

3次元球面の特徴付け

慶応大・理工 石井 一平

M を 3次元閉多様体、 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を M の Heegaard 分解 (以下、略して H-分解という) とし、 $g = g(\mathcal{H})$ をその種数とする。H-分解 \mathcal{H} の core, generalized core および pseudo core を次のように定義する。

定義 0.1. K が H-分解 \mathcal{H} の (あるいは、 H_1 の) “core” であるとは、

- (1) K は H_1 内の 1-complex であり、
- (2) $H_1 \searrow K$ (H_1 は K にカラプスする)

ことと定義する。

定義 0.2. L が H-分解 \mathcal{H} の “generalized core” であるとは、

- (1) $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_g)$ が H_1 内の g 成分の絡み目 ($g = g(\mathcal{H})$) であり、
- (2) $L \subset K \subset H_1$ なる H_1 の core K が存在する

ことと定義する。

定義 0.3. H_1 内の g 成分の絡み目 $\mathcal{L} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g)$ が H-分解 \mathcal{H} の “pseudo core” であるとは、次の性質 (C.1), (C.2) をみたすような H_1 の complete meridian disk system $\vec{D} = (D_1, D_2, \dots, D_g)$ が存在することと定義する。

- (C.1) すべての $j = 1, \dots, g$ について、 $D_j \cap \alpha_j$ は唯 1 点からなる。
- (C.2) $j < k$ ならば $D_j \cap \alpha_k = \emptyset$ である。

また、(C.1), (C.2) を満たす \vec{D} を “pseudo core \mathcal{L} に付随した meridian disk system” とよぶ。

この定義のもとに、3-球面の基本的特徴付けが次のように記述される。

命題 0.4. 3次元閉多様体 M が local な generalized core を許容する H-分解を持てば、 M は 3-球面 S^3 に同相である。ただしここで、“local” とは、“ M 内に埋め込まれたある 3-球体に完全に含まれる” ことをいう。

(6)

この命題は §1 で証明され、さらにこの命題を用いて §2 では、より弱い条件によって 3-球面を特徴付ける次の定理を証明する。

定理 0.5. 3次元閉多様体 M が local な pseudo core を許容する H-分解を持てば、 M は 3-球面 S^3 に同相である。

この定理によって、次の予想がポアンカレ予想と同値になる。

予想 0.6. M が単連結であれば、 M の H-分解で local な pseudo core を許容するものが存在する。

§§3-4 では、この予想へアプローチする方法として、Dehn 手術を用いた手法を紹介する。

我々の以下での議論は、すべて PL-カテゴリーで行われる。また、この稿を通じて次の記号が用いられる：

- $\text{cl}(A)$ は A の閉包を表す。
- $A \subset B$ のとき、 $N(A, B)$ は B における A の正則近傍を表す。
- $A \subset B$ のとき、 $E(A, B)$ は B における A の外部を表す。すなわち、 $E(A, B) = \text{cl}(B - N(A, B))$ 。

1. S^3 の基本的特徴付け

この節では、命題 0.4 に M の既約性という付加的条件をつけた次の命題を証明する。この命題の証明をみれば、命題 0.4 もほぼ同様に示されることが容易に分かるであろう。

命題 1.1. M を既約な閉 3次元多様体とする。このとき、 M が local な generalized core を許容する H-分解を持つならば、 M は 3-球面 S^3 に同相である。

$\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を M の H-分解とし、 $L = (l_1, \dots, l_g) \subset H_1$ ($g = g(\mathcal{H})$) をその generalized core で local なものとする。さらに、 \mathcal{H} は local generalized core を許容する M の H-分解の中で種数が最小のものであるとする。以下では、このような H-分解 \mathcal{H} およびその local generalized core L を固定して議論する。 $L = \emptyset$ のときは、あきらかに M は S^3 に同相であるので、 $L \neq \emptyset$ とする。

$\mathfrak{B}(L)$ によって次の性質 (i)~(iii) を持つ M 内の有限個の 3-球体の族 $\vec{B} = (B_1, \dots, B_m)$ ($m = 1, 2, \dots$) のなす集合を表す。

- (i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

(ii) $L \subset \vec{B}$ ($B_1 \cup \dots \cup B_m$ も同じ記号 \vec{B} で表す。)

(iii) 任意の $j = 1, \dots, m$ について、 $B_j \cap L \neq \emptyset$

さらに、 $\mathfrak{B}(L)$ の部分集合 $\mathfrak{B}_0(L)$ を上の (i)~(iii) に加えて次の (iv) をもみたすもののなす集合と定める。

(iv) $\partial \vec{B} \cap H_1$ の各連結成分は、2-球体 D^2 に同相である。

まず、次の補題を示す。

補題 1.2. $\mathfrak{B}_0(L)$ は空集合ではない。

(証明). L が local であるという仮定によって、 L を含む 3-球体 B が存在する。 $\vec{B} \equiv (B)$ は明らかに上の条件 (i)~(iii) を満たす。

一方、 L が generalized core であるという仮定から H_1 の core K で $L \subset K$ なるものが存在する。 K は 1-complex であるから、上にとつた 3-球体 B に対し $\partial B \cap K$ は有限個の点であるとしてよい。したがって、 H_1 は K の正則近傍に ambient isotopic であるので、 $\partial B \cap H_1$ の各成分が円板となるように B を選ぶことができる。□

$\vec{B} = (B_1, \dots, B_m) \in \mathfrak{B}_0(L)$ に対し、 $\nu(B_j)$ ($1 \leq j \leq m$) で $\partial B_j \cap H_1$ の成分数を表し、 $\nu(\vec{B})$ で $\nu(B_j)$ の和を表す。

補題 1.3. $\vec{B} \in \mathfrak{B}_0(L)$ で $\nu(B_0) \leq 1$ であるような成分 B_0 を含むものが存在すれば、 M は S^3 に同相である。

(証明). まず、 $\nu(B_0) = 0$ の場合。このときは、 $\partial B_0 \subset H_2$ でかつ $B_0 \cap L \neq \emptyset$ であるから、 B_0 は L すべてを含むことになる (すなわち、 \vec{B} は B_0 のみからなる)。また、ハンドル体 H_2 は既約であるので、 ∂B_0 は H_2 内の 3-球体 B'_0 を囲む。したがって、 $M = B_0 \cup B'_0$ は 3-球面となる。

次に、 $\nu(B_0) = 1$ の場合を考える。この場合は、

$$H'_1 = H_1 \cup B_0, \quad H'_2 = \text{cl}(H_2 - B_0)$$

で定義される分解 $\mathcal{H}' = (H'_1, H'_2)$ が H-分解となる。 $B_0 \cap L \neq \emptyset$ であるから、 $g(\mathcal{H}') < g(\mathcal{H})$ となる。しかも、 $L - (L \cap B_0)$ は H'_1 の generalized core であり、これは 3-球体に含まれる。このことは、 $g(\mathcal{H})$ の最小性に矛盾する。これは、 $L = \emptyset$ すなわち $g(\mathcal{H}) = 0$ であったことを意味し、 M は S^3 と同相である。□

(8)

さて、 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_g)$ を H_2 の complete meridian disk system とする。一般性を失うことなく、 $\vec{B} \in \mathfrak{B}(L)$ に対し $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ は 1 次元多様体、すなわちその連結成分は閉曲線または ∂H_2 上の 2 点を結ぶアークであるとしてよい。

補題 1.4. $\vec{B} \in \mathfrak{B}_0(L)$ と \vec{X} を $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ のすべての連結成分がアークであるように選ぶことができる。

(証明). $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ が成分として閉曲線を持つとする。そのような成分のうち、ある meridian disk X_j の中で inner most である成分 c をとり、 c が X_j 上で囲む円板を Y とする。また、この c は \vec{B} の成分 B_0 上にあるとする。このとき、二通りの場合が考えられる。すなわち、 $Y \subset B_0$ である場合とそうでない場合である。

[$Y \subset B_0$ の場合]

この場合は、 Y によって B_0 は 2 つの球体に分けられる。すなわち、 $\text{cl}(B_0 - N(Y))$ の 2 つの成分 B_{01}, B_{02} はともに 3-球体である。したがって、 B_0 をこれら 2 つの 3-球体で置き換えて得られる 3-球体の族 \vec{B}' (ただし、 B_{0k} が L の成分を含まないときは、これを \vec{B}' から除外する) は $\mathfrak{B}_0(L)$ に属し、しかも $\partial\vec{B}' \cap \vec{X}$ の閉曲線成分の数は、 $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ よりも減少している。

[$Y \not\subset B_0$ の場合]

Y_1, Y_2 を $\partial B_0 - c$ の 2 つの成分とする。 $S_k \equiv Y \cup Y_k$ ($k=1, 2$) とすると、 S_1, S_2 はともに 2-球面である。したがって、 S_k は B_0 の外部に 3 次元多様体 V_k を囲む。このとき、 M は既約であるから、 V_1 または V_2 は 3-球体である。 V_k を 3-球体とすると、 B_0 を $B'_0 = N(B_0 \cup V_k)$ で置き換え、 \vec{B} の成分で B'_0 に含まれてしまうものを除外すると、 $\vec{B}' \in \mathfrak{B}_0(L)$ で $\partial\vec{B}' \cap \vec{X}$ がより少ない閉曲線成分を持つようにできる。

結局、いずれの場合にも閉曲線成分を減少させることができ、この操作の繰り返しですべての閉曲線成分を消去できる。□

以下では、 $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ は閉曲線成分を持たないものとする、したがって、すべての成分は ∂H_2 上の 2 点を結ぶアークであるとする。

$\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ の成分 b が “inessential” であるとは、 b が $\partial\vec{B} \cap H_2$ 上で円板を囲むこと、すなわち、 $\partial\vec{B} \cap \partial H_2$ の部分弧 b' で $b \cup b'$ が $\partial\vec{B} \cap H_2$ 上の円板を囲む単純閉曲線であるようなものが存在することをいう。

補題 1.5. $\vec{B} \in \mathfrak{B}_0(L)$ が $\nu(\vec{B})$ を最小にするものであれば、 H_2 の complete meridian disk system \vec{X} を次の性質 (i), (ii) を満たすようにとることができる。

- (i) すべての $\partial\vec{B} \cap H_1$ の成分は \vec{X} と共通部分を持つ。
- (ii) $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ は inessential な成分を持たない。

