箱根セミナ記録 87 (1987) 1-14

DS-diagramによる基本群の非自明性の判定法

石井 一平 (慶応大. 理工)

§1. 準備

M を closed 3-manifold, (ψ_t, Σ) を M 上の normal pair とする。これに対し記号を次の様に定めておく。

記号

(1) $T_+(x) = \inf\{t > 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma\}$
$T_-(x) = \sup\{t < 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma\}$
$\hat{T}_\pm(x) = \psi_{T_\pm(x)}(x)$

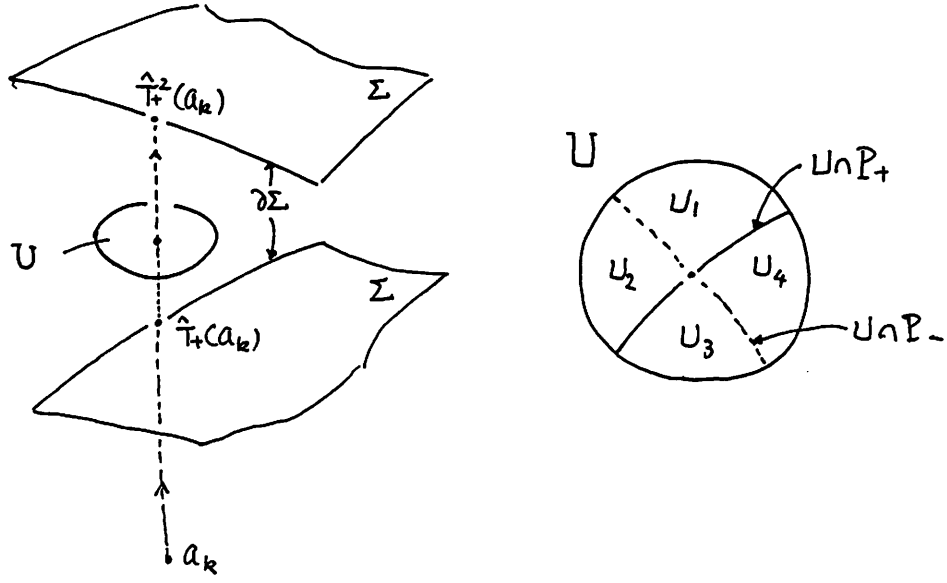
(2) $P_- = P_-(\psi_t, \Sigma) = \Sigma \cup \{\psi_t(x) \mid x \in \partial\Sigma,\ T_-(x) \leqq t \leqq 0\}$
$P_+ = P_+(\psi_t, \Sigma) = \Sigma \cup \{\psi_t(x) \mid x \in \partial\Sigma,\ 0 \leqq t \leqq T_+(x)\}$
(P_- および P_+ が (ψ_t, Σ) の生成する flow-spine.)

(3) $C_1, C_2, \cdots, C_{2\nu}$: $\partial\Sigma - (\hat{T}_+(\sigma_3(P_-)) \cup \hat{T}_+^2(\sigma_3(P_-)))$ の連結成分 ($\nu = \#\sigma_3(P_-)$)
$D_1, D_2, \cdots, D_{\nu+1}$: $\Sigma - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$ の連結成分
(C_ℓ および D_m の番号付は以下では一つ固定されているものとする。)

(4) $\{a_1, a_2, \cdots, a_\nu\} = \sigma_3(P_-)$ (この番号付についても同じ)

(2)

さて，$a_k \in \mathfrak{S}_3(P_-)$ に対し，$\hat{T}_+(a_k)$ から $\hat{T}_+^2(a_k)$ に至る orbit と transversal に交わる 2-disk U をとると，U は P_- および P_+ によって下図のように4つの領域 $U_1, \cdots, U_4$ に分けられる。



これら4つの領域 $U_1, \cdots, U_4$ は次の様に特徴付けられる。

(*) $x \to a_k$ in U_j とすると，

$$T_+(x) \longrightarrow T_+(a_k) \quad \text{for } j=1,4$$
$$T_-(x) \longrightarrow T_-(a_k) \quad \text{for } j=3,4$$

