2 \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z}$$

☒ 2.8: the cusped manifold $M3_6$

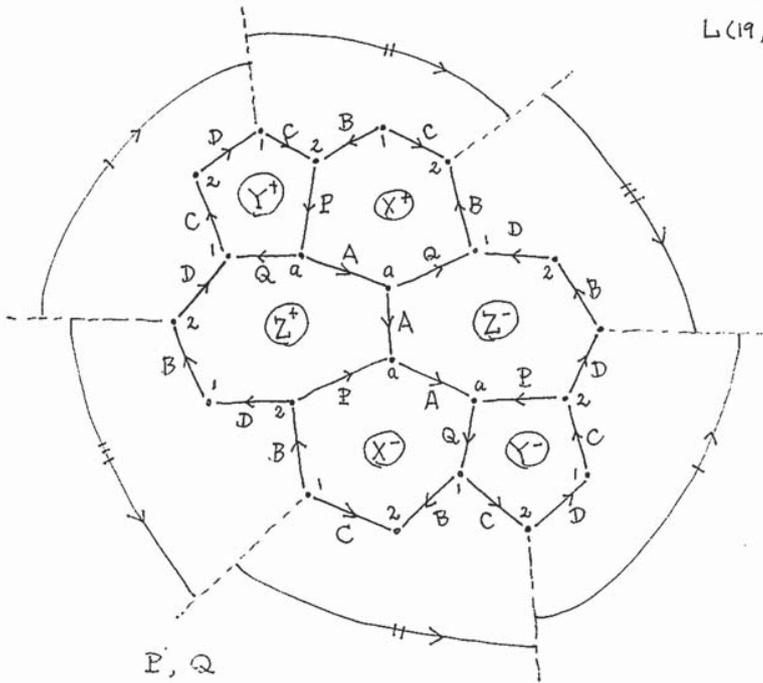
$M_{3,7}, Q_6^2$

vol = 2.82812

in $S^3 (P(-2,3,7))$

$L(18,?)$

$L(19,?)$



P, Q

$$\begin{cases} cdc = 1 \\ a^2ded = 1 \\ abc^{-1}e = 1 \end{cases}$$

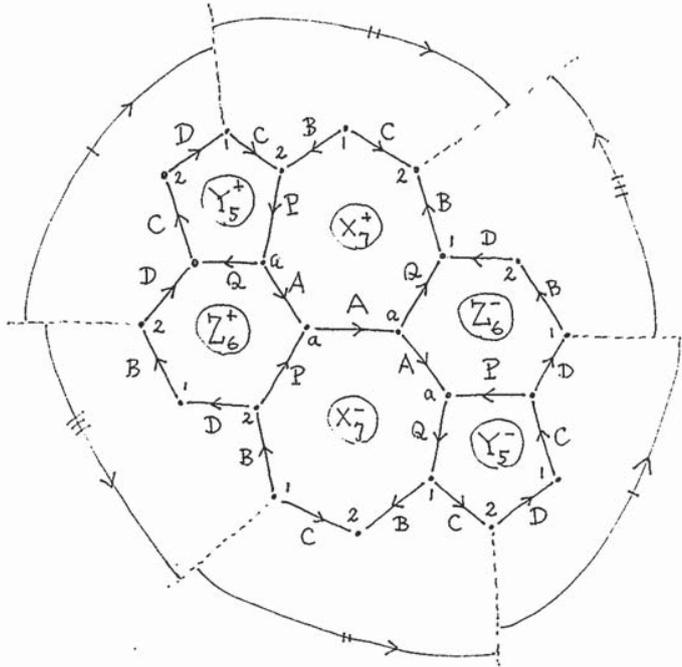
$$\pi_1(M-K) = \langle a, c \mid ac^2a^{-2}c^3a^{-2}c^2 \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z}$$

☒ 2.9: the cusped manifold $M_{3,7}$

M_{38}, Q_5^2

vol = 2.82812
 in $L(7, 2)$
 $L(4, 3)$
 $L(21, ?)$



$$\pi_1(M-K) = \langle a, \epsilon \mid \epsilon a^2 \epsilon^2 a^2 \epsilon a^2 \epsilon^2 a^2 \epsilon a^{-1} \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_7 \quad (7(a+\epsilon) = 0)$$

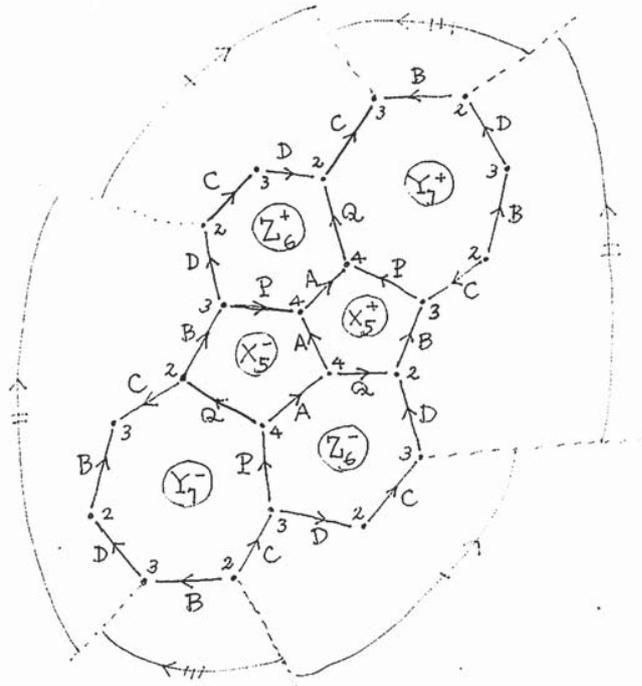
☒ 2.10: the cusped manifold M_{38}

M_{39}, \mathbb{Q}_8^2

$vol = 2.94413$

in $LC(6, 1)$

$L(17, ?)$



$$\pi_1(M-K) = \langle c, d \mid dcd^2cd^3cd^2c^{-2} \rangle$$

$$H_1(M-K) = \mathbb{Z}$$

⊠ 2.11: the cusped manifold M_{39}

補空間になることがわかった（レンズ空間については、DS-diagram の標準形が知られている）。それが各図の右上に書いてある。ただし、 $L(p, ?)$ のように書いてあるのは、基本群を計算して p 次巡回群にはなったが DS-diagram をレンズ空間の標準形にまで変形できていないということである。

2.2 \mathbb{H}^3 の理想四面体

双曲上半空間とは $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_+\}$ にリーマン計量 $ds^2 = (dzd\bar{z} + dt^2)/t^2$ を付与したものであり、 $\{t = 0\} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$ を \mathbb{H}^3 の理想境界といい $\partial\mathbb{H}^3$ で表す。ここで、これからの話で必要となる \mathbb{H}^3 に関する事がらをまとめておく。

- (1) \mathbb{H}^3 の全測地面（双曲的平面）は、 $\{t = 0\}$ 内の円を赤道とする $\{t > 0\}$ 内の（ユークリッド）半球面、または、 $\{t = 0\}$ に垂直な（ユークリッド）平面である。そして測地線は、全測地面内の $\{t = 0\}$ に垂直な（ユークリッド）半円または直線である。
- (2) \mathbb{H}^3 の等長変換は $\partial\mathbb{H}^3$ の等角写像を誘導し、逆に $\partial\mathbb{H}^3$ の等角写像は \mathbb{H}^3 の等長変換を定める。したがって、 \mathbb{H}^3 の保向等長変換群 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}P^1$ の 1 次分数変換群、すなわち $\text{PSL}(2; \mathbb{C})$ である。 $\rho \in \text{PSL}(2; \mathbb{C})$ に対し、 ρ が定める \mathbb{H}^3 の保向等長変換を $\tilde{\rho}$ で表すこととする。
- (3) $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ 内の 3 点 a_1, a_2, a_3 に対し、これら 3 点を含む全測地面上で a_i, a_j ($1 \leq i, j \leq 3$) を結ぶ測地線で囲まれる領域を 3 点 a_1, a_2, a_3 を頂点とする（双曲的）三角形といい、 $\tau(a_1, a_2, a_3)$ で表す。とくに、 $a_i \in \partial\mathbb{H}^3$ ($1 \leq i \leq 3$) であるとき $\tau(a_1, a_2, a_3)$ を**理想三角形**という。
- (4) 任意の 2 つの理想三角形 $\tau(a_1, a_2, a_3)$ と $\tau(b_1, b_2, b_3)$ は合同である。すなわち、 $\rho(a_i) = b_i$ を満たす 1 次分数変換 ρ を取れば、 $\tilde{\rho}(\tau(a_1, a_2, a_3)) = \tau(b_1, b_2, b_3)$ となる。
- (5) $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}P^1$ 上の同一円上にはない 4 点 a, b, c, d が与えられたとき、4 つの理想三角形 $\tau(b, c, d), \tau(a, c, d), \tau(a, b, d), \tau(a, b, c)$ が囲む \mathbb{H}^3 の領域を a, b, c, d を頂点とする**理想四面体**といい、 $T(a, b, c, d)$ で表す。