(証明). まず、 $\nu(\vec{B})$ を最小化する \vec{B} では、条件 (i) が必ず満たされることを示す。 $\partial\vec{B} \cap H_1$ の成分 Q_0 で $Q_0 \cap \vec{X} = \emptyset$ となるものが存在すると仮定し、 B_0 によって $Q_0 \subset \partial B_0$ なる \vec{B} の成分を表す。 $H_2 - \vec{X}$ は球体であるから、 ∂Q_0 は H_2 内の円板 Q_1 の境界となる。 ∂Q_0 が ∂H_1 上で円板を囲むとすると、 Q_0 は Q_1 に L と交わずにアイソトピックに変形される。この変形を \vec{B} の変形とみると、これは $\mathfrak{B}_0(L)$ 内での変形であり、さらに $\nu(\vec{B})$ を減少させる。ところが、これは $\nu(\vec{B})$ の最小性に矛盾する。一方、 ∂Q_0 が ∂H_1 上可縮でない場合は、2-球面 $Q_0 \cup Q_1$ は、H-分解 \mathcal{H} を2つの H-分解に分割し、その各々が local generalized core を持つ。これは、 M の既約性および $g(\mathcal{H})$ の最小性に矛盾する。以上によって、補題の仮定の下では条件 (i) が必然的に満たされることが示された。

次に、complete meridian disk system \vec{X} をうまく選べば、条件 (ii) を満たすようにできることを示す。 $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ が inessential な成分 b を持つとし、その b が $\partial\vec{B} \cap H_2$ 上に囲む円板を $U(b)$ で表す。ここで、 $U \equiv U(b)$ が他の $\partial\vec{B} \cap H_2$ の成分を含まないように b を選ぶことができるので、そのような b をとる。さらに、 X_j を b を含む meridian disk とし、 Y_1, Y_2 を $X_j - b$ の2つの成分とする。このとき、 X_j を $X'_j = Y_1 \cup U$ または $X'_j = Y_2 \cup U$ に置き換えることによって、新しい complete meridian disk system \vec{X}' が得られる。 X'_j を少し変形することによって、 $\partial\vec{B} \cap \vec{X}'$ の成分数を $\partial\vec{B} \cap \vec{X}$ よりも少なくできることは容易にわかる。この操作を繰り返すことによって、inessential な成分をすべてなくすことができる。□

この補題および補題 1.3 によって、命題 1.1 を証明するには次の補題を示せば十分であることがわかる。

補題 1.6. $\vec{B} = (B_1, \dots, B_m) \in \mathfrak{B}_0(L)$ および H_2 の complete meridian disk system \vec{X} が補題 1.5 の条件 (i), (ii) を満たし、しかも $\nu(B_j) \geq 2$ がすべての $j = 1, \dots, m$ について成り立つとする。このとき、 $\vec{B}' \in \mathfrak{B}_0(L)$ で $\nu(\vec{B}') < \nu(\vec{B})$ を満たすものを構成することができる。

(10)

(証明). \vec{B} および $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_g)$ を条件をみたすものとする。求めるべき \vec{B}' を構成するために、我々は \vec{B} を \vec{X} に沿って、あるいは H_1 内の proper な円板に沿って変形することを考える。そのために、まず次の定義を用意する。

定義 1.7. $X_j \cap \partial \vec{B}$ の一つの成分 b が “ X_j の中で inner most” であるとは、 b が X_j 上で囲む円板 (二つのうちのどちらか) $V(b)$ が他の $X_j \cap \partial \vec{B}$ の成分を含まないことと定義する。

(この “inner most” の定義は、 $\vec{B} \in \mathfrak{B}_0(L)$ のみならず $\vec{B} \in \mathfrak{B}(L)$ に対しても定義できることを注意しておく。)

$\vec{X} \cap \partial \vec{B}$ が閉曲線成分を持たないという仮定から、 $\vec{X} \cap \partial \vec{B}$ の成分のなかには必ず inner most なものが存在する。

もし inner most な成分 b が $\partial \vec{B} \cap H_1$ の異なる二つの成分を結ぶものであれば、[図 1.1] に示すように \vec{B} を円板 $V(b)$ に沿って H_1 へ押し込んで得られる \vec{B}' は $\mathfrak{B}_0(L)$ に属し、しかも $\nu(\vec{B}') < \nu(\vec{B})$ を満たす。したがって、この場合は 補題 1.6 が成り立つ。

[図 1.1]

以下では、すべての inner most な成分が $\partial \vec{B} \cap H_1$ の同一の成分を結んでいる場合について考える。) この場合でも、 \vec{B} を $V(b)$ に沿って H_1 へ押し込む操作は実行できる。ただしこの場合、得られる \vec{B}' は $\mathfrak{B}(L)$ の要素ではあるが、 $\mathfrak{B}_0(L)$ の要素ではない。なぜなら、この操作によって $\partial \vec{B} \cap H_1$ の成分に円板ではないものが生じるからである。

いま、 b_1 を $\vec{X} \cap \partial \vec{B}$ の成分で、ある meridian disk の中で inner most であるものとしよう。このとき、 \vec{B} を $V(b_1)$ に沿って H_1 へ押し込むことによって、 $\vec{B}^{(1)} \in \mathfrak{B}(L)$ が得られる。すると、 $\vec{X} \cap \partial \vec{B}^{(1)}$ の成分のうち、ある meridian disk 上で inner most なもの b_2 が存在する。そこで、 $\vec{B}^{(1)}$ を $V(b_2)$ に沿って H_1 内に押し込むことによって、 $\vec{B}^{(2)}$ を定めることができる。このような操作を繰り返すことによって、次のような列 b_1, b_2, \dots, b_r および $\vec{B} \equiv \vec{B}^{(0)}, \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)} \in \mathfrak{B}(L)$ を作ることもできる。

- (i) $\vec{X} \cap \partial \vec{B}^{(j)}$ の成分は $b_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_r$ である。
- (ii) b_{j+1} は $\vec{X} \cap \partial \vec{B}^{(j)}$ の inner most な成分である。
- (iii) $\vec{B}^{(j)}$ は $\vec{B}^{(j-1)}$ を $V(b_j)$ に沿って H_1 へ押し込むことによって得られる。

このような列に対して、次のことが示される。

補題 1.8. 次の (i), (ii) が成り立つような番号 j_0 および $\partial\vec{B} \cap H_1$ の成分 R_0 が存在する。

- (i) $j < j_0$ なる j については、 b_j の端点は ∂R_0 上にはない。
- (ii) b_{j_0} の一方の端点のみが ∂R_0 上にある。

(補題 1.8 の証明). $\vec{X} \cap \partial\vec{B}$ は inessential な成分を持たないから、 $\partial\vec{B} \cap H_1$ の成分 R_0 で $\vec{X} \cap \partial\vec{B}$ のどの成分もその両端点ともに ∂R_0 上にあることはないようなものが存在する。(落合氏の論文 [1] 中にある “distinguished circle” を参照。) したがって、 b_{j_0} を $\partial b_{j_0} \cap \partial R_0 \neq \emptyset$ でかつ $j < j_0$ に対しては $\partial b_j \cap \partial R_0 = \emptyset$ であるように選べば、この j_0 と R_0 が補題の条件 (i), (ii) を満たす。□

補題 1.8 のような b_1, b_2, \dots, b_{j_0} をとり、 $\vec{B}^{(j)} \in \mathfrak{B}(L)$ ($j = 1, \dots, j_0$) を上に定めたようにとる。このとき、 $\vec{B}^{(j_0)}$ の構成法から、 $\partial\vec{B}^{(j_0)}$ と H_1 の交わりは $\partial\vec{B} \cap H_1$ および $N(b_j, \partial\vec{B})$ ($j = 1, \dots, j_0$) を H_1 へ押し込んだ部分からなる。($N(A, B)$ は B 内における A の正則近傍を表す。) この $N(b_j, \partial\vec{B})$ を H_1 に押し込むことによって生じた $\partial\vec{B}^{(j_0)} \cap H_1$ の部分を “ j -th strip” とよぶ。

所要の $\vec{B}' \in \mathfrak{B}_0(L)$ を得るために、以下において $\vec{B}_*^{(0)} \equiv \vec{B}^{(j_0)}$ を H_1 内の proper な円板に沿って変形することを考える。

まず、どのような変形を考えるのかを説明する。 \vec{B}_* を $\mathfrak{B}(L)$ の要素、 Q を H_1 内の proper な円板 (あるいは、互いに交わらない proper な円板の族) で L とは共有点を持たないものとしよう。ここで、 Q は meridian disk ではなく、境界 ∂H_1 に平行なものであってもよい。また、 $Q \cap \partial\vec{B}_*$ の各成分は $\partial\vec{B}_* \cap \partial H_1$ 上の 2 点を結ぶアークであるとする。

定義 1.9. $Q \cap \partial\vec{B}_*$ の連結成分 w が “inessential” であるとは、 w が $\partial\vec{B}_* \cap H_1$ 上で円板 $U_{\vec{B}_*}(w)$ を囲むこと、すなわち、 $\partial(\partial\vec{B}_* \cap H_1)$ の部分弧 w' で $\partial U_{\vec{B}_*}(w) = w \cup w'$ となる $\partial\vec{B}_* \cap H_1$ 上の円板 $U_{\vec{B}_*}(w)$ が存在することをいう。

また、inessential な成分 w は $U_{\vec{B}_*}(w)$ が他の $Q \cap \partial\vec{B}_*$ の成分を含まないとき、“inner most” であるといわれる。

いま、 Q を H_1 に proper に埋め込まれた円板、 w を $Q \cap \partial\vec{B}_*$ の成分で inessential でかつ inner most なものとしよう。そして、 Y_1, Y_2 を $Q - w$ の 2 つの成分とする。さらに、 Q_1, Q_2 を、[図 1.2] のよう

(12)

に $Y_k \cup U_{\vec{B}_*}(w)$ ($k = 1, 2$) を少し変形して得られる proper な円板とする。このとき、 Q を 2 つの円板 Q_1, Q_2 に置き換えることによって、inessential な成分 w を消すことができる。この変形を繰り返すことによって、 $Q' \cap \partial \vec{B}_*$ が inessential な成分を持たないような proper な円板の族 Q' が得られる。しかも、この変形によって inessential でない成分は変化を受けない。

[図 1.2]

定義 1.10. $Q \cap \partial \vec{B}_*$ の成分 w が “ Q の中で inner most” であるとは、 w が囲む Q の部分円板 (のうちの 1 つ) $U_Q(w)$ が他の成分を含まないことをいう。

w が Q の中で inner most な $Q \cap \partial \vec{B}_*$ の成分とすると、 \vec{B}_* を $U_Q(w)$ に沿って H_2 へ押し込むことによって、新たな $\mathfrak{B}(L)$ の要素を得ることができる。このように得られたものを $\vec{B}_*[Q, w]$ で表す。以下で考える $\vec{B}_* \in \mathfrak{B}(L)$ の変形は、 \vec{B}_* から $\vec{B}_*[Q, w]$ への変形である。

さて、 $Q^{(0)}$ を H_1 内の proper で互いに交わらない円板の族で次の 3 条件を満たすものとする。

- (1) $Q^{(0)} \cap L = \emptyset$,
- (2) $Q^{(0)} \cap \partial \vec{B} = \emptyset$,
- (3) 任意の $j = 1, \dots, j_0$ に対して $Q^{(0)} \cap \partial V(b_j) \neq \emptyset$.