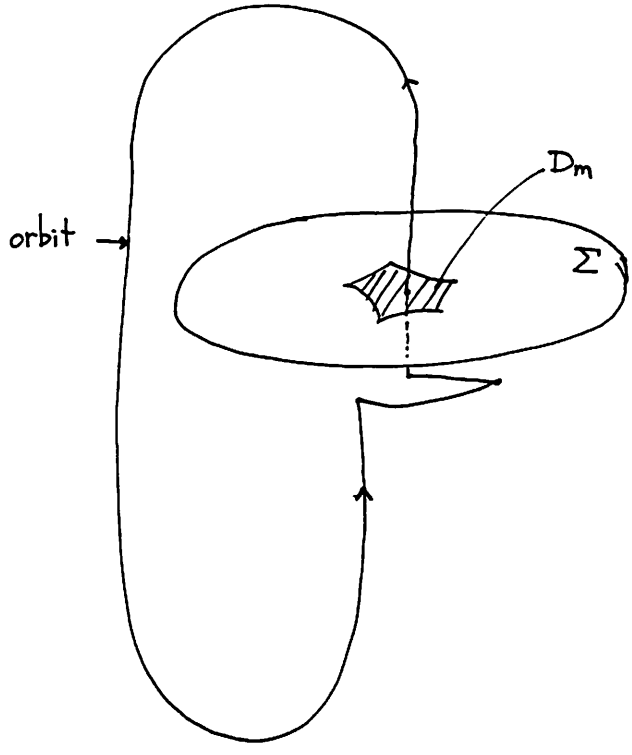
そこで各 $k=1, \cdots, \nu$ に対して，$k[j]$ $(j=1,2,3,4,\ 1 \leqq k[j] \leqq \nu+1)$ を $\hat{T}_-(U_j) \subset D_{k[j]}$ となるように定める。

このように定めた $k[j]$ によって，$\pi_1(M-\partial\Sigma)$ の表示を次の様に与えることが出来る。

<u>定理1</u>. $\pi_1(M-\partial\Sigma)=\langle g_1,\cdots,g_{\nu+1};r_1,r_2,\cdots,r_\nu\rangle$

$$r_k=g_{k[1]}\,g_{k[2]}^{-1}\,g_{k[3]}\,g_{k[4]}^{-1}\qquad(k=1,\cdots,\nu)$$

ここで下図のloopをγ_mとして，γ_m^{-1}の代表するclassが生成元g_mである。



以下では，Fで自由群$\langle g_1,\cdots,g_{\nu+1}\rangle$を，$N(r_1,\cdots,r_\nu)$で$r_1,\cdots,r_\nu$によって生成される$F$の正規部分群を表わす。

一方$\mathcal{L}(M-\Sigma,x_0)$で$x_0(\notin P_-\cup P_+)$を基点とする$M-\Sigma$内のloop$\gamma$で，

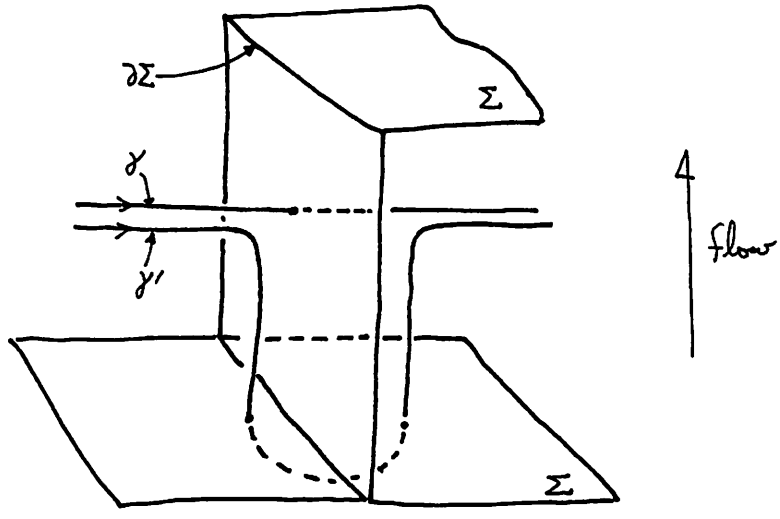
(i) $\gamma \cap (\sigma_2(P_-) \cup \sigma_2(P_+)) = \phi$