以下では、理想四面体は向き付られたものとする、すなわち、 x, y, z, w が a, b, c, d の偶置換であるときは $T(x, y, z, w) = T(a, b, c, d)$ 、奇置換であるとき $T(x, y, z, w) = -T(a, b, c, d)$ （向きを逆にしたもの）とする。上の (4) によって、「2 つの理想

四面体をそれぞれの指定された面で等長的に貼り合わせる」ということが可能であることがわかる。

(6) $\rho \in \text{PSL}(2; \mathbb{C})$ によって $\rho(a_i) = b_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) であるとき、2つの理想四面体 $T(a_0, a_1, a_2, a_3)$ と $T(b_0, b_1, b_2, b_3)$ は合同 (向きを込めた合同) であるといい $T(a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv T(b_0, b_1, b_2, b_3)$ と表す。与えられた理想四面体 $T(a, b, c, d)$ に対し、 $T(a, b, c, d) \equiv T(0, 1, z, \infty)$ となる $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(z) > 0$ が唯一つ定まる。すなわち、理想四面体の合同類は $z \in \mathbb{C}_+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(w) > 0\}$ によってパラメータ付される。

(7) 理想四面体 $T(\eta, \xi, \zeta, \infty)$ の $\{t = t_0\}$ (点 $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$ のまわりのホロ球面 (t_0 は十分大)) での切り口 (双曲的切頭三角形) は、ユークリッド三角形で、 \mathbb{C} へ射影すれば3つの複素数 η, ξ, ζ を頂点とする \mathbb{C} 上の三角形である。以下ではしばしば、 ∞ のまわりのホロ球面での切り口とその \mathbb{C} への射影を同一視する。

一般に、理想四面体 $T(a, b, c, d)$ の”頂点 d での切頭三角形”とは d でのホロ球面による切り口のことをいう。この切頭三角形は d を ∞ に移す1次分数変換 ρ で $T(a, b, c, d)$ を $T(\rho(a), \rho(b), \rho(c), \infty)$ に移せば、上にみたように \mathbb{C} 内の三角形とみることができる。理想四面体では対辺の面角が等しいことから、一つの理想四面体の4つの切頭三角形がすべて向きを込めて相似であり、理想四面体の合同類は切頭三角形の向きを込めての相似類と同一であることがわかる。

$z \in \mathbb{C}_+$ でパラメータ付される理想四面体の切頭三角形を表すのに図 2.12 のように三角形の各角に $z_1 = z$, $z_2 = (z-1)/z$, $z_3 = 1/(1-z)$ を配して表すとその理想四面体をどのようにパラメータ付したかが分かり、これからの計算にも都合が良い ([3] を参照)。

2.3 T-DS-diagram 再論

前節では DS-knot の補空間としての T-DS-diagram を考えたが、図 2.3–2.11 に与えたように DS-knot とは独立に T-DS-diagram を定めることができる。DS-diagram とまったく同様であるが、T-DS-diagram の定義を確認しておこう。

定義 2.1. 2次元トーラス T^2 、special polyhedron Q さらに、全射局所同相写像 $h : T^2 \rightarrow Q$ が与えられ、条件 (i) $x \in V(Q)$ ならば $\#h^{-1}(x) = 4$, (ii) $x \in (S(Q) - V(Q))$ ならば $\#h^{-1}(x) = 3$, (iii) $x \in (Q - S(Q))$ ならば $\#h^{-1}(x) = 2$ を満たすとき、三つ組

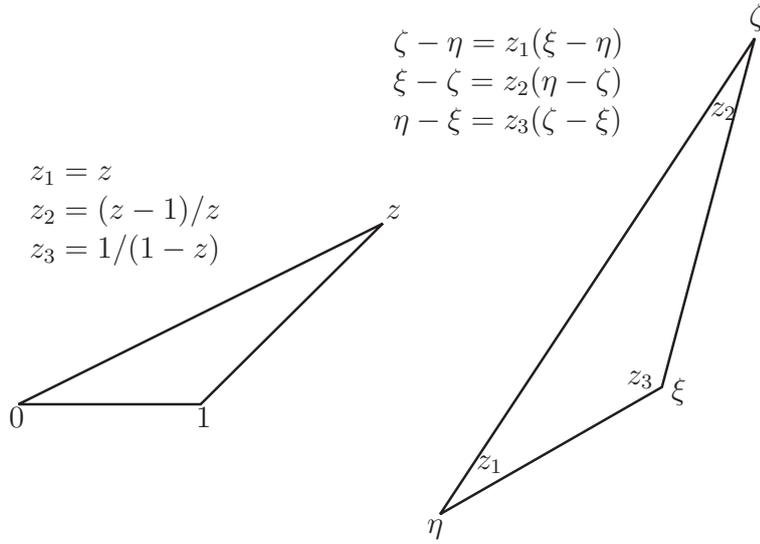


図 2.12: $T(0, 1, z, \infty)$ に合同な理想四面体の切頭三角形

み $T\Delta = (T^2, h, G)$ を T-DS-diagram という。ただしここで、 $G = h^{-1}(S(Q))$ であり、これは T^2 上の 3-正則グラフである。

トーラス上の 3-正則グラフ G の頂点と辺にラベルを付けて T-DS-diagram を図で表示できることは、DS-diagram の場合と同様である。また、前節で定めた閉 3 次元多様体の special spine P とその一つの面 X から作る T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ は、 $P_X = Q$, $T_{P,X} = T^2$, $h_{P,X} = h$, $G_{P,X} = G$ として上の定義と一致する。

T-DS-diagram $T\Delta = (T^2, h, G)$ が与えられたとき、 $T^2 \times [0, 1]$ の一つの境界成分 $T^2 \times \{0\}$ を h で貼り合せる、すなわち

$$(x, 0) \sim (y, 0) \Leftrightarrow h(x) = h(y) \quad (x, y \in T^2, (x, 0), (y, 0) \in T^2 \times \{0\})$$

という同値関係 \sim で商をとると、コンパクト 3 次元多様体 $W(T\Delta)$ が得られる、写像 $\tilde{h}: T^2 \times [0, 1] \rightarrow W(T\Delta)$ を $h: T^2 \times \{0\} \rightarrow Q$ を $T^2 \times (0, 1]$ 上では恒等写像として拡張したものとすれば、 $W(T\Delta) = \tilde{h}(T^2 \times [0, 1])$ と表せる。また、 $W(T\Delta)$ を $W(Q)$ と表すこともある。このとき、 $\partial W(T\Delta) = T^2 \times \{1\}$ はトーラスであり、 $W(T\Delta) \setminus h(T^2 \times \{0\}) = Q$ である。 $\partial W(T\Delta)$ 上に本質的単純閉曲線 (slope という) γ を一つ指定し、ソリッドトーラス $V = D^2 \times S^1$ のメリディアンを γ に移す ∂V から $\partial W(T\Delta)$ への同相写像によって V を $W(T\Delta)$ に貼り付けて得られる閉多様体 $M(T\Delta; \gamma)$ を $W(T\Delta)$ の γ を

slope とする **Dehn 充填** というのであった。Dehn 充填は slope の選び方に依存するが、 k をソリッドトーラス V のコアとすると $M(T\Delta; \gamma) - k$ (結び目 k の補空間) は γ には依らずに一意に定まる。この結び目補空間を $C(T\Delta)$ で表すことにする。

2.4 $M3_1$ の双曲構造

T-DS-diagram で示される位相的理想四面体分割がいかにして双曲的理想四面体分割として実現されることを確認できるかを、 $M3_1$ (図 2.3) の場合を例として説明しよう。この分節では、T-DS-diagram $T\Delta = (T^2, h, G)$ は図 2.3 で表されるものとし、 $Q = h(T^2)$ を $W(T\Delta)$ の special spine とする。

2.4.1 各頂点に対応する理想四面体のパラメータ付

special spine Q の頂点集合 $V(Q)$ は $p, q, 4$ の 3 点からなり、それら 3 点の逆像 $h^{-1}(p), h^{-1}(q), h^{-1}(4)$ はそれぞれ T^2 上の 4 点で、それが図 2.3 に示されている。§1.4 で述べたように、各頂点 $p, q, 4$ それぞれに理想四面体 T_p, T_q, T_4 を対応させ、これが双曲的理想四面体であると仮定する。そして、 T_p, T_q, T_4 がそれぞれ $x, y, z \in \mathbb{C}_+$ でパ

