箱根セミナ記録 90(1990)33-51.

Topological invariants of 3-manifolds

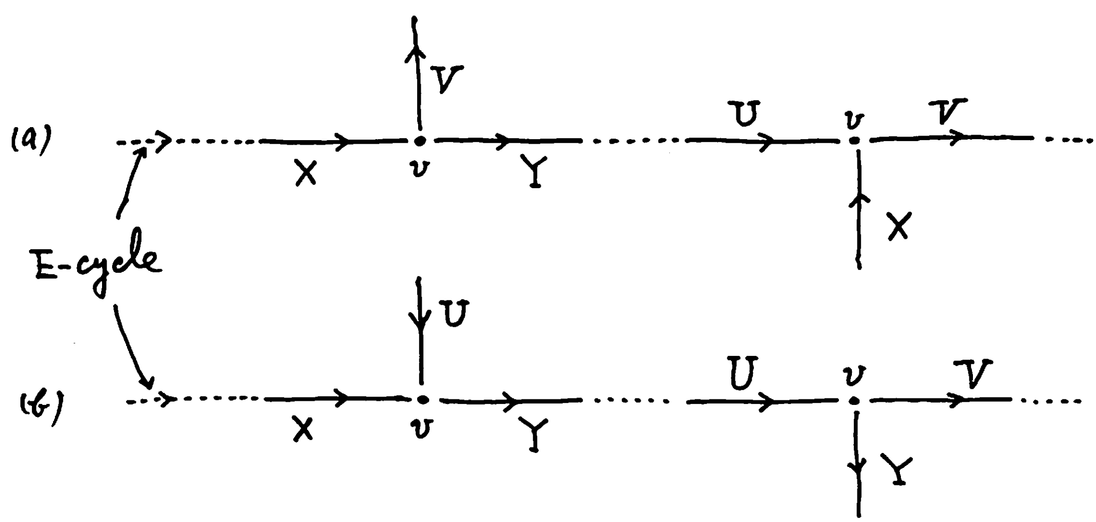
石井 一平 (慶応大.理工)

§1. E-data

$\mathbb{B}^3$ を 3-ball, (G, f) を $\partial\mathbb{B}^3$ 上の DS-diagram with E-cycle で $B^3/f = M^3$ は orientable closed 3-mfd となるものとして考える.

以下では $\mathbb{B}^3$ の orientation は1つ fix されているものとし. すべての E-cycle 付 DS-diagram に対し. その E-cycle は一定の向きに向き付けられているものとする. すなわち. DS-diagram を <u>oriented</u> menifold と考える.

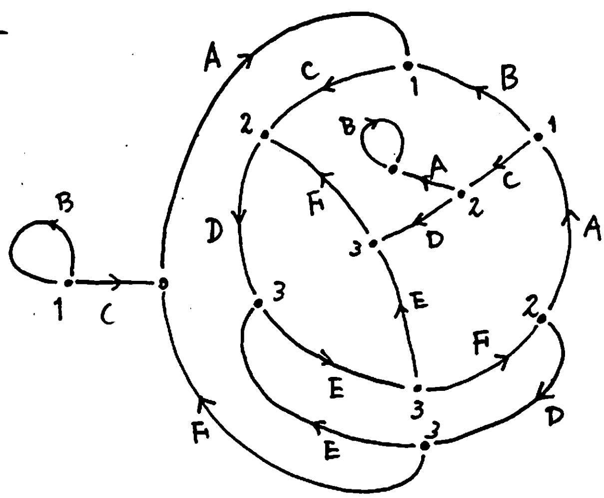
このとき. $\mathfrak{S}_3(P)$ ($P = \partial\mathbb{B}^3/f$: fake surface) は. 次の2種類に分類される.



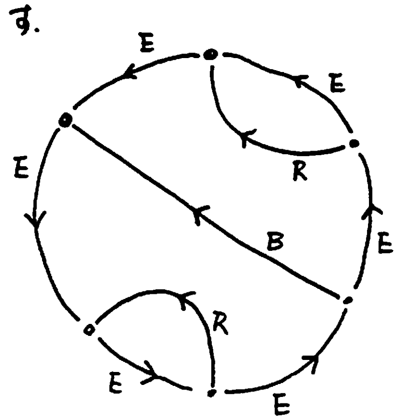
($f(v) \in \mathfrak{S}_3(P)$)

$f(v) \in \mathfrak{S}_3(P)$ が (a)図 の type のとき. $f(v)$ (or v) を R-type, (b)図 の type のとき. B-type と呼ぶことにする. これら 2つ の type の vertices が E-cycle 上どのように配置されているかを記述するものが E-data (以前は singularity-data と呼んでいたもの) である. この E-data を後々のために, 次のようにグラフで表示する.