(ii) γ は $P_\pm - (\Sigma \cup \sigma_2(P_\pm))$ に transversal

を満たすものの集合を表わす。さらに、

$$p_* : \mathcal{L}(M-\Sigma, x_0) \longrightarrow F$$

を次の様に定める。γ を $\gamma \cap P_-$ の近傍で下図のように変形したものを γ' とし、$\gamma' : [0,1] \longrightarrow M$ ($\gamma'(0) = \gamma'(1) = x_0$)，$\gamma' \cap \Sigma = \{\gamma'(t_1), \cdots, \gamma'(t_q)\}$ ($0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_q < 1$) とすると，$\gamma' \cap P_- \subset \Sigma - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$ であるから、$p_*(\gamma)$ を次の様に定めることが出来る。



$$p_*(\gamma) = g_{m_1}^{\varepsilon_1} g_{m_2}^{\varepsilon_2} \cdots\cdots g_{m_q}^{\varepsilon_q}$$

$$m_k : \gamma'(t_k) \in D_{m_k}$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{if } \lim_{t \to t_k + 0} T_+(\gamma'(t)) = T_+(\gamma'(t_k)) \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このように定義すると、定理1より次を得る。

<u>系 1</u>

$\gamma \in \mathcal{L}(M-\Sigma, x_0)$ が可縮

$\Longleftrightarrow \quad p_*(\gamma) \in N(r_1, \cdots, r_\nu)$

<u>系 2</u>

$p_*(\gamma) \notin N(r_1, \cdots, r_\nu)$ なる $\gamma \in \mathcal{L}(M-\Sigma, x_0)$ が存在するならば、$\pi_1(M) \neq \{1\}$

§.2. Cancellation Diagram

(以下では、組合せ群論的用語は、
Lyndon - Schupp ; Combinatorial Group Theory , Springer
を参照のこと。)

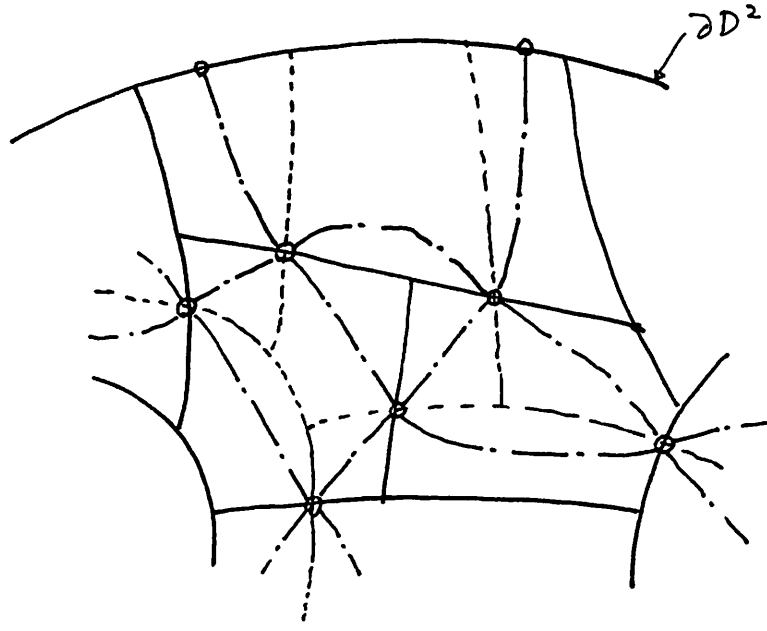
$\gamma \in \mathcal{L}(M-\Sigma, x_0)$ が可縮であるとする。このとき、$p_*(\gamma) \in N(r_1, \cdots, r_\nu)$ であるが、以下に $p_*(\gamma)$ に対する cancellation diagram と spines $P_\pm$ との関係を述べる。