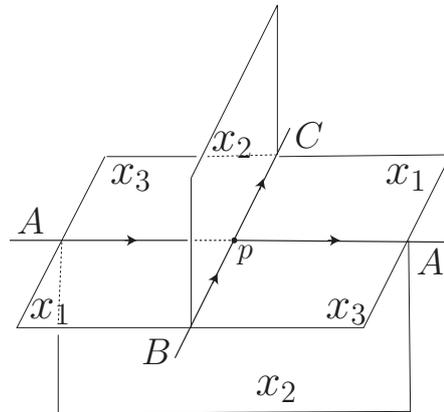


図 2.13: 頂点 $p \in V(Q)$ のまわりの special spine Q と T_p のパラメータ付

ラメータ付されるものとする、すなわち、

$$T_p \equiv T(0, 1, x, \infty), \quad T_q \equiv T(0, 1, y, \infty), \quad T_4 \equiv T(0, 1, z, \infty)$$

とする。ただし、各理想四面体について、どの辺の面角に対して指定したパラメータを割り当てるかは任意に定めればよい。例えば T_p へのパラメータの指定は、 $p \in V(Q)$ のまわりの Q の6つの面（これらそれぞれが T_p の6つの1-単体に対応している）に図 2.13 に示したように面角 $x_1 = x, x_2 = (x - 1)/x, x_3 = 1/(1 - x)$ を指定すればよい、ただしこのとき、

- (i) T_p の対辺の面角を互いに等しく指定し、さらに
- (ii) x_1, x_2, x_3 が T-DS-diagram 上でこの順序で時計回りになるように指定する

ということに注意する (§2.2 (図 2.12) も参照のこと)。T-DS-diagram 上には $h^{-1}(p)$ の4点のまわりには T_p の4頂点それぞれでの切頭三角形が対応する。図 2.13 に従って T_p をパラメータ付けしたとき、その4つの切頭三角形の角 (T_p の各1-単体での面角) は図 2.14 のようになる。

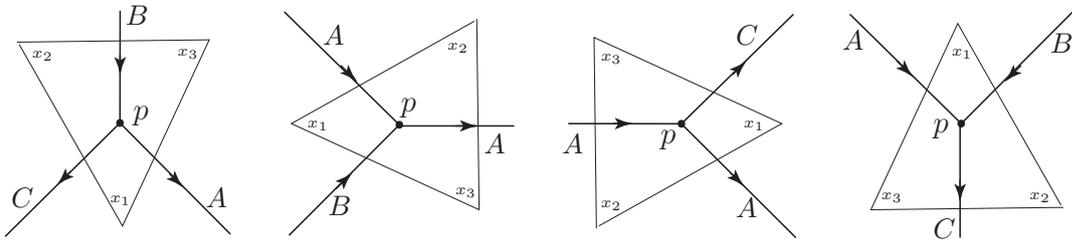


図 2.14: T-DS-diagram 上に現れる理想四面体 T_p の切頭三角形の角

同様に、 T_q および T_4 のパラメータ y および z によるパラメータ付けは図 2.15 によるものとする。もちろん、この図において $y_1 = y, y_2 = (y - 1)/y, y_3 = 1/(1 - y), z_1 = z, z_2 = (z - 1)/z, z_3 = 1/(1 - z)$ である。

2.4.2 理想四面体の各1-単体のまわりの貼り合せ (gluing equations)

さて、上のようにパラメータ付けされた理想四面体を T-DS-diagram で指定されるように \mathbb{H}^3 の等長変換で貼り合わせる、つまり、貼り合せた結果の四面体分割の双対分割が special spine Q による分割となるように貼り合わせる。この貼り合せでの四面体の一つの1-単体に集まる面角達をみるには、 Q の一つの面をみればよい。例えば、 Q の面 Y (5角形、T-DS-diagram では Y^+ と Y^-) をみると、この面に対応する四面体の1-

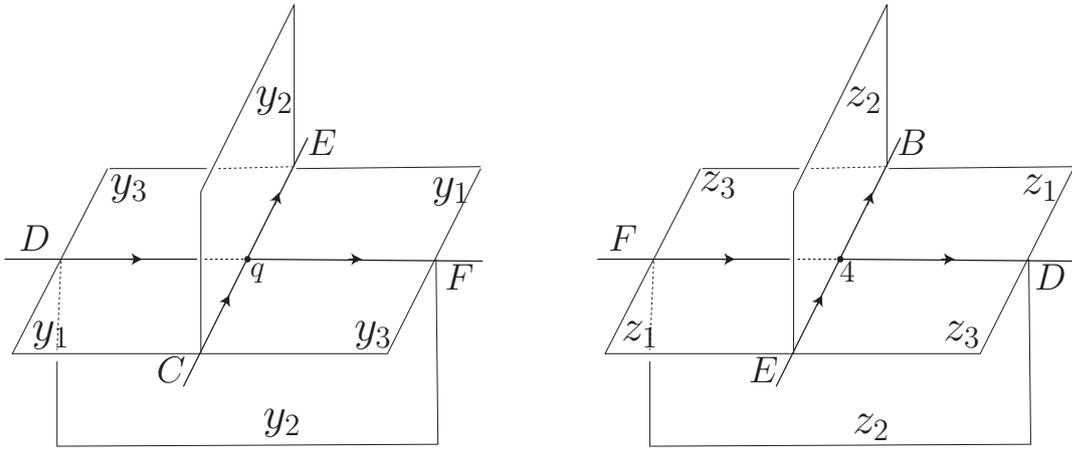


図 2.15: 理想四面体 T_q, T_4 のパラメータ付け

単体のまわりに四面体達の面角が図 2.16 に示されるように集まることが分かる。したがって、各理想四面体上の双曲構造がこの 1-単体のまわりに延びるためには、方程式

$$(2.1) \quad x_2 y_1 y_3 z_1 z_3 = 1$$

が満たされなければならない。この方程式は、 Q の面 Y に対応する 1-単体における gluing equation と呼ばれる。

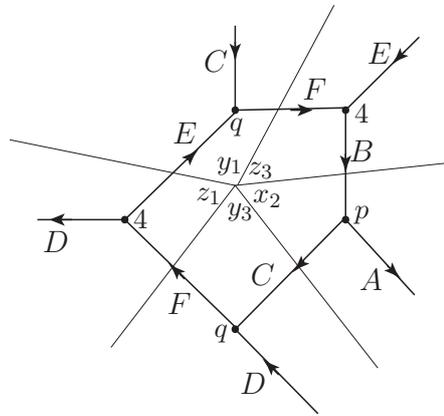


図 2.16: 理想四面体の一つの 1-単体のまわりの貼り合せ

同様に、 Q の面 Z および X それぞれに対応する 1-単体における gluing equation は

$$(2.2) \quad x_1^2 y_1 z_1 = 1$$

$$(2.3) \quad x_2 x_3^2 y_2^2 y_3 z_2^2 z_3 = 1$$

となる。

注意 2. 三つの方程式 (2.1), (2.2), (2.3) は独立ではない。実際 $x_1 x_2 x_3 = y_1 y_2 y_3 = z_1 z_2 z_3 = -1$ より、二つの方程式から他の一つが導かれる。

2.4.3 トーラス上の閉曲線に沿う貼り合せの整合性 (holonomy conditions)

パラメータ x, y, z が gluing equations (2.1), (2.2), (2.3) を満たすとき、developing map $\widetilde{M3}_1 \rightarrow \mathbb{H}^3$ が構成される ($\widetilde{M3}_1$ は普遍被覆)。ここで、developing map 構成の基準となる理想四面体は ∞ を頂点に持つように取っておくものとする。developing map によって \mathbb{H}^3 に展開された理想四面体達の ∞ におけるホロ球面による切り口の $\mathbb{C} \subset \partial\mathbb{H}^3$ への射影をみると、切頭三角形による \mathbb{C} の三角形分割が見える。組合せ的には、この三角形分割の双対分割が普遍被覆 $p: \mathbb{C} \rightarrow T^2$ によって T-DS-diagram (図 2.3) を持ち上げたものになる (持ち上げた T-DS-diagram の一部を図 2.17 に示した)。図 2.17 に示されるように弧 $\tilde{\mu}$ を取ると $\mu = p(\tilde{\mu})$ は T^2 上の単純閉曲線であり、切頭三角形の辺 $\zeta_0 - \zeta_1$ と辺 $\zeta_2 - \zeta_3$ は互いに p によって同一視されるべき辺である。弧 $\tilde{\mu}$ に沿った developing map による $\zeta_0 - \zeta_1$ と $\zeta_2 - \zeta_3$ の差異を計算すると

$$\zeta_2 - \zeta_3 = H_\mu(\zeta_0 - \zeta_1), \quad H_\mu = -\left(-\frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{x_3}\right)x_3 y_2 = \frac{y_2}{z_2}$$