円板は ∂H_1 に平行なものでもよいので、このような $Q^{(0)}$ をとることが可能である。このような $Q^{(0)}$ に対しては、 $Q^{(0)} \cap \partial \vec{B}^{(j_0)}$ は j -th strip に横断的なアークからなり、すべての $j = 1, \dots, j_0$ について j -th strip 上にその成分を持つ。([図 1.3] を参照。) この $Q^{(0)}$ および $\vec{B}_*^{(0)} \equiv \vec{B}^{(j_0)}$ から出発し、 $Q^{(k)}$ と $\vec{B}_*^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$) を以下のように帰納的に定義する。

[操作 (I-k) : $Q^{(k)}, \vec{B}_*^{(k)}$ から $Q^{(k+1)}$ を構成]

上に述べた方法 (円板 $U_{\vec{B}_*}(w)$ を用いる方法) によって、 $Q^{(k)} \cap \partial \vec{B}_*^{(k)}$ の inessential な成分消すように $Q^{(k)}$ から $Q^{(k+1)}$ を構成する。

[操作 (II-k) : $Q^{(k+1)}, \vec{B}_*^{(k)}$ から $\vec{B}_*^{(k+1)}$ を構成]

$Q^{(k+1)} \cap \partial \vec{B}_*^{(k)}$ の成分のうち $Q^{(k+1)}$ 内で inner most であるもの w を選び、 $\vec{B}_*^{(k+1)} = \vec{B}_*^{(k)}[Q^{(k+1)}, w]$ と定義する。

[図 1.3]

これらの操作を $(I-k) \rightarrow (II-k) \rightarrow (I-k+1) \dots$ の順に施す。補題 1.8 から $Q^{(0)} \cap \partial \vec{B}_*^{(0)}$ の j_0 -th strip 上の成分はすべて inessential であるので、操作 $(I-0)$ によってこれらの成分は消去される。また、操作 $(II-k)$ を施すために選ばれた成分が j -th strip 上にあれば、同じ strip 上にある $Q^{(k+1)} \cap \partial \vec{B}_*^{(k+1)}$ の他の成分はすべて inessential であり、操作 $(I-k+1)$ によってこれらは消去される。したがって、すべての strip \mathcal{L} に $Q^{(0)} \cap \partial \vec{B}_*^{(0)}$ の成分があることから、有限回のこれらの操作の後に $\vec{B}' \in \mathfrak{B}_0(L)$ を得ることができ、 $\nu(\vec{B}') < \nu(\vec{B})$ が成り立つ。([図 1.3] を参照。)

これで補題 1.6 が証明され、したがって命題 1.1 が証明された。□

2. 定理 0.5 の証明

$\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を M の H -分解、 $\mathcal{L} \subset H_1$ をその pseudo core で local なものとする。容易にわかるように、このような pseudo core を持つとすると、 M は必然的にホモトピー 3-球面となる。

α_j ($j = 1, \dots, g = g(\mathcal{H})$) を \mathcal{L} の成分、 $\vec{D} = (D_1, \dots, D_g)$ を \mathcal{L} に付随した H_1 の complete meridian disk system とする。すなわち、次の (C.1), (C.2) を仮定する。

(C.1) すべての $j = 1, \dots, g$ について、 α_j は D_j と唯 1 点で交わる。

(C.2) $i < j$ ならば、 $D_i \cap \alpha_j = \emptyset$ である。

最初に、証明の煩雑さを避けるために、次の条件 (C.3) も満たされている場合を証明する。

(C.3) 各 α_k が M に埋め込まれた円板 Δ_k の境界となる。(一般には、 $\Delta_k \cap \Delta_{k'} \neq \emptyset$)

命題 0.4 により、定理 0.5 を示すには次の補題を証明すれば十分である。

補題 2.1. 上の条件 (C.1)~(C.3) を満たすような \mathcal{L} および \vec{D} が存在すれば、 H_1 の generalized core でしかも local なものを構成することができる。

この補題を証明するために、「性質 (P_k) 」を次のように定義する。

(14)

定義 2.2. (性質 (P_k) ($k = 0, 1, 2, \dots, g$))

H_1 の complete meridian disk system $\vec{D} = (D_1, \dots, D_g)$ が (pseudo core \mathcal{L} に関して) 性質 (P_k) を持つとは、 ∂H_1 上の単純閉曲線の族 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ が存在して次の条件 (a)~(g) を満たすことをいう。

- (a) g 成分の絡み目 $\mathcal{L}^{(k)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_g)$ は local な絡み目である。
- (b) $j = k+1, \dots, g$ に対して、 $\alpha_j \cap D_j$ は唯 1 点からなる。
- (c) $i > k$ かつ $i > j$ ならば、 $\alpha_i \cap D_j = \emptyset$ である。
- (d) $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ ($i \neq j$) である。
- (e) $j = 1, \dots, k$ に対して、 $\gamma_j \cap D_j$ は唯 1 点からなる。
- (f) $1 \leq i, j \leq k$ かつ $i \neq j$ であれば、 $\gamma_i \cap D_j = \emptyset$ である。
- (g) $1 \leq i \leq k$ かつ $j > k$ であれば、 $\gamma_i \cap D_j$ である。

条件 (C.1), (C.2) により、 $\vec{D}^{(0)} \equiv \vec{D}$ は性質 (P_0) を持つ。したがって、補題 2.1 の証明のためには次の補題を示せばよい。

補題 2.3. 性質 (P_{k-1}) を満たす complete meridian disk system が存在すれば、性質 (P_k) を満たすものを構成することができる ($k = 1, 2, \dots, g$)。

実際、この補題によって性質 (P_g) を持つ $\vec{D}^{(g)} = (D_1^{(g)}, \dots, D_g^{(g)})$ が存在し、したがって、 ∂H_1 上の絡み目 $\mathcal{L}^{(g)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ で次の条件 (i)~(iii) を満たすものが存在する。

- (i) $\mathcal{L}^{(g)}$ は local な絡み目である。
- (ii) $i \neq j$ ならば、 $\gamma_i \cap D_j^{(g)} = \emptyset$ である。
- (iii) すべての j に対して、 $\gamma_j \cap D_j^{(g)}$ は唯 1 点からなる。

これらの γ_j ($j = 1, \dots, g$) を $\partial H_1 - \vec{D}^{(g)}$ 上のアークで結べば、 H_1 の core が得られるので、 $\mathcal{L}^{(g)}$ は H_1 の generalized core となる。したがって、補題 2.3 から補題 2.1 が導かれる。

(補題 2.3 の証明). $\vec{D}^{(k-1)} = (D_1^{(k-1)}, \dots, D_g^{(k-1)})$ を性質 (P_{k-1}) を持つ complete meridian disk system とし、 $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ を対応する ∂H_1 上の単純閉曲線の族とする。性質 (P_{k-1}) により絡み目 $\mathcal{L}^{(k-1)}$ は local であるから、 $\mathcal{L}^{(k-1)} \subset B$ となる M 内の 3-球体 B が存在する。また、性質 (P_{k-1}) における条件 (a)~(f) から、 $D_j^{(k-1)} \subset B$ ($j = 1, \dots, k$) としてよい。

性質 (P_k) を持つ $\vec{D}^{(k)}$ を構成するために、我々はまず、閉曲線 γ_k を構成する。すなわち $\vec{D}^{(k-1)}$ が、 ∂H_1 上の単純閉曲線の族 $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k$

に対して、性質 (P_k) 中の条件 (a)~(f) を満たすように γ_k を構成する。そしてその後、条件 (g) をも満たすように $\bar{D}^{(k-1)}$ を修正することによって $\bar{D}^{(k)}$ を構成する。

条件 (C.3) により、 α_k を張る円板 $X = X(\alpha_k)$ が存在する。また、性質 (P_{k-1}) によって、この円板 X は次の (1)~(3) を満たすようにとることができる。

- (1) X は上にとった 3-球体 B に含まれる。
- (2) $j = 1, \dots, k-1$ については、 $X \cap D_j^{(k-1)} = \emptyset$ である。
- (3) $X \cap D_k^{(k-1)}$ は連結で、それは α_k と ∂H_1 を結ぶ 1 本のアークである。

このような X をとると、 $X \cap \partial H_1$ の成分 γ'_k であって $\gamma'_k \cap D_k^{(k-1)} \neq \emptyset$ となるものが唯一つ定まる。この γ'_k は、 ∂H_1 上の単純閉曲線で 3-球体 B に含まれる。しかも、 $\gamma'_k \cap D_k^{(k-1)}$ は唯 1 点で、 $\gamma'_k \cap D_j^{(k-1)} = \emptyset$ ($1 \leq j \leq k-1$) を満たしている。しかし、一般には $\gamma'_k \cap \gamma_j \neq \emptyset$ ($1 \leq j \leq k-1$) であり、また $\gamma'_k \cap D_i^{(k-1)} \neq \emptyset$ ($k < i$) である。したがって、所要の γ_k を得るためには、この γ'_k および $\bar{D}^{(k-1)}$ に修正を加えなくてはならない。まず、 γ'_k の修正を考える。

ある j ($1 \leq j \leq k-1$) に対し、 $\gamma'_k \cap \gamma_j \neq \emptyset$ とする。 $D_j^{(k-1)}$ に平行な meridian disk D'_j をとり ([図 2.1] を参照)、 x_0 を γ_j と D'_j との唯一つの交点とする。性質 (P_{k-1}) 中の条件 (d)~(g) によって、 $\gamma'_k \cap \gamma_j$ 上の点 x_1 を、 γ_j の部分弧 $\beta = \overline{x_0 x_1}$ が端点以外には γ'_k および $\bar{D}^{(k-1)}$ と交点を持たないようにとることができる。そこで、 γ''_k を γ'_k と $\partial D'_j$ を β を中心とする ∂H_1 上の帯で繋いで得られる単純閉曲線とする ([図 2.1] 参照)。 γ_j および D'_j は 3-球体 B に含まれているから、このように定めた γ''_k もまた B に含まれる。しかも、この修正によって、 $\bar{D}^{(k-1)}$ との交わりに変化はなく、 γ_j ($1 \leq j \leq k-1$) との交わりは減少している。したがって、この操作の有限回の繰返しによって、絡み目 $\mathcal{L}^{(k)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_g)$ と $\bar{D}^{(k-1)}$ が性質 (P_k) 中の条件 (a)~(f) を満たすように、 γ_k を構成することができる。