$\iota : D^2 \to M-\Sigma$ を immersion で $\iota(\partial D^2) = \gamma$, さらに、$\sigma_2(P_\pm)$ および $P_\pm - \sigma_2(P_\pm)$ に transversal であるものとする。このとき、$\Gamma_\pm = \iota^{-1}(P_\pm)$ によって、D^2 上の 3-regular graphs Γ_+, Γ_- が定義される。$\Gamma_\pm$ の頂点は、$\iota^{-1}(\sigma_2(P_\pm))$ である。$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_r$ を $D^2 - \Gamma_-$ (or $D^2 - \Gamma_+$) の連結成分とする。($\overline{\Delta_j}$ は compact 2-disk と仮定する。後に考える例

では、この仮定が満たされている。) $\partial D^2 - \Gamma_+$ (or $\partial D^2 - \Gamma_-$ resp.) の成分 α のうち $\alpha \cap \Gamma_- \neq \phi$ (or $\alpha \cap \Gamma_+ \neq \phi$ resp.) なるものを $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とし、y_{2k-1}, y_{2k} を α_k 上の2点とする。このとき、D^2 上の graph $\Omega_+ = \Omega_+(\gamma, \tau)$ (or $\Omega_- = \Omega_-(\gamma, \tau)$ resp.) を次の様に定める。(下図参照)

(i) Ω_+ の頂点は $y_1, \cdots, y_{2s}$ および $\tau^{-1}(P_- \cap P_+)$
(これを $V(\Omega_+)$ と書く)

(ii) Ω_+ の辺は、各成分 Δ_j 内で $V(\Omega_+)$ の点を cyclic に結ぶ arcs, 但し y_{2k-1} と y_{2k} を結ぶ arcs は除く。



——— : Γ_+

····· : Γ_-

—·—·— : Ω_+

このとき．次が成り立つ。

<u>定理 2</u>. Ω_+ (or Ω_-) の dual graph Ω_+^* (or Ω_-^* resp.) は．$p_*(\gamma)$ の $r_1, \cdots, r_\nu$ に関する cancellation diagram を与える。

次に．cancellation diagram Ω_+^* の inner edge の type を定義する。E を Ω_+^* の inner edge とし．X_1, X_2 を Ω_+^* の regions で $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2 \supset E$ なるものとする。各 X_ℓ ($\ell=1,2$) はある relator r_{k_ℓ} に対応しており，E は各 ℓ について．ある generator $g_{k_\ell[j_\ell]}$ ($j_\ell=1,2,3,4$) に対応している．このとき．E は．(j_1, j_2)-type (あるいは．(j_2, j_1)-type) という．

上に定義した"type"を Ω_+ の言葉で表わすと．次の様になる．Ω_+^* の edge E に対応する Ω_+ の edge を α とし，α の端点を x_1, x_2 とする．また．α の x_ℓ の近傍を α_ℓ で表わす ($\ell=1,2$)．各 $\iota(x_\ell)$ は．ある $a_{k_\ell} \in \mathfrak{S}_3(P_-)$ に対し．$\hat{\tau}_+(a_{k_\ell})$ から $\hat{\tau}^2(a_{k_\ell})$ に至る orbit 上にある。従って $\iota(x_\ell)$ に対し．§1 の様な 2-disk U^ℓ がとれ，U^ℓ は §1 同様．P_- および P_+ によって．$U_1^\ell, \cdots, U_4^\ell$ に分割される。このとき．

$$E \text{ が } (j_1, j_2)\text{-type} \iff \iota(\alpha_\ell) \subset U_{j_\ell}^\ell \quad (\ell=1,2)$$

となっている。

同様に Ω_+^* の boundary edge E が j-type であるとは．$\overline{X} \supset E$ となる region X が relator r_k に対応し．E が generator $g_{k[j]}$ に対応することと定める。