となる (図 2.17 参照)。この H_μ は μ に沿う holonomy と言われる。 T^2 上にもう一つの単純閉曲線 ν を μ と 1 点で交わるように選ぶ、すなわち $[\mu], [\nu]$ が $H_1(T^2, \mathbb{Z})$ の基底となるようにする。例えば、弧 $\tilde{\nu}$ を図 2.3 の最上部の辺 D と最下部の辺 D を結ぶもの (後出の図 3.4 も参照) を選び、 $\nu = p(\tilde{\nu})$ とすればよい。そこで、 H_μ の場合と同じように H_ν を計算すると、 $H_\nu = (y_2 z_3)/(y_3 z_2)$ が得られる。ここまで定めてきた理想四面体分割が実際に $M3_1$ の双曲構造を与えるための条件は、gluing equations (2.1), (2.2), (2.3) に加えて $H_\mu = H_\nu = 1$ が成り立つことである。これらの方程式を、 $\text{Im}(x), \text{Im}(y), \text{Im}(z)$ がすべて正という条件の下に解くと、

$$(2.4) \quad x = -\frac{1}{y}, \quad z = y, \quad y^3 + 2y - 1 = 0 \quad (\text{Im}(y) > 0)$$

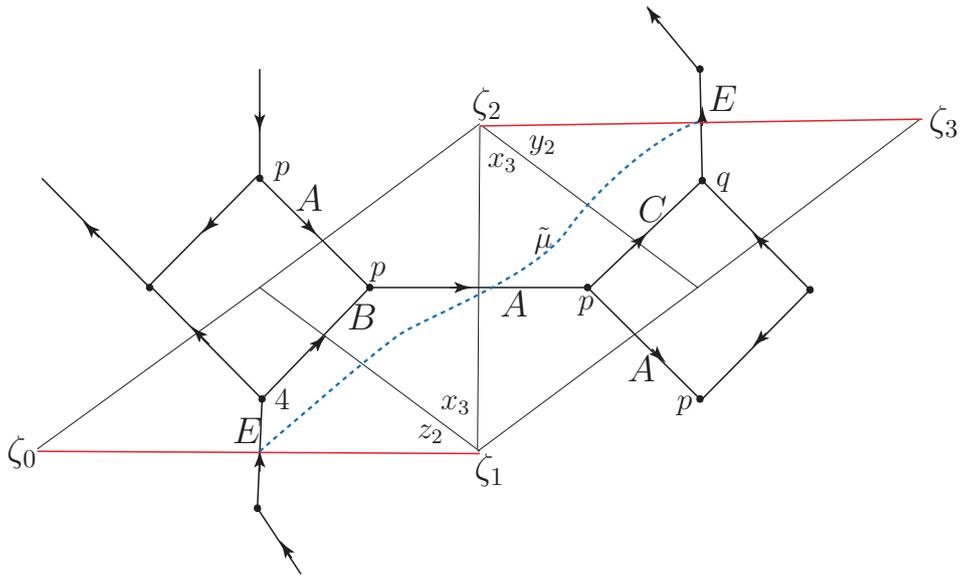


図 2.17: holonomy condition

という唯一組の解が得られる。以上で M_{3_1} に双曲構造が入ることが確認できた。数値計算では、 $\text{Re}(y) = -0.22669\dots$, $\text{Im}(y) = 1.46771\dots$ となる。解 (2.4) をみれば、 M_{3_1} が理想四面体 $T(0, 1, y, \infty)$ 2個と $T(0, 1, x, \infty)$ 1個を等長的に貼り合せて構成されることが分かる。これを $M_{3_1} \simeq 2T(0, 1, y, \infty) + T(0, 1, x, \infty)$ のように表す。また、 $T(0, 1, x, \infty) \equiv T(0, 1, x_2, \infty)$, $x_2 = (x - 1)/x = 1 + y$ であるので $M_{3_1} \simeq 2T(0, 1, y, \infty) + T(0, 1, 1 + y, \infty)$ と表せる。

2.4.4 体積 $\text{Vol}(M_{3_1})$

双曲的理想四面体の体積は Lobachevsky 関数や Bloch-Wigner 関数を用いて表すことができる ([4], [5] 参照)。ここでは、Bloch-Wigner 関数を用いる方法を紹介する。

まず、二重対数関数 (dilogarithm function) $\text{Li}_2(z)$ が

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt, \quad 0 < \arg(z-1) < 2\pi$$

で定義され、これを用いて Bloch-Wigner 関数 $D(z)$ は

$$D(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z)) + \arg(1-z) \log|z|$$

によって定義される。この $D(z)$ は、よく用いられる Lobachevsky 関数 $\mathbb{J}(\theta)$ とは

$$\text{Li}_2(e^{2i\theta}) = \text{Li}_2(1) + \theta(\theta - \pi) + 2i\mathbb{J}(\theta)$$

によって関係付けられており、次の関係式を持つ。

$$(2.5) \quad D(z) = D((z-1)/z) = D(1/(1-z)) = -D(1/z) = -D(\bar{z}).$$

また、次の「5項関係式」は有用である。

$$(2.6) \quad D(x) + D(y) + D\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + D(1-xy) + D\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0.$$

理想四面体の体積は $D(z)$ で表される、すなわち

定理 2.1. ([4]) 理想四面体 $T(0, 1, z, \infty)$ の体積は $\text{Vol}(T(0, 1, z, \infty)) = D(z)$ によって与えられる。

したがって、 $M3_1$ の体積は

$$\text{Vol}(M3_1) = 2D(y) + D(1+y), \quad y^3 + 2y - 1 = 0 \quad (\text{Im}(y) > 0).$$

と表される。数値計算値は $\text{Vol}(M3_1) = 2.56897\dots$ である。

2.5 $M2_i, M3_k$ の双曲構造

$M3_1$ の場合と同じ方法で $M2_i, M3_k$ がどのような理想四面体を組み合わせて構成されるかをみることができる。以下に、求めた結果を簡単にまとめておく。

$$M2_1 \simeq M2_2 \simeq 2T(0, 1, \omega, \infty), \quad \omega = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$M3_1 \simeq M3_2 \simeq 2T(0, 1, y, \infty) + T(0, 1, 1+y, \infty), \quad y^3 + 2y - 1 = 0 \quad (\text{Im}(y) > 0)$$

$$M3_3 \simeq M3_4 \simeq 2T(0, 1, w, \infty) + T(0, 1, 1+w, \infty), \quad w = \frac{1 + \sqrt{-7}}{2}$$

$$M3_5 \simeq 2T(0, 1, \xi, \infty) + T(0, 1, 1+\xi, \infty), \quad \xi^4 - \xi^2 + 2\xi - 1 = 0 \quad (\text{Im}(\xi) > 0)$$

$$M3_6 \simeq 3T(0, 1, u, \infty), \quad u^3 - u^2 + 1 = 0 \quad (\text{Im}(u) > 0)$$

$$M3_7 \simeq 3T(0, 1, v, \infty), \quad v^3 - v + 1 = 0 \quad (\text{Im}(v) > 0)$$

$$M3_8 \simeq M3_6 \simeq 3T(0, 1, u, \infty), \quad u^3 - u^2 + 1 = 0 \quad (\text{Im}(u) > 0)$$

$$M3_9 \simeq 3T(0, 1, \eta, \infty), \quad (\eta - 1)^4 = \eta^3 \quad (\text{Im}(\eta) > 0)$$

これらの体積の数値計算値は [2] に示されている。ここでは、 $\text{Vol}(M3_6) = \text{Vol}(M3_7)$ であることを確認しておこう。実際、

$$u^3 - u^2 + 1 = 0 \quad (\text{Im}(u) > 0), \quad v^3 - v + 1 = 0 \quad (\text{Im}(v) > 0)$$

であるとする、 $v = 1/\bar{u}$ となり、関係式 (2.6) より

$$\text{Vol}(M3_6) = 3D(u) = 3D(v) = \text{Vol}(M3_7)$$

が導かれる。

3 T-DS-diagram からの Dehn 充填

T-DS-diagram $T\Delta = (T^2, h, G)$ と $\partial W(T\Delta)$ 上の単純閉曲線 γ が与えられたとき、Dehn 充填 $M(T\Delta; \gamma)$ が定まる (§2.3 参照)。この節では、 $T\Delta$ から閉多様体 $M(T\Delta; \gamma)$ の special spine あるいは DS-diagram を構成する方法を説明する。