例



この DS-diagram with E-cycle で vertices 1 及び 3 は R-type で 2 は B-type である. このとき E-data を次の(抽象的な)グラフで表わす.



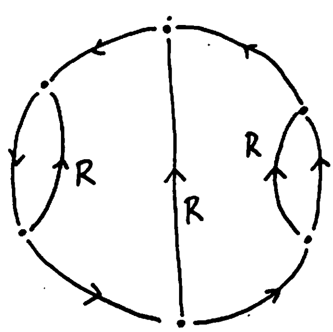
即ち．このグラフ（oriented, 3-colored）は次の様に作られている．

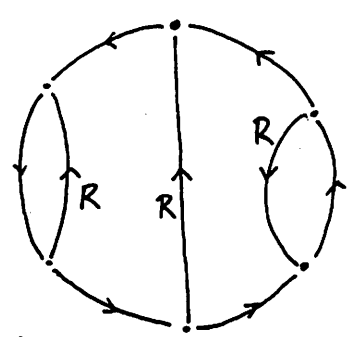
(i) vertices set は DS-diagram の E-cycle 上にある vertices.

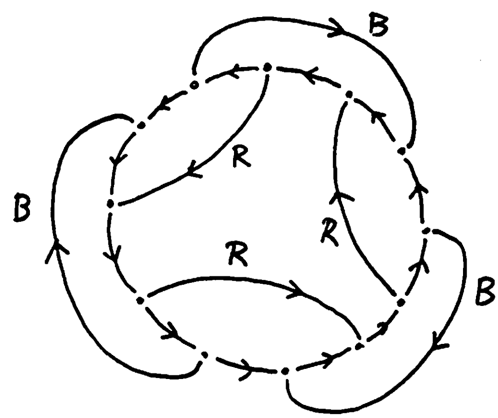
(ii) E-cycle 上隣り合う vertices は E-色の edge $\cdot\xrightarrow{E}\cdot$．で結ぶ．向きは E-cycle の向き．

(iii) identification map f によって互いに identify される vertices をその type に応じて R-色の edge $\cdot\xrightarrow{R}\cdot$ 又は B-色の edge $\cdot\xrightarrow{B}\cdot$ で結ぶ．但しこれら R-色, B-色の edges の向きは．E-cycle の左側に edge が出ている方から．右側に edge が出ている方へ向かう．

<u>練習問題</u>：次の E-data の表わす manifold は？







（色指定のない edge は E-色）

注意

1) すべての closed orientable 3-mfd はある E-data によって表示される.

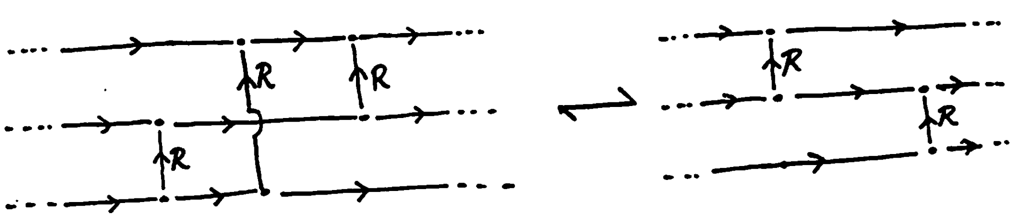
2) すべての E-data が closed 3-mfd に対応するわけではない. しかし. 本巻の池田-河野両氏の報告を見れば, 各 E-data にはある class の compact 3-mfd の1つが対応していることがわかる.

§.2. moves. of E-data

この節では manifold を不変にする E-data の変形 (move と呼ぶ) を考える.