全く同じように Ω_-^* の edge についても type が定義される。

§3. Singularity-Data of a DS-diagram

G を S^2 上の 3-regular graph, P を closed fake surface, $f: S^2 \to P$ が local homeo. で (G, f) が E-cycle e を持つ DS-diagram を定めているとする。ここでは. E-cycle 付 DS-diagram の singularity-data を簡単に復習する。('86 箱根セミナ報告を参照)

$S^2 - e$ の連結成分を Σ_1, Σ_2 とし G の e 上の頂点を次の様に. V_1, V_2 に分類する.

$b \in V_j \iff$ b から出る e 上にない G の edge が Σ_j に含まれる. $(j=1,2)$

このとき. 各 $b \in V_1$ に対し. $f(c) = f(b)$ となる $c \in V_2$ が唯一つ存在するこれを $c = g(b)$ と表わす.

さらに e 上に向きを一つ固定して. 各 V_j $(j=1,2)$ を V_j^+, V_j^- に次の様に分類する.

(i) $b \in V_1^+ \iff$ x が e 上正の向きに. b に近づくとき. $g(x) \to g(b)$

(ii) $V_1^- = V_1 - V_1^+$

(iii) $c \in V_2^+ \iff$ x が e 上負の向きに c に近づくとき. $g(x) \to g(c)$

(iv) $V_2^- = V_2 - V_2^+$

(但し. ここでの g は上の g を S^2 に拡張したもの. 定義は '86 箱根セミナ報告 P35~36 にある.)

このとき．$(V_1^+, V_1^- ; V_2^+, V_2^- ; g)$ を (G, f) の singularity-data という。（ここでの g は $V_1^+ \cup V_1^-$ 上の map）．すべての singularity-data が DS-diagram によって実現されるわけではないが．E-cycle 付 DS-diagram はその singularity-data によって完全に決定される．

<u>Remark</u>　B^3/f が orientable $\Longleftrightarrow$ $g(V_1^+) = V_2^+$

§4. A class of DS-diagrams

この節では．§2. のような方法による cancellation diagram の考察から基本群の非自明性が証明される DS-diagrams の class を紹介する．これは '86 箱根セミナ報告の例の一般化となっている。

4.1. DS-diagram $\Phi(n, m ; \sigma)$

n を 2 以上の自然数，$\mathfrak{S}_n$ を n 次置換群とする。$\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分集合 $J = \{j_1, \cdots, j_r\}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_r)$ に対し．$\tau(J)$ で巡回置換 $(j_1 j_2 \cdots j_r)$ を表わし．$\tilde{J}$ で S^1 の部分集合．$\{\exp(2j\pi\sqrt{-1}/n) \mid j \in J\}$ を表わす．又．特に巡回置換 $(1\,2 \cdots n)$ を τ_0 で表わす。このとき．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対する条件 $C(n, m)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の様に定める．

<u>条件 $C(n, m)$</u>　$\sigma^{m+1} \tau_0^{-1} \sigma^{-m-2}$ は下の条件 (i)〜(iv) を満足する $J_1, \cdots, J_q \subset \{1, \cdots, n\}$ によって．

$$\sigma^{m+1} \tau_0^{-1} \sigma^{-m-2} = \tau(J_q)\tau(J_{q-1}) \cdots \tau(J_1)$$

と表わされる。

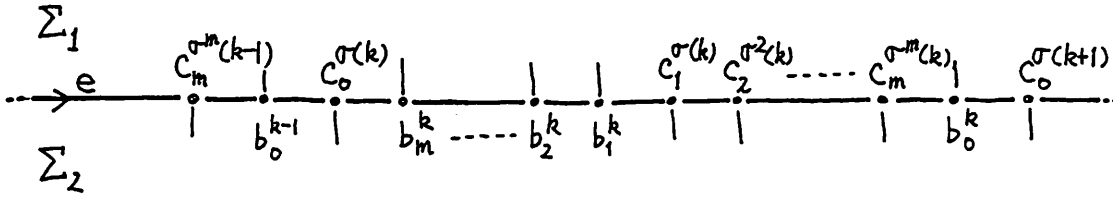
(i) $J_k \cap J_\ell = \phi$ for any k, ℓ $(k \neq \ell)$