[図 2.1]

次に、 $D_i^{(k-1)}$ ($i > k$) を修正して、性質 (P_k) を満たす $\bar{D}^{(k)}$ を構成する。すなわち、条件 (a)~(f) を保ちながら、 γ_k と $D_i^{(k-1)}$ との交わりを消去する。この修正のために、次の定義が必要となる。

定義 2.4. D および D' を互いに交わらない H_1 内の proper な円板とし、 b を ∂H_1 上で D と D' とを結ぶアークとする。このとき、proper な円板 $\delta(D, D'; b)$ を [図 2.2] に示されたようなものと定める。この $\delta(D, D'; b)$ のことを、“ D と D' との b に沿う band sum” という。

[図 2.2]

$D_k^{(k-1)}$ に平行な meridian disk D'_k をとり、 D'_k と γ_k の唯一の交点を y_0 で表す。さて、 $\gamma_k \cap D_i^{(k-1)} \neq \emptyset$ ($i > k$) としよう。これらの交点のうちから、 y_1 を γ_k の部分弧 $b = \overline{y_0 y_1}$ が他の交点を含まないようにとる。この y_1 が $D_{i_0}^{(k-1)}$ 上にあるとし、 D'_{i_0} を $D'_{i_0} = \delta(D'_k, D_{i_0}^{(k-1)}; b)$ と定める。 $\alpha_i \cap D'_k = \emptyset$ ($i > k$) でかつ α_i は H_1 の内部にあるから、このように定められた D'_{i_0} は α_i とは交わらない。したがって、 $D_{i_0}^{(k-1)}$ を D'_{i_0} で置き換えることによって、性質 (P_k) 中の条件 (a)~(f) を損なうことなく γ_k との交点数を減少させることができる。そして、この操作を繰り返せば、性質 (P_k) のすべての条件を満足する complete meridian disk system $\vec{D}^{(k)}$ を得ることができる。

これで、補題 2.3 の証明が完成し、したがって 補題 2.1 が証明された。□

補題 2.1 によって、定理 0.5 が (C.3) という付加的条件の下に証明されたことになる。この条件 (C.3) を仮定しない証明は次のようにすればよい。

条件 (C.3) がない場合には、補題 2.3 の証明中の $X(\alpha_k)$ が埋め込まれた円板としてはとれない。そこで、この円板をはめ込まれたものとしてとる。このとき、 γ'_k としてとったものは自己交叉を持つことになるが、“cut and paste” の手法により自己交叉のないものに取り替えることができる。これらの操作は、すべて 3-球体の中で可能である。したがって、以下はまったく同じ方法で 定理 0.5 が証明される。

3. PSEUDO CORE の交叉交換

$\mathcal{L} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ を M 内の絡み目とし、 θ を向き付けられたアークで \mathcal{L} の成分 k_i から k_j へ向かうものとする。このとき、 k_i を [図 3.1] のように k'_i に変形する操作を「 θ に沿った交叉交換」といい、この操作によって得られた絡み目を $\mathcal{L}[\theta]$ で表す。もちろん、 $\mathcal{L}[\theta]$ には θ のまわりの帯の捻りだけの自由度が残る。 \mathcal{L} 上の 2 点を結ぶ向き付けら

れたアーク θ_j の族 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ に対しても、 \mathcal{L} を $\vec{\theta}$ に沿って交叉交換した絡み目 $\mathcal{L}[\vec{\theta}]$ が定義される。

[図 3.1]

定義 3.1. 上のようなアークの族 $\vec{\theta}$ が “localizing arc system” であるとは、(各 θ_j の帯のまわりの捻りを適当に定めると) $\mathcal{L}[\vec{\theta}]$ が local な絡み目となることをいう。

さて、 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を M の H-分解、 $\mathcal{L} = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ ($g = g(\mathcal{H})$) を H_1 の pseudo core (local とは限らない) とする。そして、 $\vec{D} = (D_1, \dots, D_g)$ をこの pseudo core \mathcal{L} に対する 定義 0.3 の条件を満たす complete meridian disk system とする。このとき、次の補題が成り立つ。

補題 3.2. pseudo core \mathcal{L} に対して、以下に述べる条件 (a), (b) を満足する localizing arc system $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ が存在すれば、 M は 3-球面 S^3 に同相である。

- (a) $\vec{\theta}$ は H_1 に含まれる。
- (b) $\vec{\theta}$ の成分 θ_k が \mathcal{L} の成分 α_{j_1} から α_{j_2} へ向かうとすると、 $i \leq j_1$ なる i に対しては $D_i \cap \theta_k = \emptyset$ である。

(証明). 条件 (a), (b) によって、交叉交換した絡み目 $\mathcal{L}[\vec{\theta}]$ もまた、同じ meridian disk system \vec{D} に関して H_1 の pseudo core である為の条件を満たす。しかも、 $\mathcal{L}[\vec{\theta}]$ は local であるから、定理 0.5 によって M は S^3 に同相となる。□

この補題によって、予想 0.6 は次のように述べ直すことができる。

予想 3.3. M が単連結ならば、 M の H-分解で 補題 3.2 の条件を満足するような localizing arc system を持つ pseudo core を許容するものが存在する。

次節にみるように、この形の予想は、Rêgo と Rourke による “dual surgery theory” を用いることによって、 S^3 内で検証し得る問題に帰着されることがわかる。

4. SURGERY と DUAL SURGERY

この節では、[2] において Rêgo と Rourke によって開発された dual surgery の理論を概観し、それによって補題 3.2 中の条件が、どのように S^3 内で検証し得るものとして記述されるかをみる。

W を向き付けられたホモロジー 3-球面とし、 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を W 内の framed link とする。すなわち、 Λ は link であって、その各成分 λ_j に対して、整数 m_j (λ_j の “framing” とよばれる) が指定されているものとする。このとき、 $\partial N(\lambda_j, W)$ 上の λ_j に平行な閉曲線 λ'_j で λ_j との linking number が m_j であるものを “framing curve” とよぶ。

「 W から framed link Λ に沿った (整数係数の) Dehn 手術によって得られる多様体 $\chi(W; \Lambda)$ 」が次のように定義される：

$$\chi(W; \Lambda) = (W - N(\Lambda, W)) \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n,$$

ここで、各 V_j は solid torus $D^2 \times S^1$ であり、境界の同相写像

$$h_j : \partial V_j \longrightarrow \partial N(\lambda_j, W)$$

によって貼り合わされ、さらに h_j による V_j の meridian の像が framing curve となっているものとする。よく知られているように、すべての向き付け可能な 3 次元多様体は、 S^3 内のある framed link に沿う Dehn 手術によって構成される。

さて、ホモトピー 3-球面 M が S^3 内の framed link $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に沿う Dehn 手術によって得られる、すなわち $M = \chi(S^3; \Lambda)$ とする。 Λ の成分 λ_j の “dual curve” $l_j \subset M$ とは、 $N(\lambda_j, S^3)$ の代りに埋め戻される solid torus V_j の core のこととし、 $l_j = \lambda_j^*$ あるいは $\lambda_j = l_j^*$ のように表現する。さらに、dual curves からなる絡み目を $L = (l_1, \dots, l_n)$ とするとき、 Λ と L を互いに他の “dual link” といい、 $L = \Lambda^*$ あるいは $\Lambda = L^*$ と表す。ここで注意すべきは、 Λ の外部 $E(\Lambda, S^3)$ が L の外部 $E(L, M)$ と自然に同一視できるということである。

framed link の “Kirby move” とは、Dehn 手術による多様体を変えないような framed link の変形のことである。これに関して、次の事実が知られている (Kirby moves)：

- (1) [図 4.1] に示したような Move(I)~(III) (framing の変化については、[3] を参照) によって移り合うような 2 つの framed link は、Dehn 手術による多様体を変えない。
- (2) Dehn 手術による多様体を変えないような 2 つの framed link は、Move(I)~(III) の有限回の繰り返して互いに移り合う。

[図 4.1]

$M = \chi(S^3; \Lambda)$, $L = \Lambda^*$ となっているとき、 Λ (または L) に対する Kirby move は dual link L (または Λ) に対する “dual move” を引き起こす。この dual move を [図 4.2] に示す。

[図 4.2]

定義 4.1. S^3 内の絡み目 Λ が “pure plat” であるとは、 S^3 のある高さ関数について Λ の各成分が唯一つの local maximum を持つことをいう。ただし、 S^3 の高さ関数とは、 $h: S^3 \rightarrow [0, 1]$ で $h^{-1}(0)$, $h^{-1}(1)$ がそれぞれ 1 点で、 $h^{-1}(t)$ ($0 < t < 1$) は 2-球面であるものことである。($h^{-1}(0)$, $h^{-1}(1)$ は Λ 上にはないものとする。)

次の補題が [2] に示されている。

補題 4.2. (Rêgo and Rourke) 任意のホモトピー 3-球面 M に対して、次の性質 (1)~(4) を満足するような M 内の framed link $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ が存在する。

- (1) 各成分 ℓ_j は M に埋め込まれた 2次元円板 D_j の境界となる。
- (2) $D_i \cap D_j$ ($i \neq j$) は有限個の clasp からなり、3重点はない。
- (3) $\chi(M; L)$ は、 S^3 に同相である。
- (4) L の dual link $\Lambda = L^*$ は、 S^3 のある高さ関数に関して pure plat である。

以後、この補題のような L をとり、 Λ を pure plat とみるような S^3 の高さ関数を 1 つ固定して考える。 Λ に対して S^3 内の 3-球体 B^3 を次の (i), (ii) を満たすようにとることができる ([図 4.3] を参照) :

- (i) 高さ関数の値は、 ∂B^3 上一定である。
- (ii) $B^3 \cap \Lambda$ は n 本の自明なアーク系となる。

このような B^3 を “under-braiding region” とよぶ。

[図 4.3]

(20)