Def : (move $\mathcal{R}_2$)

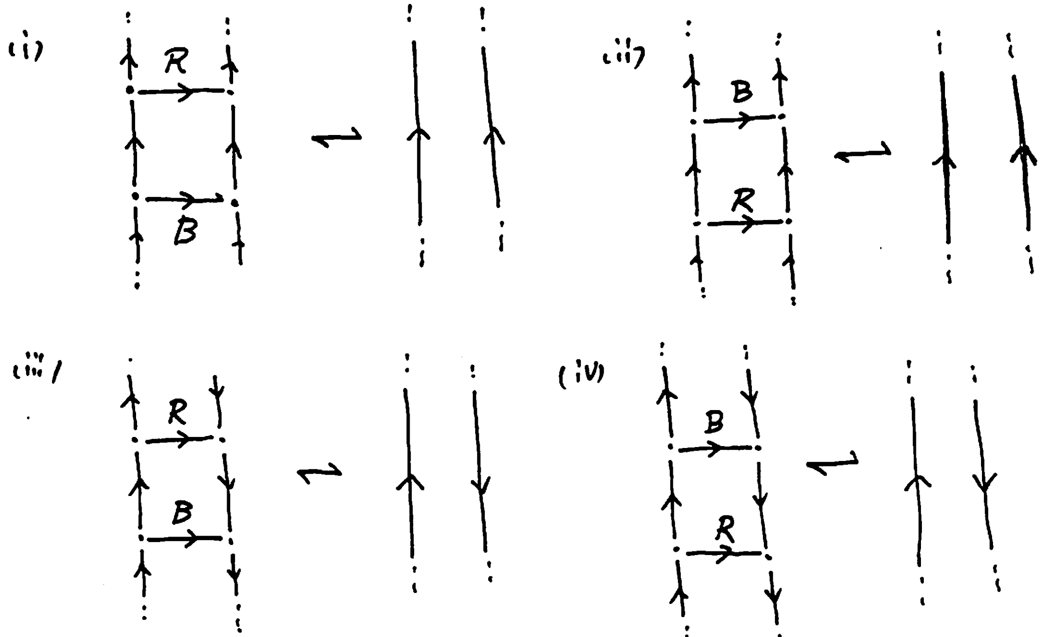
次の左の E-data (の一部分) を右の E-data に変える操作を $\mathcal{R}_2$, 逆操作を $\mathcal{R}_2^{-1}$ で表わす



(色指定のない edges は E-色, 以下でも同様に E-色は書かないこととする.)

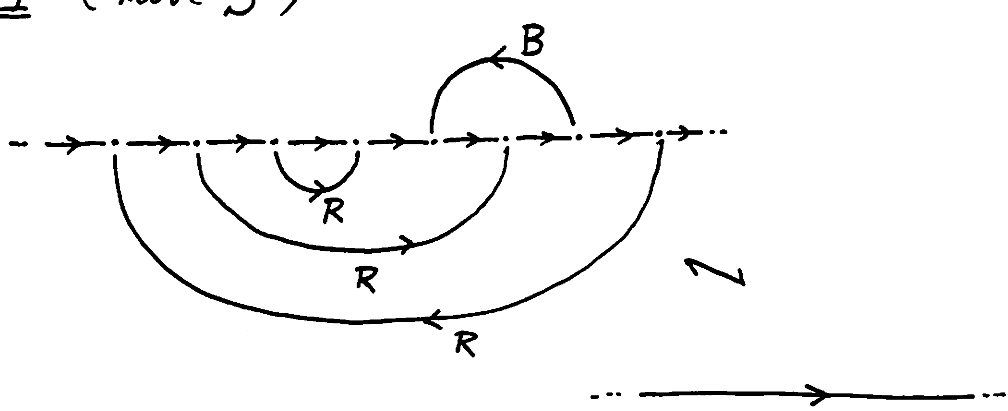
<u>Def</u> (move $\mathcal{R}_1$)

同様に次の4つを総称して$\mathcal{R}_1$，その逆を$\mathcal{R}_1^{-1}$で表わす.