(ii) $\# J_k \geqq 2$ for any k

(iii) $\bigcup_{k=1}^{n} J_k = \{1, 2, \cdots, n\}$

(iv) すべての k, ℓ $(k \neq \ell)$ に対し、$\tilde{J}_k$ と $\tilde{J}_\ell$ は S^1 上2点で分離される。

条件 $C(n,m)$ を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し、下図の singularity-data を持つ E-cycle 付 DS-diagram が存在する これを $\Phi(n, m; \sigma)$ で表わす。



$$\begin{cases} V_1^+ = \{ b_0^1, b_0^2, \cdots, b_0^n \} \\ V_1^- = \{ b_k^\ell \mid \ell = 1, \cdots, n, \ k = 1, \cdots, m \} \\ g(b_k^\ell) = c_k^\ell \\ V_2^+ = \{ c_0^1, \cdots\cdots, c_0^n \} \\ V_2^- = \{ c_k^\ell \mid \ell = 1, \cdots, n, \ k = 1, \cdots, m \} \end{cases}$$

<u>Example</u>. $\sigma = \tau_0^{-2}$ はすべての n, m に対し $C(n, m)$ を満たす。

例えば、$\Phi(5, 0; \tau_0^{-2})$ = dodecahedral space 。

<u>Remark</u>: 上の class $\Phi(n,m;\sigma)$ はさらに一般化される。この class の DS-diagrams は、fibred knot (link) に沿った flow から構成したものである。

次節において、例として $\Phi(n,0;\sigma)$ の基本群の非自明性の証明法を示す。

§5. $\pi_1(\Phi(n,m;\sigma))$ の非自明性の証明法の概略.

$n \geqq 2$ とし、M を DS-diagram $\Phi(n,m;\sigma)$ で表示される 3-manif. とする。また (ψ_t, Σ) を $\Phi(n,m;\sigma)$ を生成する <u>normal pair</u> とする。

γ を $M-\Sigma$ 内の contractible loop, $\iota : D^2 \to M-\Sigma$ を $\iota(\partial D^2) = \gamma$ なる immersion とする。さらに、$\Omega^*_\pm = \Omega^*_\pm(\gamma, \iota)$ を §2 で定義された $P_*(\gamma)$ の cancellation diagram とする。ここで ι は $\#(\iota(D^2) \cap P_- \cap P_+)$ および $\#(\iota(D^2) \cap P_\pm)$ を minimize するように選ばれているものとする。graph Ω^*_+ (or Ω^*_-) に対し次の notation を用いる。

<u>Notation</u>:

$r = \#\{\text{regions}\}$ (bounded regions)

$b_j = \#\{j\text{-type boundary edges}\}$, $b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

$e = \#\{\text{edges}\} = b + \#\{\text{inner edges}\}$

$v = \#\{\text{vertices}\}$

$x_{j_1,j_2} = \#\{(j_1,j_2)\text{-type inner edges}\}$

すべての region が degree 4 であるから.

$$e = 2r + \frac{b}{2}$$

従って Euler-formula より

$$(1) \qquad v = e - r + 1 = r + \frac{b}{2} + 1$$

また $\Omega_{\pm}^{*}$ の定義より容易に $\Phi(n,0;\sigma)$ の場合には.

$$x_{1,1} = x_{1,2} = x_{2,3} = x_{2,4} = x_{3,3} = x_{4,4} = 0$$

であることが示される. 従って.

$$(2) \quad \begin{cases} 2x_{2,2} + b_2 = r \\ x_{1,3} + x_{1,4} + b_1 = r \\ x_{1,3} + x_{3,4} + b_3 = r \\ x_{1,4} + x_{3,4} + b_4 = r \end{cases}$$