コンパクト多様体 $W(T\Delta) = \tilde{h}(T^2 \times [0, 1])$ は、 $Q = h(T^2 \times \{0\})$ を special spine に持ち、その境界 $\partial W(T\Delta) = T^2 \times \{1\}$ は T^2 と同一視される。 $\gamma \subset T^2$ と見做し、円環面 $A_\gamma \subset T^2 \times [0, 1]$ を $A_\gamma = \gamma \times [0, 1]$ と定める。 γ を $\gamma \times \{0\}$ が $T^2 \times \{0\}$ 上でグラフ G と一般の位置にあるように選んでおけば、 $P' = Q \cup \tilde{h}(A_\gamma)$ は境界付の special polyhedron となる (境界付 special polyhedron については [1] 参照)。 $M(T\Delta; \gamma)$ の構成の仕方から、 $\partial P' = \gamma \times \{1\}$ に円板 D を $M(T\Delta; \gamma)$ の中で貼り付けて (境界なしの) special polyhedron $P = P' \cup D$ を作ることができる。このとき、 $M(T\Delta; \gamma) - P$ は開 3-球体、すなわち P は閉多様体 $M(T\Delta; \gamma)$ の special spine となる。さらに、 $X = \tilde{h}(\text{int}(A_\gamma)) \cup D$ は P の一つの面であり、 P, X が定める T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ が最初に与えられた $T\Delta$ そのものである。

3.1 $M3_1$ の Dehn 充填

例として、再び $M3_1$ (図 2.3) を取り上げよう。まず、slope として図 2.17 で与えられる $\mu = p(\tilde{\mu})$ を採用した場合を考える (図 3.1 参照)。この場合には、 μ は $S(Q)$ と 2 点 (図 3.1 の a および e を T^2 上の点とみたもの) で交わり、 μ はこれら 2 点により図のように 2 つの弧 μ_1, μ_2 に分割される。 μ_1, μ_2 それぞれに対し、 $h^{-1}(h(\mu_i)) = \mu_i \cup \mu'_i$

となる弧 μ'_1, μ'_2 が図 3.1 のように与えられる。図 3.1 を T-DS-diagram が描かれたトーラス上の図と見て、 μ を slope とする Dehn 充填 $M(T\Delta; \mu)$ の DS-diagram を次のような手順 (1), (2), (3) で得ることができる。

- (1) トーラスを単純閉曲線 $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ で切り開き円環面を作り、さらにこの円環面の2つの境界それぞれに円板を貼り付け2-球面を作る。
- (2) μ'_i は μ_i と書き換える。
- (3) 辺 A は頂点 a で分割し A_1, A_2 とし、辺 E は頂点 e で分割し E_1, E_2 とする。

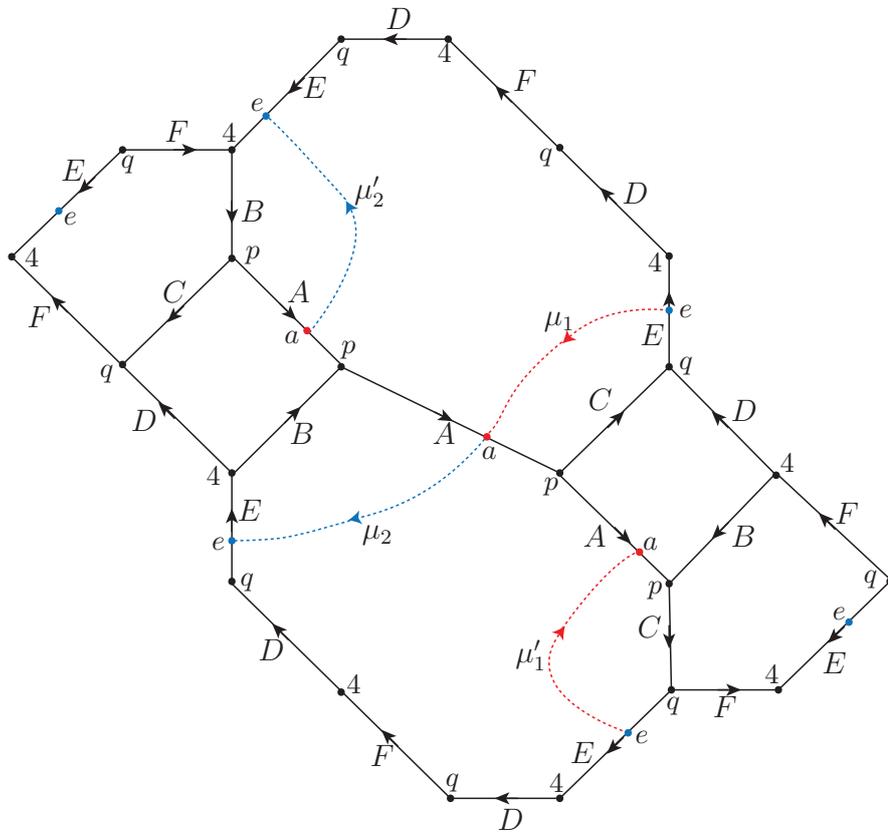
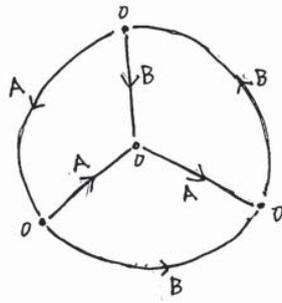
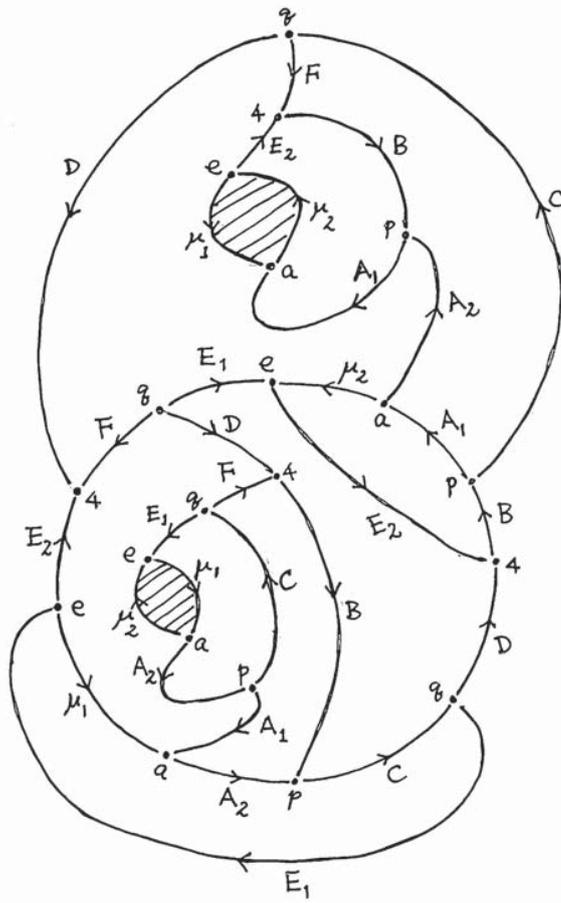


図 3.1: Dehn 充填



$L(5,2)$ の標準形

図 3.2: $M(T\Delta; \mu)$ の DS-diagram

このようにして得られた 2-球面上のダイアグラムが 図 3.2 の上図である。これが DS-diagram であることは容易に分かる。これが表す special spine を P 、図中の斜線部に対応する P の面を X とすると、DS-knot $k(P, X)$ の T-DS-diagram $T\Delta(P, X)$ が元の T-DS-diagram と一致することも容易に確認できる。したがって、Dehn 充填で得られる多様体 $M(T\Delta; \mu)$ は 図 3.2 の DS-diagram で与えられ、この多様体内の結び目 $k(P, X)$ の補空間が 図 2.3 の T-DS-diagram となることが確認された。また、この DS-diagram から基本群が求められ $\pi_1(M(T\Delta; \mu)) = \mathbb{Z}_5$ であることが分かる。そこで、この DS-diagram に多様体を不変にする変形を施す（実際には二回の ”2 角形潰し”）と 図 3.2 の下図にまで変形できる。これはレンズ空間 $L(5, 2)$ の標準形として知られたものであるので、 $M(T\Delta; \mu) = L(5, 2)$ と結論される。