☆ $\mathcal{R}_1^{\pm1}$, $\mathcal{R}_2^{\pm1}$ を <u>regular moves</u> と呼ぶ

<u>Def</u> (move $\mathcal{S}$)



☆ $\mathcal{S}^{\pm1}$ を <u>surgery move</u> と呼ぶ

Δ, Δ' を 2つの E-data でそれぞれ closed 3-mfd を表わしているものとする。Δ と Δ' の間のいくつかの同値関係を以下に定める。

<u>Def. 1.</u> (equivalence)

$$\Delta \sim \Delta'$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ a sequence of E-data $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n = \Delta'$,

s.t. Δ_{k+1} は Δ_k から $\mathcal{R}_j^{\pm 1}$, $S^{\pm 1}$ のいづれかを1回施して得られる。$(k = 1, \cdots, n-1)$

<u>Def. 2.</u> (strongly equivalent)

$$\Delta \underset{\Delta}{\sim} \Delta'$$

$\Longleftrightarrow$ $\Delta \sim \Delta'$ で且つ、途中の各 Δ_k が closed 3-mfd を表す。

<u>Def. 3.</u> (regular equivalence)

$$\Delta \underset{r}{\sim} \Delta'$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ a sequence of E-data $\Delta = \Delta_1, \cdots, \Delta_n = \Delta'$,

s.t. $\Delta_{k+1} = \mathcal{R}_j^{\pm 1}(\Delta_k)$ $(j = 1 \text{ or } 2,\ k = 1, \cdots, n-1)$

<u>Def.4.</u> (strongly regular equivalent)

$$\Delta \underset{s.r.}{\sim} \Delta'$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta \underset{r}{\sim} \Delta'$$ 且つ途中の各 Δ_k が closed 3-mfd を表す.

さて. Δ を E-data で closed 3-mfd. を表すとする (この mfd を $M(\Delta)$ で表す.). すると §.1. に述べた約束によって. B^3 の orientation から. $M(\Delta)$ に orientation が定まっている。$M(\Delta)$ と $M(\Delta')$ との間に orientation preserving homeo. があるとき. $M(\Delta) \cong M(\Delta')$ と書くことにする.
また. closed 3-mfd M 上の non-singular vector fields 全体を $\mathfrak{X}_0(M)$ で表わすと. E-data Δ は $\mathfrak{X}_0(M(\Delta))$ の connected component を 1 つ定めることが知られている. この component を $[\Delta]$ と書くことにする. (cf. I. Ishii, Combinatorial construction ....., Kobe J. Math. 3('86), 201–208)
次の 3 つの定理が成り立つ.

<u>Th.1.</u>

$$M(\Delta) \cong M(\Delta') \Longleftrightarrow \Delta \underset{\Delta}{\sim} \Delta'$$

<u>Th.2.</u>

$$M(\Delta) \cong M(\Delta'),\ [\Delta] = [\Delta'] \Longleftrightarrow \Delta \underset{s.r.}{\sim} \Delta'$$

<u>Th.3.</u> $\Delta \sim \Delta' \Longrightarrow \pi_1(M(\Delta)) \cong \pi_1(M(\Delta'))$

問題（かなり難しそうな open problem）

1. $\Delta \sim \Delta'$ 且つ $\Delta \not\approx_{\Delta} \Delta'$ なる Δ, Δ' は存在するか？

2. 上のような Δ, Δ' が存在したとすると．$M(\Delta)$ と $M(\Delta')$ の関係は？（上の Th.3. から $\pi_1(M(\Delta)) \cong \pi_1(M(\Delta'))$）

上の Th.2. は moves $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ が E-data に対応する non-singular flow 及び local section の isotopic な変形そのものであることを見れば証明できる．

さらに．non-singular flow の異なる component に移る変形が move $\mathcal{S}$ によって記述されることを見て．Th.1. が証明される．

Th.3. は E-data から読む π_1 の表示が．$\mathcal{R}_j$, $\mathcal{S}$ で．Tietz 変換によって移り合うことから示される．

§.3. state sum invariant I.

以下では．E-data Δ に対して定義され．moves $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{S}$ によって不変な量をいくつか定めてみる．このような量が定まれば．それは Th.1. によって $M(\Delta)$ の位相不変量となる．

Notation.

1) Δ : an E-data（抽象的な3色有向グラフと考える．）

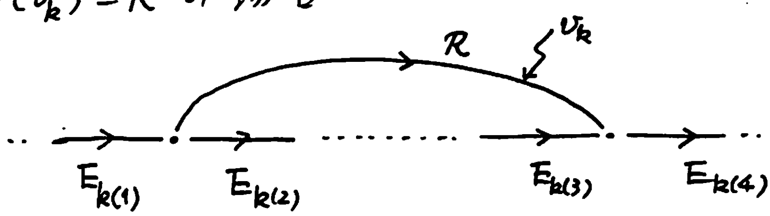
2) $E_1, E_2, \cdots, E_{2\nu}$: Δ の E-色 edges