上に述べたように L の外部 $E(L, M)$ は Λ の外部 $E(\Lambda, S^3)$ と同一視できるので、 S^3 上の高さ関数は $E(L, M)$ においても定義されていると考えられる。 L 上の2点を結ぶ向き付けられたアーク θ が“単調”であるとは、 $\theta \cap E(L, M)$ がこの高さ関数に関して単調であることと定義する。同様に、“ θ が under-braiding region に含まれる”ということも定義される。これらの定義の下に、次の補題が示される。

補題 4.3. 任意のホモトピー 3-球面 M に対して、次の性質 (1)~(3) を満足するような M 内の framed link L が存在する。

- (1) $\chi(M; L)$ は S^3 に同相である。
- (2) $\Lambda = L^*$ は pure plat である。
- (3) L に対して、under-braiding region に含まれる localizing arc system $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ で各 η_k ($k = 1, \dots, m$) がすべて単調減少であるようなものが存在する。

(証明). framed link $L = (l_1, \dots, l_n) \subset M$ を補題 4.2 で存在が示されているものとし、 $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ を円板 D_j 達が作る clasp の族とする。明らかに、 $\vec{\beta}$ は L の localizing arc system をなす。また、 $E(L, M)$ と $E(L^*, S^3)$ との同一視によって、 $\vec{\beta} \subset S^3$ と考えることができる。そして、 $\vec{\beta}$ は、 L^* を固定したまま under-braiding region に押し下げることができる。このとき、[図 4.4] のように有限個の交叉を除いて、 $\vec{\beta}$ の各成分は単調であるとしてよい。

[図 4.4]

この交叉を dual link $L^* \subset S^3$ に対する Kirby move によって解消して、単調な localizing arc system を持つような framed link を得ることを考える。つまり、交叉の箇所で [図 4.5] のように Move(I) を実行する。この新しい成分が追加された S^3 内の framed link を L_1^* とする。このとき、clasp $\vec{\beta}$ は同図に示されたように交叉交換される。ただし、この交叉交換は dual link $L_1 \subset M$ でみると [図 4.6(a)] に示されたように、新しく発生した自明な成分をくぐるため、 L_1 の localizing arc system としては、[図 4.6(b)] のようなアークを追加しなければならない。

[図 4.5]

[図 4.6]

このような交叉交換を、すべての交叉箇所について順次行う。ただし、[図 4.6(b)] のように localizing arc として追加されたアークについては、[図 4.7] に示すようにもともとの交叉と一括して交叉交換するものとする。

[図 4.7]

このようにして最終的に得られた S^3 内の framed link を改めて L^* とおき、その dual link を $L \subset M$ とする。 L^* は pure plat であり、 L の localizing arc system として under-braiding region に含まれ、すべての成分が単調なアークであるものを選ぶことができる。□

M 内の framed link L が、上の補題の条件 (1), (2) を満足するとき、[2] においても指摘されているように、Dehn 手術表示 $S^3 = \chi(M; L)$ に付随した H-分解が次のように定義される。基点 $p_0 \in S^3$ を dual link L^* の下部にとり、 L^* の各成分 ℓ_j^* の高さ関数の値が最小である点から p_0 に結ぶ単調なアーク t_j をとり、

$$K^* = L^* \cup t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_n, \quad H_2 = \text{cl}(S^3 - N(K, S^3))$$

とおく。 L^* が pure plat であることと、各 t_j が単調なアークであることから、 H_2 がハンドル体であることが示される。また、 $E(L^*, S^3)$ と $E(L, M)$ の自然な同一視によって、 $H_2 \subset M$ とみなすことができる。一方、 $H_1 = \text{cl}(M - H_2)$ とすれば、これはハンドル体 $N(K^*, S^3)$ をその generalized core L^* に沿って Dehn 手術したものであるから、 H_1 もまたハンドル体である。したがって、 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ は M の H-分解を与える。 L がこの H-分解の generalized core、したがって pseudo core になっていることは明きらかであろう。

$L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ および $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ を補題 4.3 の条件 (1)~(3) を満たすものとし、H-分解 \mathcal{H} を上に定めたような M の H-分解とする。この節の残りの部分では、 \mathcal{H} の pseudo core L および localizing arc system $\bar{\eta}$ が補題 3.2 の条件 (a), (b) を満足するための条件を S^3 内の条件として記述する例を示す。

\mathcal{U} で pure plat L^* の under-braiding region を表す。 L^* の各成分 ℓ_j^* は自明な結び目であるから、 S^3 内の円板 R_j が存在して $\partial R_j = \ell_j^*$ と

なる。 $\mathcal{U} \cap R_j$ ($j = 1, \dots, n$) は円板で、 $\mathcal{U} \cap R_i \cap R_j = \emptyset$ ($i \neq j$) であるとしてよい。このとき、補題 3.2 の (a), (b) が成り立つための十分条件が次のように与えられる。

命題 4.4. η_k は l_{j_1} から l_{j_2} へ向かうアークであるとする。このとき、すべての k について下の条件 (*) が満たされているならば、 $\vec{\eta}$ に isotopic な変形を施すことによって補題 3.2 中の条件 (a), (b) を満たす $\vec{\theta}$ を得ることができる。

(*) $i < j_1$ であれば、 $(\mathcal{U} \cap R_i) \cap (\eta_k \cap E(L^*, S^3)) = \emptyset$ である。

ここで、 $E(L, M)$ と $E(L^*, S^3)$ との自然な同一視によって、 $\eta_k \subset S^3$ とみなされている。

この命題を直接的に用いて補題 3.2 の条件を満たすような H-分解の存在が示されるわけではない。しかし、もし $\vec{\eta}$ が具体的にわかっているならば、条件 (*) は S^3 内で検証できる条件である。このような意味で条件 (*) は、目的の H-分解を構成する上で重要な指針を与える。実際、次節においては、“ $\vec{\eta}$ を $\mathcal{U} \cap R_i$ からはずす”ことそのものではないが、ある意味においてこれに相当する操作を行なうことによって、目標とする H-分解を構成することを試みる。

(命題 4.4 の証明). $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を上に定義した H-分解であるとする。 H_1 の complete meridian disk system $\vec{D} = (D_1, \dots, D_n)$ として、 $N(l_j^*, S^3)$ の代わりに埋め戻されるハンドル体 V_j の meridian disk D_j をとる。このとき、 ∂D_j を S^3 内でみると、 l_j^* の framing curve と一致しているとしてよい。

L^* が pure plat であり η_k が単調であるから、 $\eta_k \cap E(L^*, S^3)$ の両端点を ∂H_1 上で結ぶアーク σ_k をとって、単純閉曲線 $(\eta_k \cap E(L^*, S^3)) \cup \sigma_k$ が H_2 内の円板 Δ_k を囲むようにすることができる ([図 4.8] を参照)。この σ_k は、 $\eta_k \cap R_i = \emptyset$ なる i に対しては、 $\sigma_k \cap \partial D_i = \emptyset$ となるように選ぶことができる ([図 4.8] を参照)。

[図 4.8]

Δ_k ($k = 1, \dots, m$) を上に選んだような円板とすると、 η_k を Δ_k に沿って isotopic な変形をすることによって、 $\vec{\eta}$ を H_1 内に押し込むことができる。そして、この H_1 に押し込まれた localizing arc system を $\vec{\theta}$

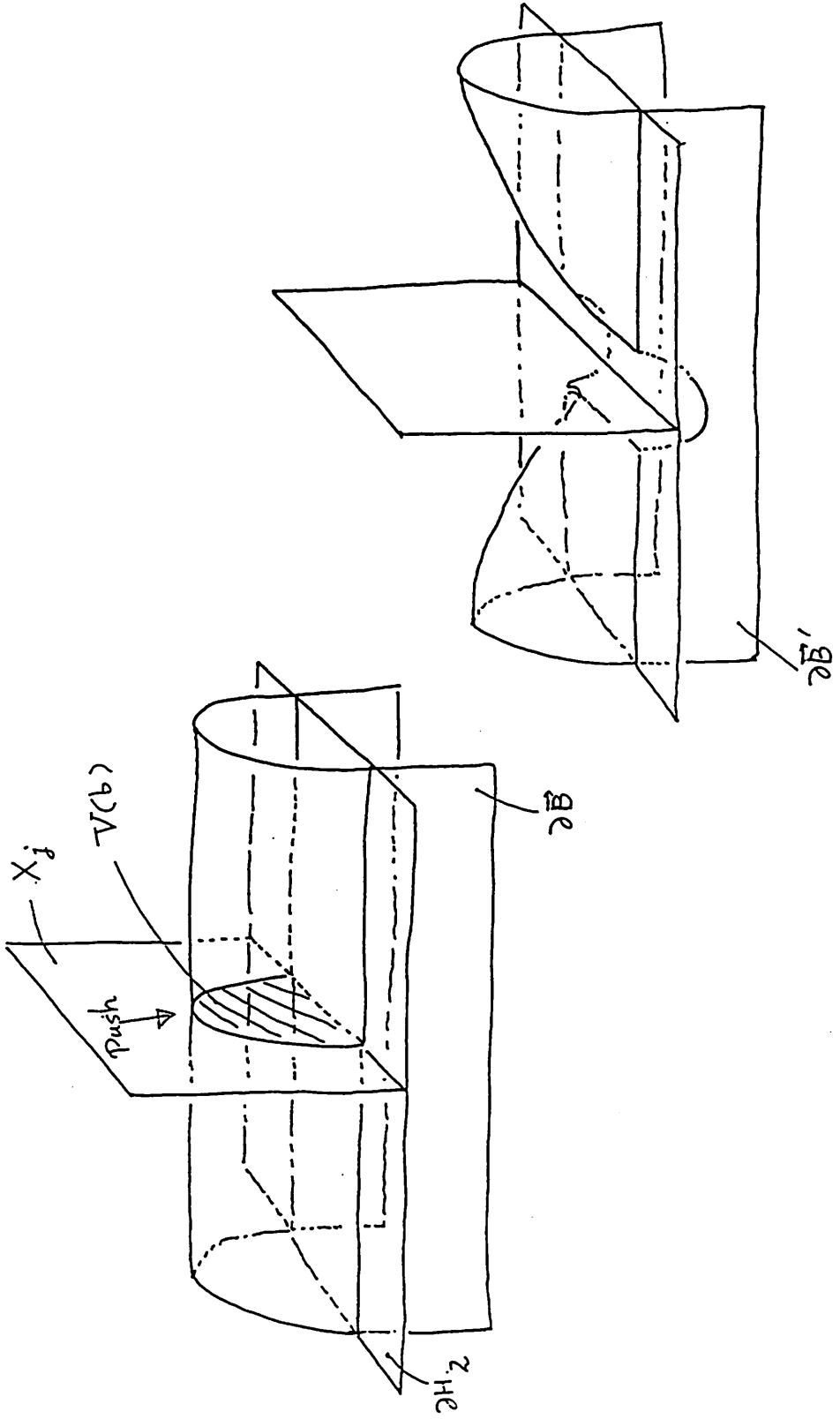
とすると、条件(*)によって、 $\bar{\theta}$ は補題 3.2 中の条件 (b) をも満たすことが導かれる。□