注意 3. 図 3.2 の DS-diagram を描くまでもなく、 $M(T\Delta; \mu)$ の基本群の表示は 図 3.1 から得ることができる。ただし、その多様体がどのようなものかを確定するためには、DS-diagram の変形が必要になる。

注意 4. 図 3.2 の上図から下図への変形の過程で目当ての結び目に対応していた DS-diagram の面は消滅してしまう。したがって、標準形では結び目を特定することはできない。

3.2 他の slope での $M3_1$ の Dehn 充填

図 3.3 の $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$ を slope とする Dehn 充填 $M(T\Delta; \lambda)$ の基本群の表示を求め、それを計算すると $\pi_1(M(T\Delta; \lambda)) = \mathbb{Z}_{15}$ であることが分かる。したがって、 $M(T\Delta; \lambda)$ はレンズ空間 $L(15, q)$ であることが分かるが、 q の値を確定するには DS-diagram を標準形まで変形しなければならない。

注意 5. DS-diagram の頂点数からみて、おそらく $M(T\Delta; \lambda) = L(15, 4)$ であると思われる。

さらに、図 3.4 の slope $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3 \cup \nu_4$ での Dehn 充填 $M(T\Delta; \nu)$ では、

$$\pi_1(M(T\Delta; \nu)) = \langle a_1, a_2 \mid a_1 a_2 a_1 a_2^2 a_1^2 a_2^2, a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1} a_2^{-1} \rangle$$

と基本群の表示が得られ、 $H_1(M(T\Delta; \nu), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{10}$ が分かる。この基本群の表示から $\pi_1(M(T\Delta; \nu))$ が非可換群であることも分かる。

注意 6. 双曲結び目の充填については、有限個の slope を除いては閉双曲多様体を得られることが知られており、また非双曲多様体を与える slope は”短い” slope であることも知られている。したがって、レンズ空間を与える slope を調べるには、”短い” slope のみを調べればよい。 $M3_1$ については、レンズ空間を与える slope は、 μ, λ の2つのみのようである。

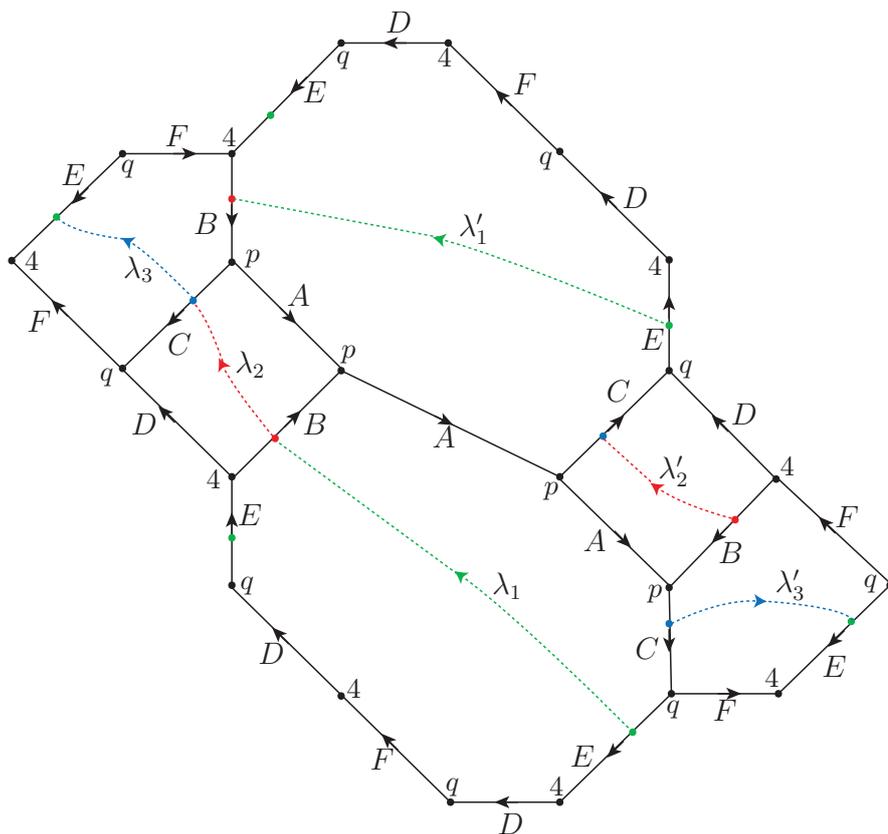


図 3.3: slope $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$ での Dehn 充填

注意 7. 図 3.4 では、 ν_i と ν'_j が交わる。この交わりも DS-diagram の頂点として付け加わることを注意しておく。したがって、ここで得られる Dehn 充填 $M(T\Delta; \nu)$ の special spine (DS-diagram) の頂点数は 6 である。Matveev 氏のリストによれば、レンズ空間以外で頂点数 6、しかも $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{10}$ である閉多様体は唯一つ（これは 2-

球面を底多様体とし特異ファイバー 3 本のザイフェルト多様体) である。 $M(T\Delta; \nu)$ はおそらくこの多様体であろう。

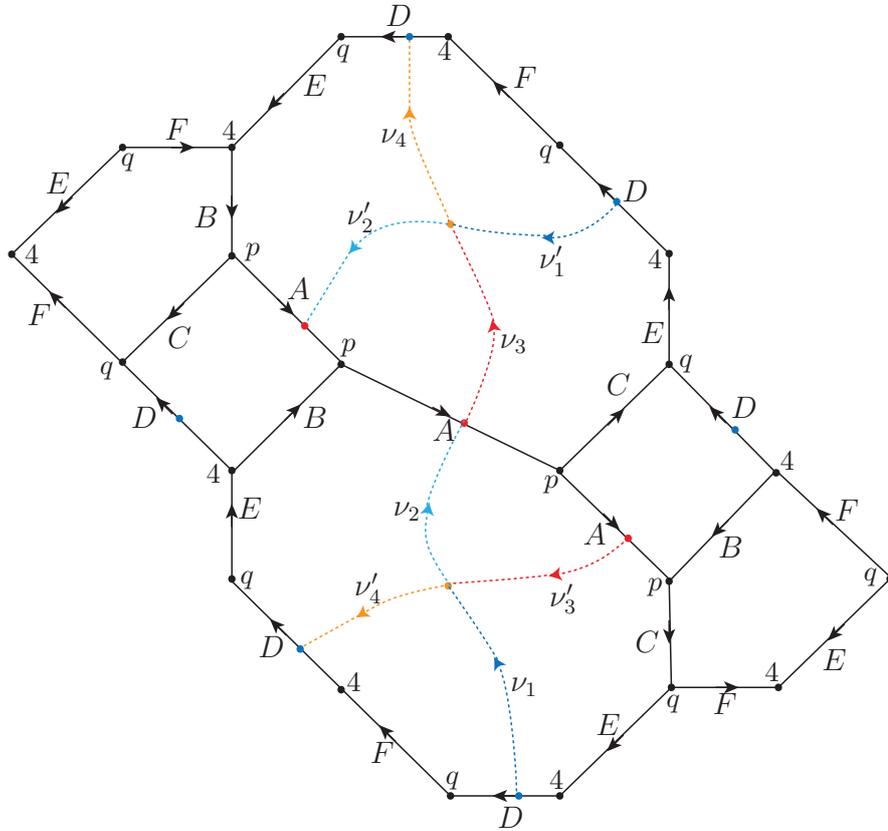


図 3.4: slope $\nu = \nu_1 \cup \nu_2 \cup \nu_3 \cup \nu_4$ での Dehn 充填

3.3 M_{2_i} ($i = 1, 2$), M_{3_j} ($2 \leq j \leq 9$) の Dehn 充填

M_{3_1} の場合と同様にして、 M_{3_i} ($2 \leq i \leq 9$) の Dehn 充填をそれぞれいくつかの slope で調べてみた。

すでに述べたように、 M_{2_1} は S^3 内の 4_1 -knot (8 の字結び目) の補空間であり、他の slope での Dehn 充填ではレンズ空間は得られない。 M_{2_2} はレンズ空間 $L(5, 4)$ 内のあ

る結び目の補空間となることもすでに述べた (§2.1)。ここで、あえて $L(5, 4)$ ($L(5, 1)$ ではなく) と記したのは、この結び目が (5, 4)-type レンズ空間のザイフェルト構造を記述する標準的な DS-diagram に現れる特徴的な DS-knot であるからである。また、 M_{2_2} も他にレンズ空間を与える slope を持たない。