3) $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$: Δ の R-色又は B-色の edges

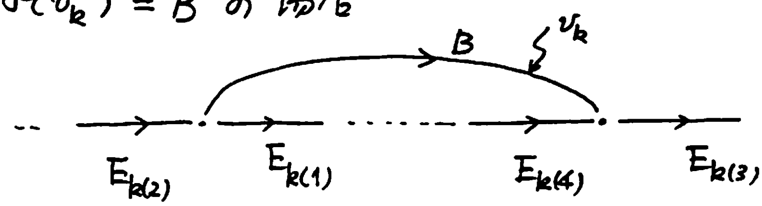
4) $\sigma(v_k) = R$ or B (v_k の色)

5) 各 v_k に対し. $E_{k(1)}, E_{k(2)}, E_{k(3)}, E_{k(4)} \in \{E_1, \cdots, E_{2\nu}\}$ を次の規則で定める.

(i) $\sigma(v_k) = R$ の場合



(ii) $\sigma(v_k) = B$ の場合



6) $J = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ (有限集合 : set of colors という)

7) $\varphi : \{E_1, \cdots\cdots, E_{2\nu}\} \longrightarrow J$: a coloring of $\{E_1, \cdots, E_{2\nu}\}$

8) $\left\{\begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix}\right\}_R , \left\{\begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix}\right\}_B \in \mathbb{C}$, $(i, j, k, l \in J)$

($\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}\right\}_R$ および $\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}\right\}_B$ は $J \times J \times J \times J$ 上の $\mathbb{C}$-valued function, これは後で定める.)

$\left\{\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right\}_R$, $\left\{\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right\}_B$ が与えられたとき. E-data Δ に対し.

$$\Phi(\Delta) = \sum_{\varphi} \left(\prod_{k=1}^{\nu} \left\{ \begin{matrix} \varphi(E_{k(1)}), \varphi(E_{k(4)}) \\ \varphi(E_{k(2)}), \varphi(E_{k(3)}) \end{matrix} \right\}_{\sigma(v_k)} \right)$$

と定める. ここで和はすべての coloring $\varphi : \{E_1, \cdots, E_{2\nu}\} \to J$ に関して取る.

この $\Phi(\Delta)$ を moves $\mathcal{R}_j$, S で不変になるように.
$\left\{\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right\}_R$, $\left\{\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right\}_B$ を定めるのが目標である.

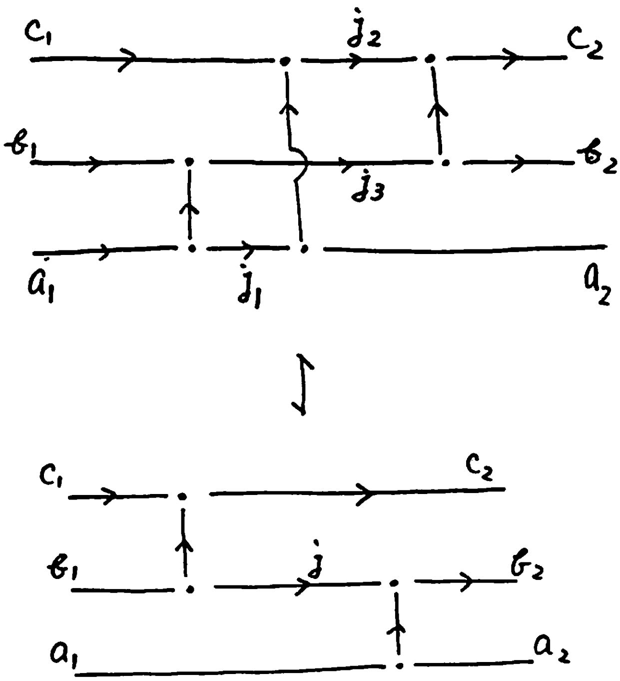
Prop.1. $\left\{\begin{smallmatrix}\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right\}_R$ が次の(*)を満たせば $\Phi(\Delta)$は move $\mathcal{R}_2$ で不変である.