参考文献

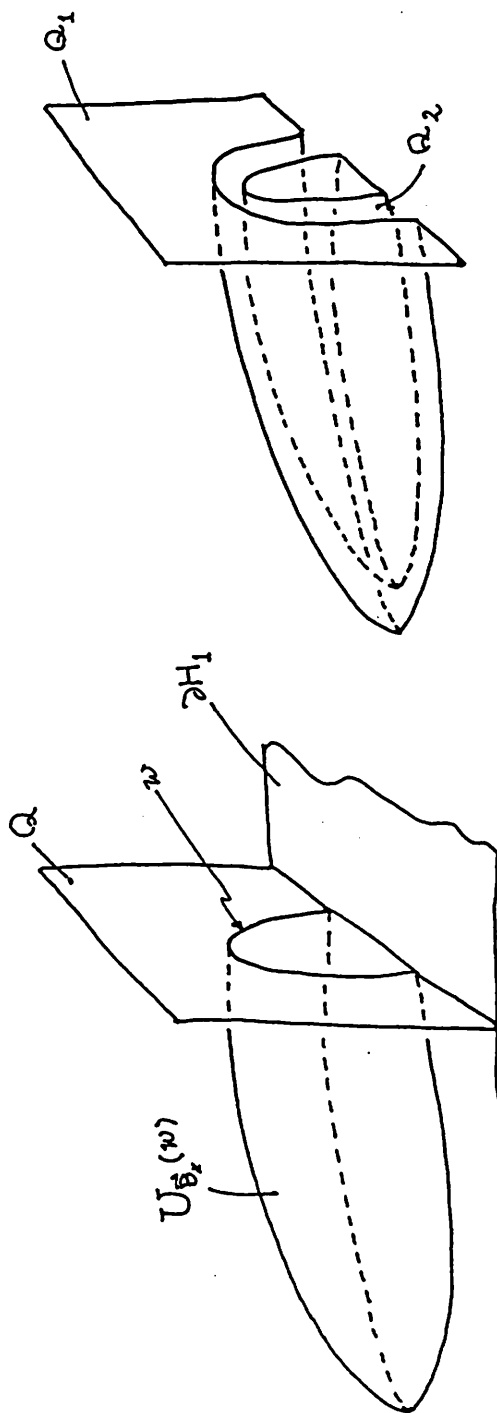
- [1] Ochiai M., *On Haken's theorem and its extension*, Osaka J. Math. 20 (1983), 461-468.
- [2] Rêgo E. and Rourke C., *A proof of the Poincaré conjecture*, preprint (1986).
- [3] Rolfsen D., *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [4] 宮崎 桂、斎藤 昌彦, 「Rêgo-Rourke によるポアンカレ予想の「証明」」, Topology News, series B No.1 (1986).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIV., HIYOSHI, YOKOHAMA, 223 JAPAN
E-mail address: ishii@math.keio.ac.jp

(24)

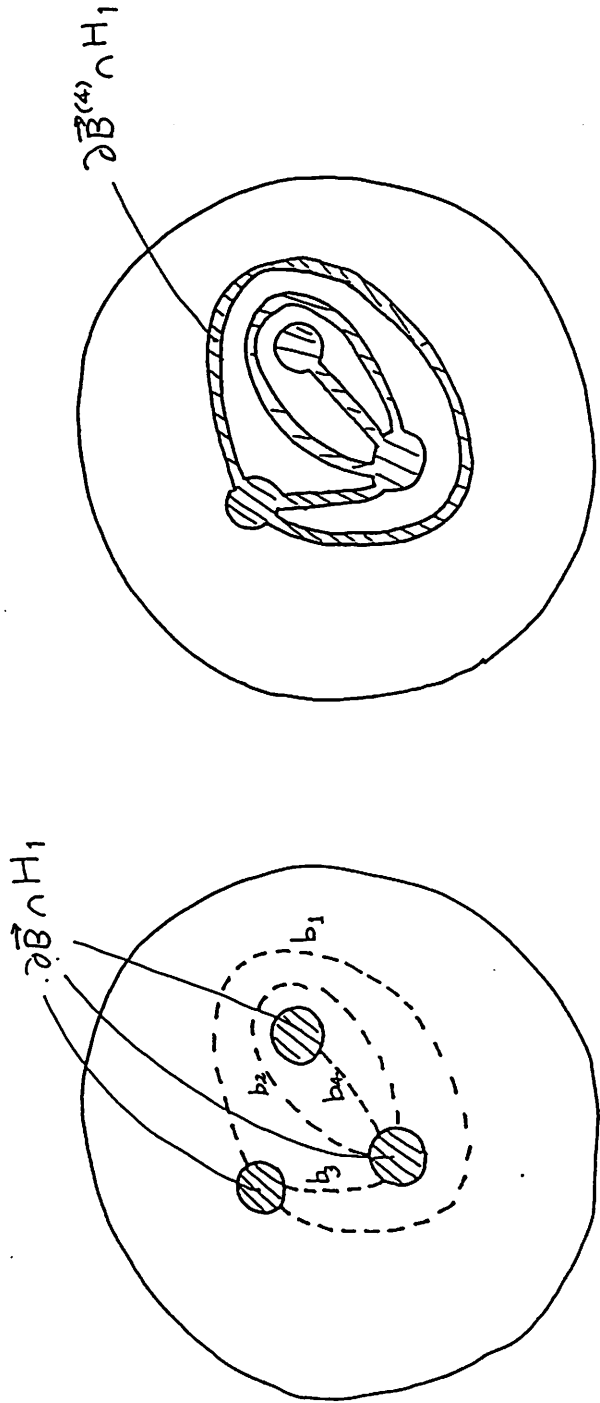


[圖 1.1]

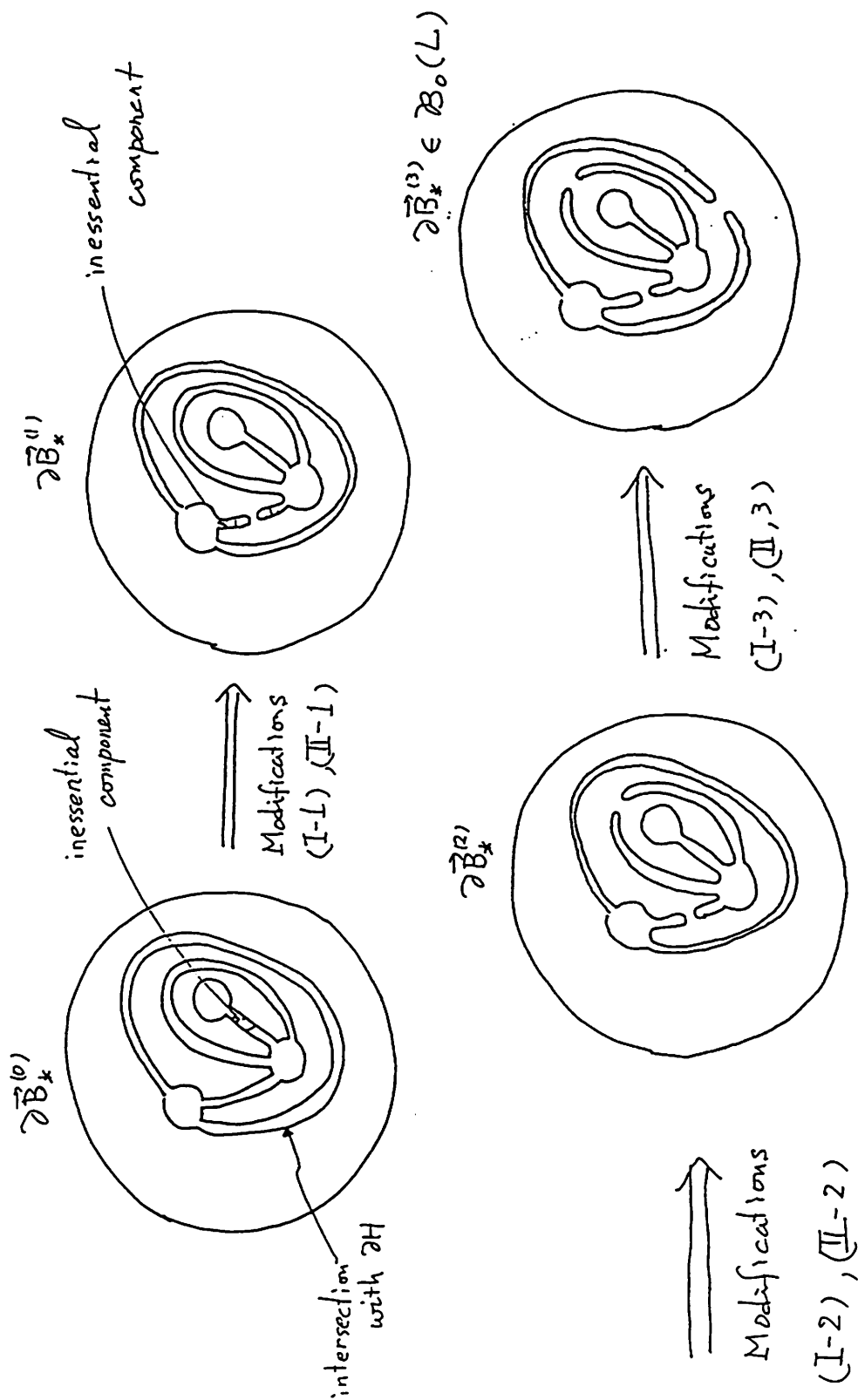


[图 1.2]