次に、 M_{3_j} の Dehn 充填でいかなるレンズ空間が得られるかを列挙する。

$$M_{3_1} \subset L(5, 2), L(15, ?)$$

$$M_{3_2} \subset L(3, 1)$$

$$M_{3_3} \subset L(2, 1)$$

$$M_{3_4} \subset L(6, 5)$$

$$M_{3_5} \subset L(9, 4), L(13, 3)$$

$$M_{3_6} \subset S^3 \text{ (5}_2\text{-knot)}$$

$$M_{3_7} \subset S^3 \text{ (the pretzel knot } P(-2, 3, 7)) \text{ and } M_{3_7} \subset L(18, ?), L(19, ?)$$

$$M_{3_8} \subset L(7, 2), L(14, ?), L(21, ?)$$

$$M_{3_9} \subset L(6, 1), L(17, ?)$$

上記では、§3.2 で述べた M_{3_1} の場合と同様、レンズ空間を与える slope がどのようなものであるかを T-DS-diagram 上に示すことができる。また、 $L(p, ?)$ のような記述は §3.2 と同じ理由である (他の文献において "?" が確定されているものもあるようだが、自分が確認していないものは "?" とした)。

4 M_{2_i}, M_{3_j} の相互関連

前節最後の表を見ると、複数のレンズ空間が Dehn 充填により得られるものがいくつかある、すなわち、 $M_{3_1}, M_{3_5}, M_{3_7}, M_{3_8}, M_{3_9}$ である。これらに共通することがある。それは、それらの special spine の特異点集合がループを持つということである。ここで、special spine Q の特異点集合 $S(Q)$ のループとは、 $S(Q)$ を $V(Q)$ を頂点集合とする 4-正則グラフ (一般には単純グラフではない) とみたときに両端点が同一点であるような辺のことをいう。複数のレンズ空間充填を許容することが $S(Q)$ のループと結びつくのかは定かではないが、兎に角このループからみた相互の関連性をみとめることにする。

4.1 special spine の特異点集合内のループ

この分節の議論は DS-diagram の場合でも同様であるが、ここでは T-DS-diagram を考える (§1.1、§2.3 参照)。 Q を 3次元多様体に埋め込み可能な special polyhedron であり、 $W(Q)$ は向き付可能で、 $\partial W(Q)$ は 2次元トーラスとする。さらに、この T-DS-diagram を $T\Delta = (T^2, h, G)$ とする。

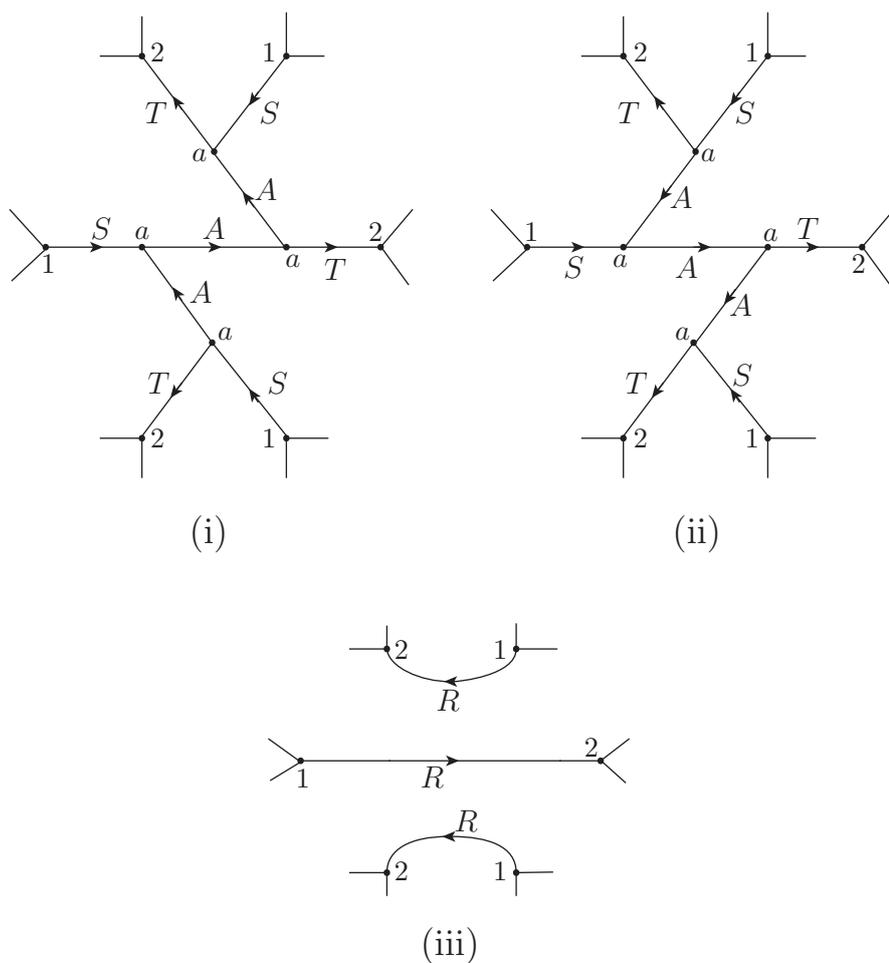


図 4.1: T-DS-diagram に現れる special spine のループ辺

T-DS-diagram 上では、 $S(Q)$ のループは 図 4.1(i) または (ii) のように現れる。両図で辺 A がループ辺を表す、すなわち $\tilde{h}(A)$ が $S(Q)$ のループである。ループ辺 $\tilde{h}(A)$

は $W(T\Delta)$ 内の結び目でもある。この結び目を $k(T\Delta; A)$ と表すことにする。

注意 8. special spine のループ辺の T-DS-diagram (または DS-diagram) への現れ方にはもう一つのタイプがある。それは $\tilde{h}(A)$ が special spine の面である円板の境界となる場合である。このタイプのループ辺は、既約な T-DS-diagram には現れない。この稿では考える special spine は既約なものであるから、円板面の境界となるようなループ辺は考えない。

その一部に 図 4.1(i) を持つ T-DS-diagram $T\Delta_1$ が与えられたとき、この部分を 図 4.1(ii) に置き換えたもの $T\Delta_2$ もまた T-DS-diagram となる。 $T\Delta_1$ から $T\Delta_2$ への (あるいは $T\Delta_2$ から $T\Delta_1$ への) 変形を **Z-switch** と呼ぶことにする。多様体としての $W(T\Delta_i)$ から $W(T\Delta_j)$ への変形は、結び目 $k(T\Delta_i; A) \subset W(T\Delta_i)$ に沿う Dehn 手術として記述できる。

注意 9. Z-switch については、もう 30 年も以前に 池田氏 が「非基本変形」という名で考察している。懐かしいことである。

もう一つ、結び目 $k(T\Delta_i; A) \subset W(T\Delta_i)$ に沿う特徴的な Dehn 手術がある。それは、図 4.1(i),(ii) を 図 4.1(iii) に変えるものである。この変形を **Z-remove** と呼ぼう。Z-remove は special spine の頂点数を 1 つ減らす変形であり、ループ辺は消滅する。

注意 10. Z-remove の逆変形は、T-DS-diagram が対隣接面を持つときに可能である。「対隣接面」については、河野氏の記事を参照のこと。

注意 11. DS-diagram のループ辺に沿う一般の Dehn 手術については、山下氏による手術係数の連分数展開と関連付けた結果がある。また、これを Turaev-Viro 不変量に応用した 谷口氏 の結果がある。

4.2 $M3_1$ からの Z-switch と Z-remove

$M3_1$ (図 2.3) から Z-switch および Z-remove で得られる T-DS-diagram をそれぞれ、図 4.2 および 図 4.3 に示した。これらは、いままでに示した T-DS-diagram の何れとも異なるものである (それぞれを $L3_1$, $L2_1$ と仮に名付けた)。 $L3_1$ も $L2_1$ もともに非双曲的である。

$L3_1$ の Dehn 充填を調べてみるとある slope で S^3 が得られ、この多様体が 8_{19} 結び目の補空間であることが分かる。結び目 8_{19} は、(4,3) 型のトーラス結び目であり、また pretzel 結び目 $P(-2, 3, 3)$ としての表示も持つ。

$L2_1$ の Dehn 充填では、射影空間 $L(2,1)$ を与える slope の存在が分かる。 $L2_1$ は $L(2,1)$ 内のある $(1,1)$ -結び目の補空間であることも分かる。