$$(*) \qquad \sum_{j_1, j_2, j_3 \in J} \left\{ \begin{matrix} j_1, j_2 \\ a_2, c_1 \end{matrix} \right\}_R \left\{ \begin{matrix} j_3, c_2 \\ b_2, j_2 \end{matrix} \right\}_R \left\{ \begin{matrix} a_1, j_3 \\ j_1, b_1 \end{matrix} \right\}_R$$

$$= \sum_{j \in J} \left\{ \begin{matrix} b_1, c_2 \\ j, c_1 \end{matrix} \right\}_R \left\{ \begin{matrix} a_1, b_2 \\ a_2, j \end{matrix} \right\}_R$$

for ${}^\forall a_j, b_j, c_j \in J$
$(j = 1, 2)$

これは move $\mathcal{R}_2$ の定義の図を



と $\{E_1, \cdots, E_{2\nu}\}$ の J による coloring が定まっているものとして ながめて見ればすぐにわかる．

このProp. によって move $\mathcal{R}_2$ で不変なように $\{\because\}_R$ を定めれば，$\{\because\}_B$ は move $\mathcal{R}_1$ で不変という条件から自然に定まる（これは以下の例で説明する．）

このように定まった $\{\because\}_R$，$\{\because\}_B$ が move S で不変であるか否かを調べればよい。Th. 2. を見れば例え move S では不変でなくとも落胆することはない．

$\begin{Bmatrix} i & j \\ k & l \end{Bmatrix}_R$ を $\#J = 2$ or 3 の場合に．関係式(*)を

$$\begin{Bmatrix} i & j \\ k & l \end{Bmatrix}_R = 0 \quad \text{if} \quad i > k \ \text{or} \ j < l$$

という条件のもとに解いてみた。

<u>[I] $J = \{1, 2\}$ の場合</u>

$\begin{Bmatrix} i & j \\ k & l \end{Bmatrix}_R$ を次のように行列表示する．

$(k,l) \backslash (i,j)$	(1.1)	(1.2)	(2.1)	(2.2)
(1.1)	u_1	q_1	p_1	y
(1.2)	0	v_1	0	p_2
(2.1)	0	0	v_2	q_2
(2.2)	0	0	0	u_2

i.e. $u_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_R$, $q_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}_R$, … etc.

このmatrixをKとおく． Kが(*)を満たすのは次の4つの場合である．

(1) $u_1 = -1$, $v_1 = v_2 = u_2 = y = 1$, $p_1 q_1 = -2$
$p_2 = q_2 = 0$

(2) $u_1 = v_2 = u_2 = 1$, $v_1 = y = -1$, $p_2 q_1 = 2$
$p_1 = q_2 = 0$

(3) $u_1 = v_1 = u_2 = 1$, $v_2 = y = -1$, $p_1 q_2 = 2$
$p_2 = q_1 = 0$

(4) $u_1 = v_1 = v_2 = y = 1$, $u_2 = -1$, $p_2 q_2 = -2$
$p_1 = q_1 = 0$

次にこの K に対し. $\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}\right\}_B$ を move $\mathcal{R}_2$ で 亜(Δ) を不変にするように定めることを考える.

K を 2×2 matrixes の blocks で $K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ と表示し. $\left\{\begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix}\right\}_B$ の同様の行列表示, およびその blocks を $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ で表わす. このとき.

Prop. 2.

(i) $L^T = K^{-1}$ ならば 亜(Δ) は. $\mathcal{R}_1$-(iii), (iv) で不変.

(ii) $\hat{L}^T = \hat{K}^{-1}$ ならば 亜(Δ) は $\mathcal{R}_1$-(i), (ii) で不変.

但し. $\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$, $\hat{K} \equiv \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}$ で,
L^T , $\hat{L}^T$ は転置行列を表わす.

この Prop. も move $\mathcal{R}_1$ をにらめばすぐにわかる．
従って，$\{\because\}_R$ が定まっていれば，$\{\because\}_B$ は，
$L^T = K^{-1}$ によって定め，$\hat{L}^T = \hat{K}^{-1}$ が満たされていれば，
$\Phi(\Delta)$ は moves $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ で不変となる．

上に述べた (1)〜(4) のどの場合にも，$L^T = K^{-1}$
とすれば $\hat{L}^T = \hat{K}^{-1}$ も成り立っている．更にこの場合
には，move S でも不変になることが示される。即ち，
$\Phi(\Delta)$ は $M(\Delta)$ の位相不変量を与える。　そこで，$M = M(\Delta)$
に対し，$\phi(M) = \Phi(\Delta)$ と ϕ を定める．解 (1) によって
ϕ の値をいくつか計算してみると，

$$\phi(S^3) = 1$$

$$\phi(L(p,1)) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \text{ is odd} \\ 2 & \text{if } p \text{ is even} \end{cases}$$