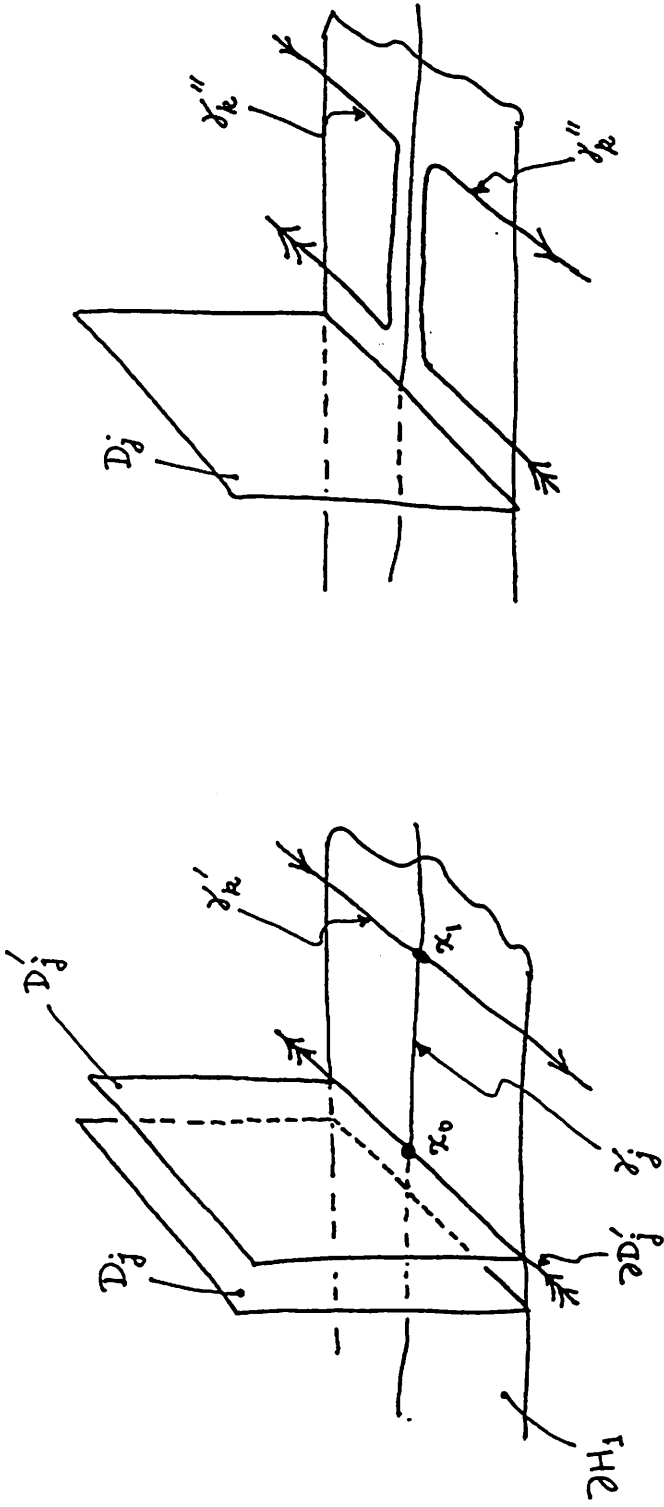
(26)



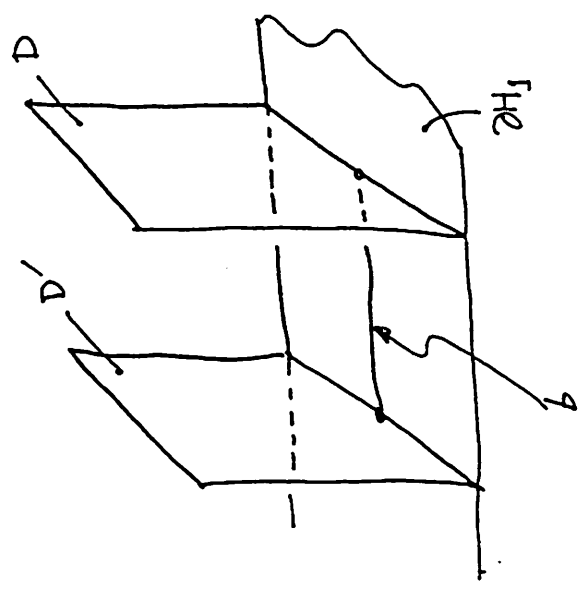
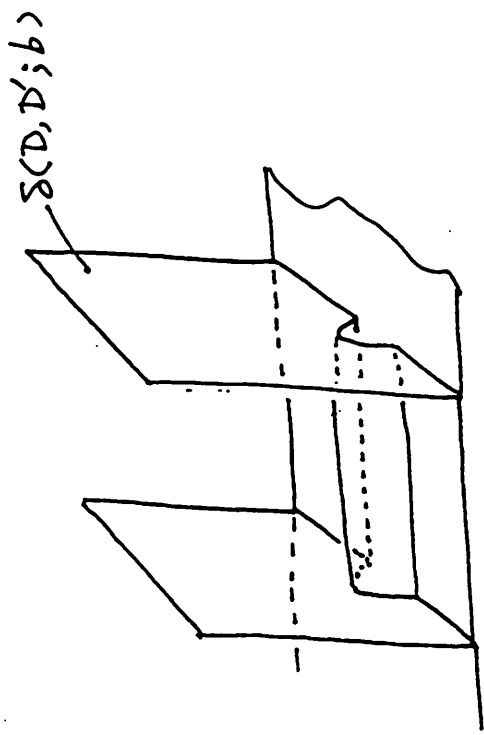
[图 1.3](a) (an example)



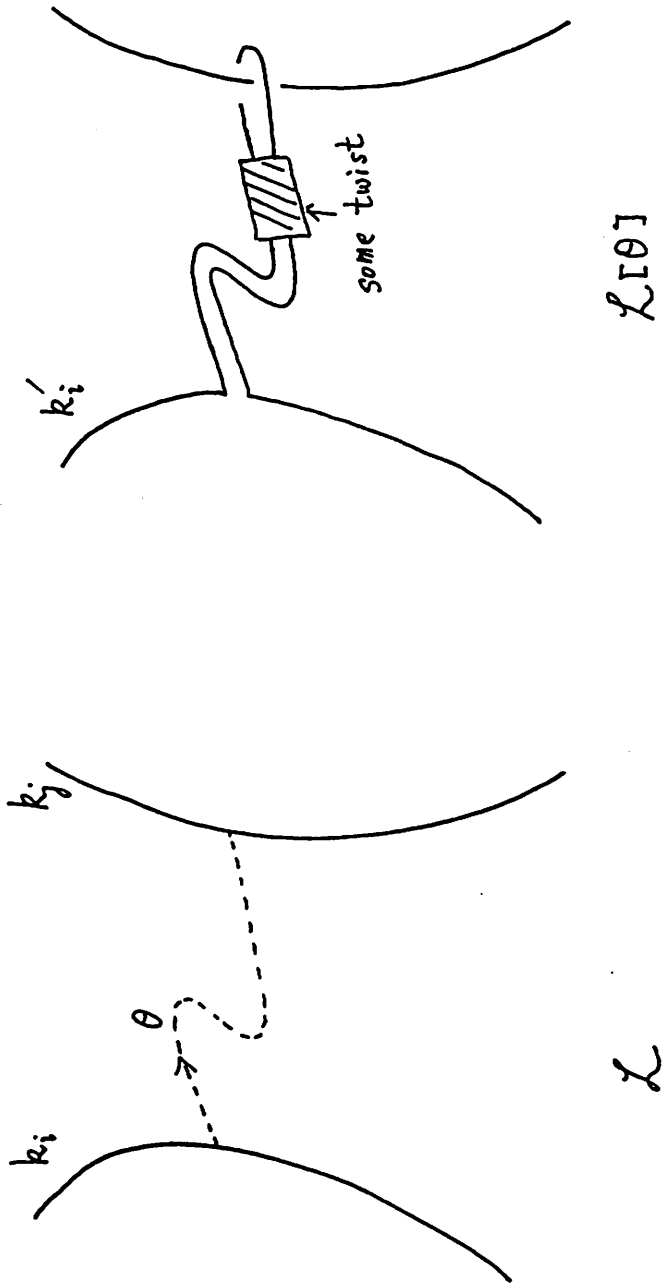
[图 1.3] (c) (the same example as (a))



[图 2.1]



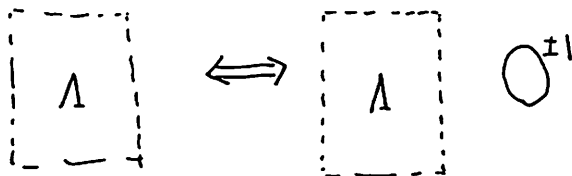
[图 2.2]



[图 3.1]

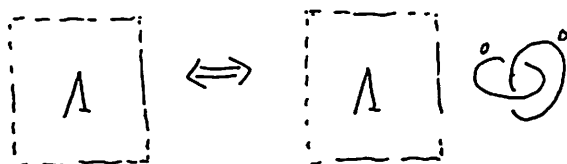
Move (I)

($O^{\pm 1}$ の追加又は除去)



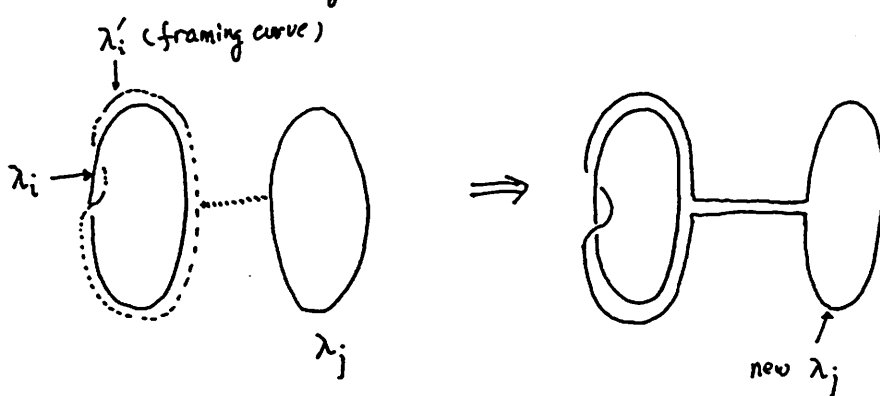
Move (II)

(\circlearrowleft の追加又は除去)



Move (III)

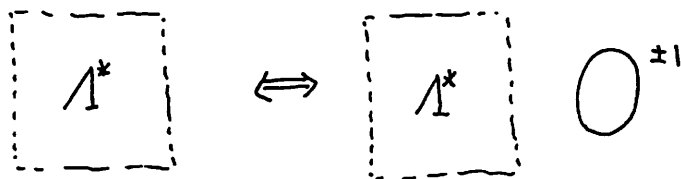
(band move (or handle sliding))