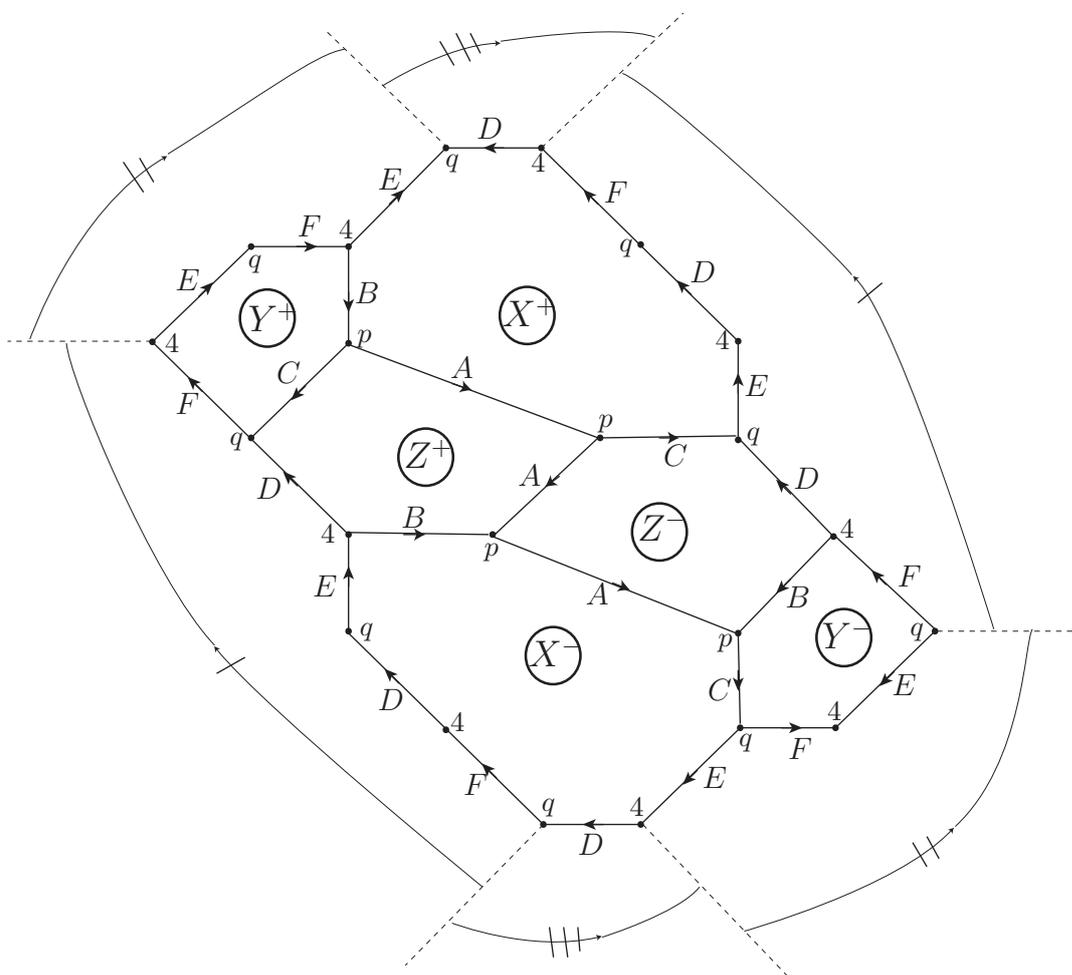


図 4.2: $L3_1$ which is obtained by Z-switch from $M3_1$

非双曲結び目の補空間の special spine を既約になるまで頂点数を減らすように変形しようとする、退化してしまうことも多い。ここで退化するとは、special polyhedron の面に annulus が発生することである。実際、 S^3 内の $(2n+1, 2)$ 型のトーラス結び目では、既約な simple spine で面として一つの annulus を持つものを構成することができる。

$L2_1$ は、非退化で既約な special spine で、しかも非双曲的であるものの内で最も単純なものである。

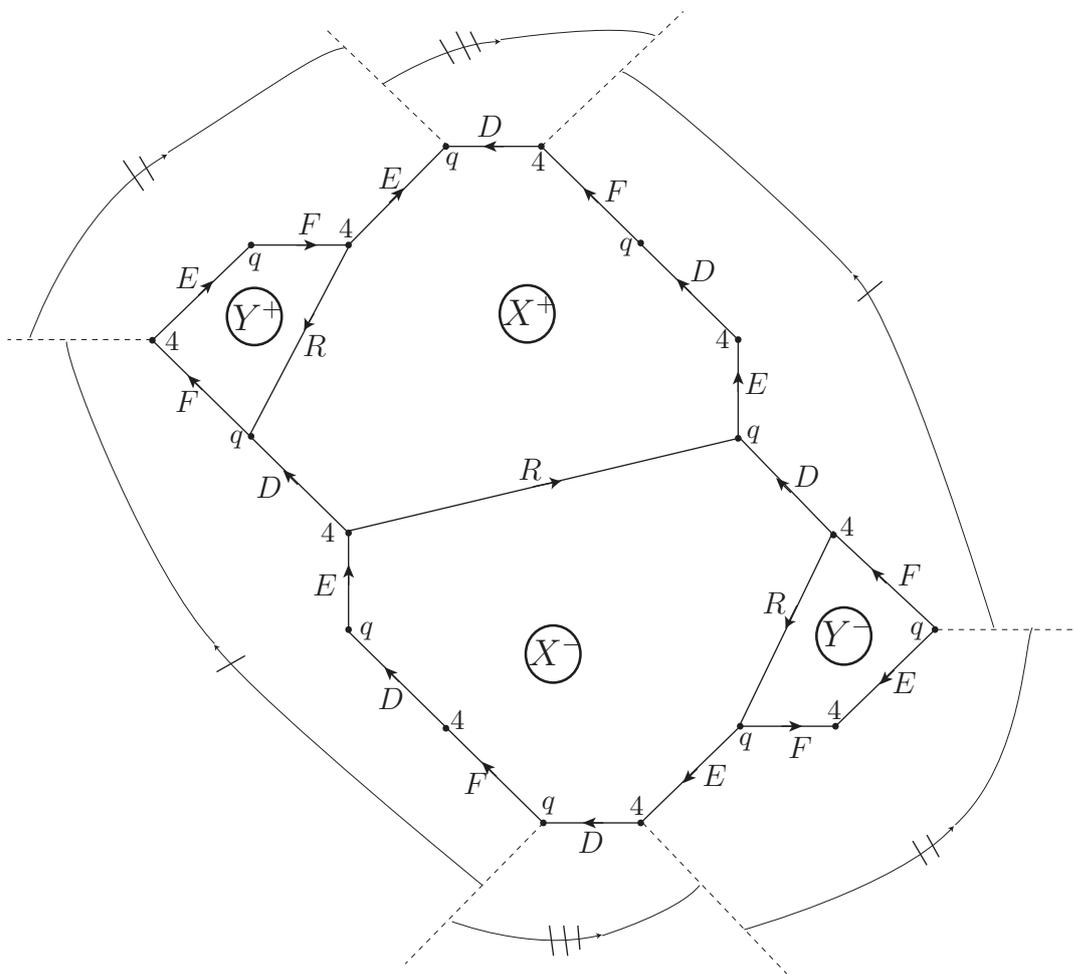


図 4.3: $L2_1$ which is obtained by Z-move from $M3_1$

4.3 M_{3_5} , M_{3_7} , M_{3_8} , M_{3_9} の Z-switch と Z-remove

この稿の最後に M_{3_5} , M_{3_7} , M_{3_8} , M_{3_9} の Z-switch と Z-remove を纏めておこう。これは、単なる T-DS-diagram の観察結果である。

- (a) M_{3_5} と M_{3_9} は互いに Z-switch で得られる。
- (b) M_{3_5} および M_{3_9} の Z-remove は M_{2_2} である。
- (c) M_{3_7} と M_{3_8} は互いに Z-switch で得られる。
- (d) M_{3_7} および M_{3_8} の Z-remove は L_{2_1} である。

参考文献

- [1] Benedetti R. and Petronio C., *Branched Standard Spines of 3-Manifolds*, Springer LNM 1653 (1997).
- [2] Callahan P.J., Hildebrand C.M., and Weeks J.R., A census of cusped hyperbolic 3-manifolds, *Math. of Computation*, vol. 68, no. 225 (1999), 321-332.
- [3] Matveev S. and Fomenko A., Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic 3-manifolds, *Russian Math. Surveys* 43 (1988), 3-24.
- [4] Zagier D., The Dilogarithm Functions, In *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II: On Conformal Field Theories, Discrete Groups and Renormalization*, 3-65, Springer, 2007.
- [5] Jinseok C, Lobachevsky function and dilogarithm function,
<http://mathlab.snu.ac.kr/top/articles/dilogarithm.pdf>
- [6] 蒲谷祐一, 結び目補空間の理想四面体分割, *HAKONE SEMINAR 23* (2007), 15-25.

Email : ishii0317@oregano.ocn.ne.jp