等となる．　この不変量の幾何的意味は今のところ不明．

(注) $\{\because\}_R$ から $\{\because\}_B$ を決定する方法は，$\# J > 2$
のときも同様である．

[II] $J=\{1,2,3\}$ の場合

同様に matrices K, L を求めると，その解の1つとして，

$$
K = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \\
\hline
(1,1) & \omega & -\delta_1 b & \delta_1 b^2 & -\delta_2 a & 2\omega^2 & -\omega^2 b & \delta_2 a^2 & -\omega^2 a & 1 \\
(1,2) & & \omega^2 & -\omega^2 b & 0 & \delta_2 a & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\
(1,3) & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
(2,1) & & & & \omega^2 & \delta_1 b & 0 & -\omega^2 a & \delta_1 & 0 \\
(2,2) & & & & & \omega & b & 0 & a & 1 \\
(2,3) & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
(3,1) & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\
(3,2) & & & & & & & & 1 & 0 \\
(3,3) & & & & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
L = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|}
(1,1) & \omega^2 & & & & & & & & \\
(1,2) & \delta_1 b & \omega & & & & & & & \\
(1,3) & 0 & b & 1 & & & & & & \\
\hline
(2,1) & \delta_2 a & 0 & 0 & \omega & & & & & \\
(2,2) & -2\omega^2 & -\delta_2 a & 0 & -\delta_1 b & \omega^2 & & & & \\
(2,3) & \omega^2 b & -\delta_2 & 0 & \delta_1 b^2 & -\omega^2 b & 1 & & & \\
\hline
(3,1) & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & & \\
(3,2) & \omega^2 a & \delta_2 a^2 & 0 & -\delta_1 & -\omega^2 a & 0 & 0 & 1 & \\
(3,3) & \omega^2 & \delta_2 a & 0 & \delta_1 b & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (3,1) & (3,2) & (3,3)
\end{array}
$$

$$\left(\omega = \exp\left(\tfrac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right),\ \delta_1\delta_2 = -1,\ ab = \omega - 1 \right)$$

を得る．

この行列 K は $(*)$ を満たし，$L^T = K^{-1}$，$\hat{L}^T = \hat{K}^{-1}$ が成り立っている。即ちこれから定めた $\{ \vdots \}_R$ 及び $\{ \vdots \}_B$ で $\Phi(\Delta)$ を定義すれば，これは moves $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ で不変な量となる．これが move S で不変であるか否かはまだ確めていないが，種々の状況証拠からは move S でも不変のようである（先に述べたように，例え move S では不変でなくとも $[\Delta]$ の不変量にはなる。）

※ これが move S でも不変になっていれば，この不変量は $L(7,1)$ と $L(7,2)$ を区別しそうである．

§.4. state sum invariant .II.

前節では spine の 1-skelton の coloring から導かれる不変量を考えたが．この節では 2-skelton の coloring を考えてみる．これは最近 Turaev-Viro によって定義された．state sum invariant と同種の物と思われる．彼等は．Matveev の spine の move に関する「定理」を基盤にしているので証明の細部には問題があるのかも知れないが．定義されている不変量は．q-6j symbol なるものを使用して意味あり気である．

他人のことはこれぐらいにして．ともかく定義してみよう．

今度は DS-diagram の 2-cell が関係するので S^1(=E-cycle) だけでなく ∂B^3 まで見る必要がある．

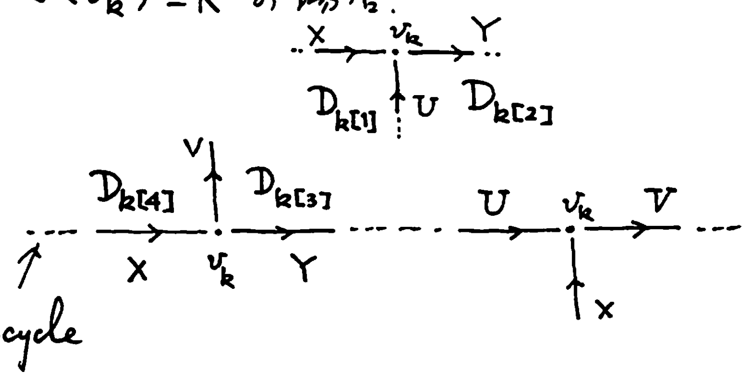
<u>Notation</u>

1) $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$: 前節と同じ，これは spine $P=\partial B^3/f$ の 3-rd singularities でもある.