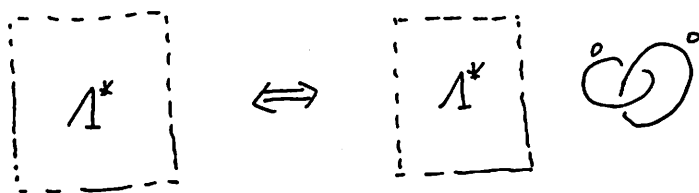
[図 4.1]

(32)

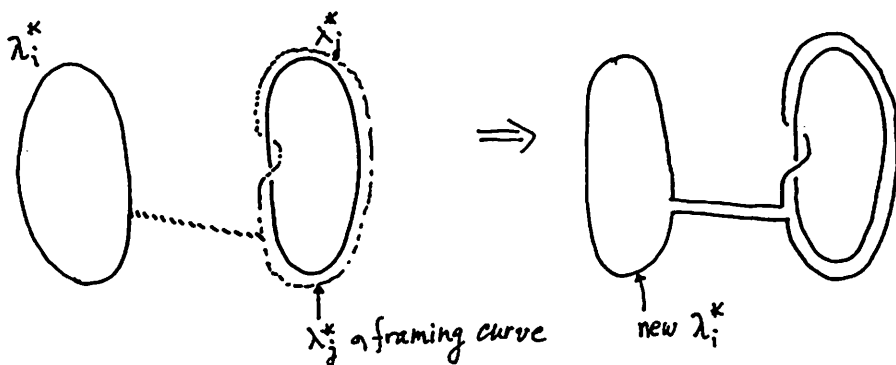
Move (I) or dual move



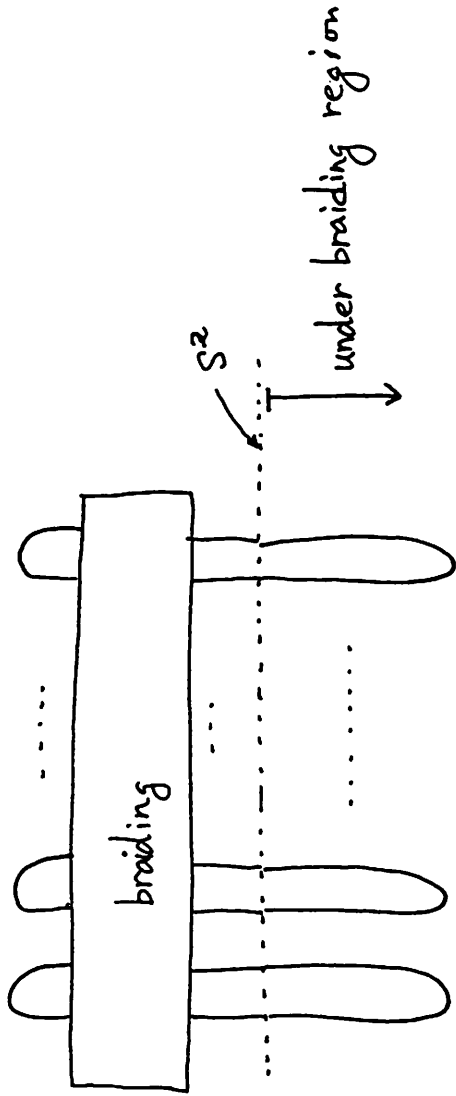
Move (II) or dual move



Move (III) or dual move

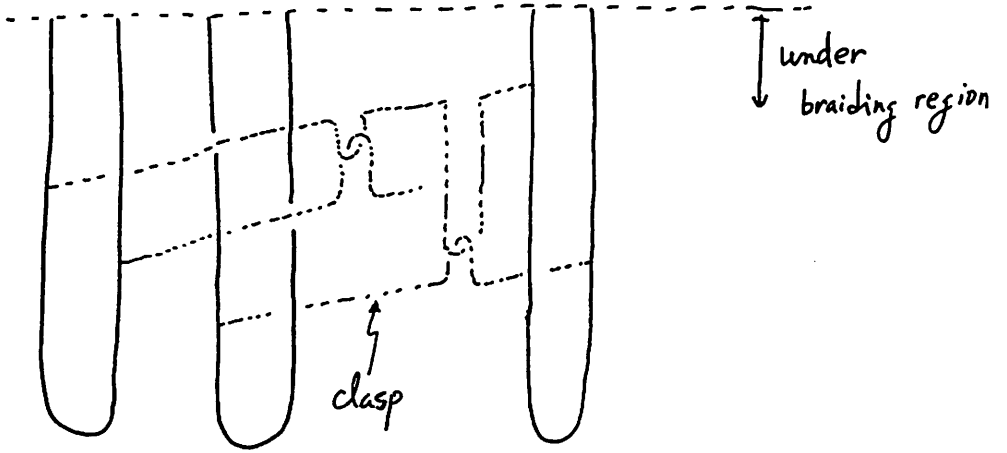


[图 4.2]



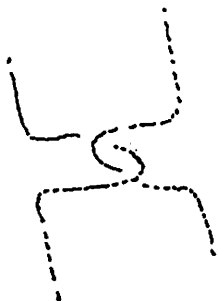
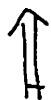
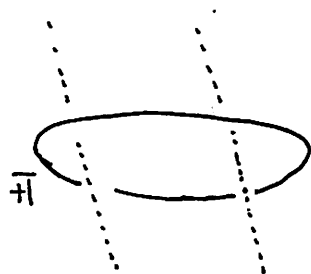
[图 4.3]

(34)



[] 4.4]

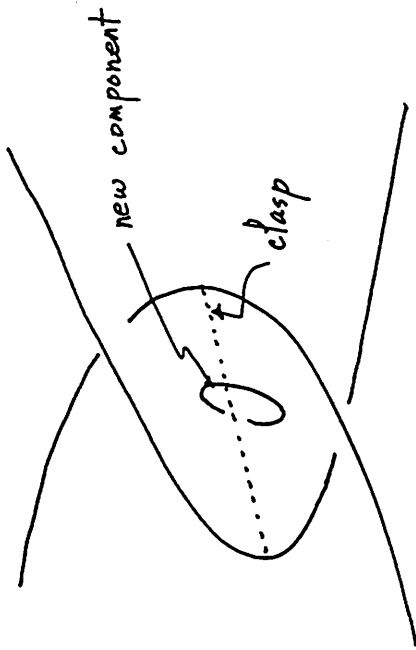
in S^3



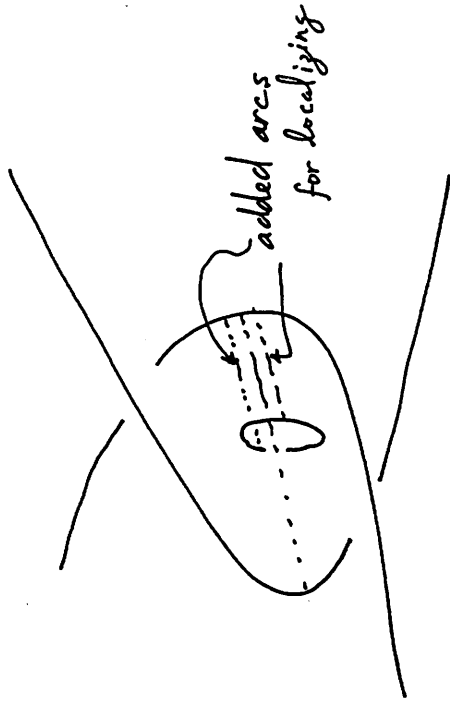
[图 4.5]

(36)

in M

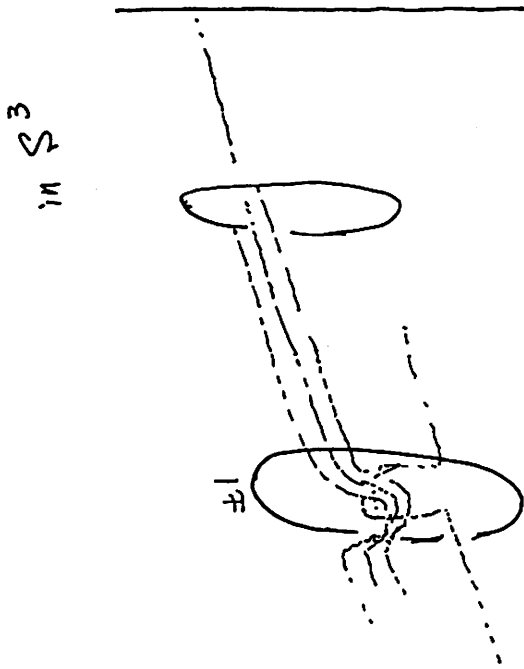


(a)



(b)

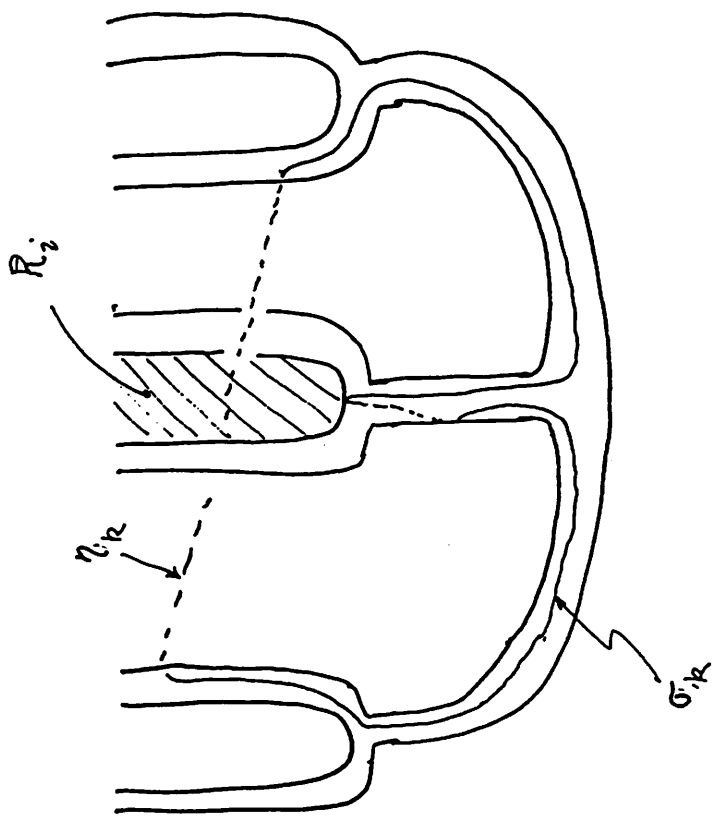
[~~图~~ 4.6]



[圖 4.7]

(38)

in S^3



[圖 4.8]