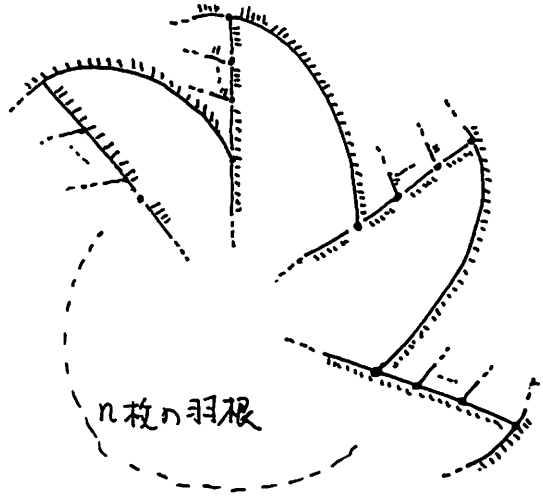
が成り立つ。又. $e = b + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,2} + x_{3,4}$.

<u>Step. 1.</u>

γ を $\#(\gamma \cap P_+) = 1$ なる $M - \Sigma$ 内の loop とし. これに対し. $p_*(\gamma)$ の cancellation diagram Ω_+^* を考える。(このとき $b=2$)

Ω_+^* から (2.2)-type と (3.4)-type の edges を取り除いた graph を Λ とすると. (1), (2) より Λ は connected ではあり得ないことがわかる。しかも Λ の component で, Ω_+^* の boundary edges を含まないものが存在する.

このとき、Ω_+^* の定義と、$\Phi(n,0;\sigma)$ の特性から、$\Gamma_+ = i^{-1}(P_+)$ は、次図に示されるような部分を持つことが示される。

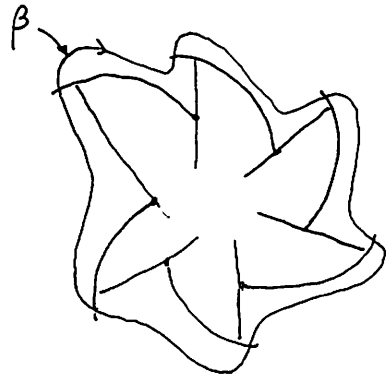


—— : Γ_+

$\overset{\bullet x}{\underset{\bullet y}{\cdots\cdots}}$ $\quad |T_-(\tau(x))| < |T_-(\tau(y))|$

Step 2.

上の"n枚の羽根"を一周する loop を $\beta\ (\subset D^2)$ とし、$\gamma_2 = \tau(\beta)$ と対する cancellation diagram Ω_-^* を考える。



但し．γ_2 に対する immersion τ は Step.1. のものの制限である。

そして．今度は．Ω_-^* から (2,2)-type と (1,4)-type の inner edges を除いた subgraph を考えると．Step 1. と同様に．Γ_- が上と同じ"n枚羽根"の部分を持つことが示される。

Step. 3

前段階の"n枚羽根"を一周する loop を β とし．$\gamma_3 = \tau(\beta)$ とする。$p_*(\gamma_3)$ の cancellation diagram として．再び Ω_+^*，およびその subgraph として (2,2)，(3,4)-type の edges を除いて得られるものを考える。すると．Γ_+ が"n枚羽根"を持つ。

⋮

このように．Ω_+^* と Ω_-^* を交互に適用して．cancellation diagrams の無限列が得られる。これは regions の個数に関して減少列であるから cancellation diagram の有限性に矛盾する．従って．Step.1. の γ は contractible でないことが示され．定理1，系1，2 により．$\pi_1(\Phi(n,0;\sigma)) \neq \{1\}$ が示される。

$\Phi(n,m;\sigma)$ あるいは．それをさらに一般化した class に対して同じ方法が適用され．基本群の非自明性が証明される。この場合．edges の type の分類が $\Phi(n,0;\sigma)$ の場合より．かなり複雑になる．

P.S. 上の証明の詳しい報告は．次回箱根セミナで…。