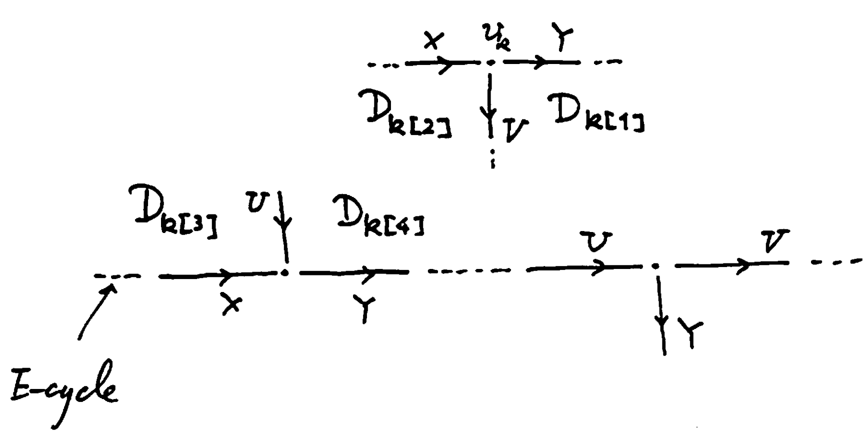
2) $D_1, D_2, \cdots, D_{\nu+1}$: $P-\mathfrak{S}_2(P)$ の components

3) 各 v_k に対し $D_{k[1]}, D_{k[2]}, D_{k[3]}, D_{k[4]} \in \{D_1, \cdots, D_{\nu+1}\}$ を次の規則で定める.

i) $\sigma(v_k)=R$ の場合.



ii) $\sigma(v_k)=B$ の場合



4) $J = \{1, 2, \cdots, n\}$: set of colors

5) $\psi : \{D_1, \cdots, D_{\nu+1}\} \longrightarrow J$: a coloring of $\{D_1, \cdots, D_{\nu+1}\}$

6) $\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_R$, $\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}_B \in \mathbb{C}$, $(i, j, k, l \in J)$

7) $w_j \in \mathbb{C}$ $(j \in J)$

Δ を E-data で DS-diagram を実現するものとする. このとき, $\Psi(\Delta)$ を,

$$\Psi(\Delta) = \frac{1}{\# J} \sum_{\psi} \prod_{l=1}^{\nu+1} w_{\psi(D_l)} \prod_{k=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \psi(D_{k[2]}), \psi(D_{k[4]}) \\ \psi(D_{k[1]}), \psi(D_{k[3]}) \end{bmatrix}_{\sigma(v_k)}$$

と定め, これが $M(\Delta)$ の位相不変量となるように $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{\sigma(v_k)}$ を定めることを考える.

<u>解の例</u>

$J = \{1, 2, \cdots, n\}$

$w_j = 1 \quad (j = 1, \cdots, n)$

$\tau : J \times J \longrightarrow J \quad : \quad \tau(i, j) \equiv i + j - 1 \pmod{n}$

として与え,

$$\begin{bmatrix} i, & j \\ k, & l \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} i, & j \\ k, & l \end{bmatrix}_B = \begin{cases} 1 & \text{if } \begin{pmatrix} \exists h \in J \\ l = \tau(i, h) \\ j = \tau(k, h) \end{pmatrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_R$, $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_B$ を定めれば．$\Phi(\Delta)$ は moves $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, S で不変となり $\Phi(\Delta)$ は $M(\Delta)$ の位相不変量を与える．これはどうも $\mathbb{Z}_n$-homology の invariant のようである．

話が前後してしまったが．move $\mathcal{R}_2$ で不変な条件は次のとおり

$$w_j \sum_{j\in J} \begin{bmatrix} j & f \\ e & g \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} c & j \\ b & e \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} b & d \\ a & j \end{bmatrix}_R$$

$$= \begin{bmatrix} c & d \\ a & e \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} c & g \\ b & f \end{bmatrix}_R$$