

Examples of DS-diagrams

慶応大.理工. 石井一平

この報告では、DS-diagrams を系統的に作り出すいくつかの方法を紹介する。

§1. 準備

(G, f) を E-cycle e を持つ DS-diagram とし、 e 上の向きを一つ fix する。 $e \cap V(G)$ を 本報告集の "DS-diagram と Seifert fibred..." の中で述べたように V_1 と V_2 とに分ける。

さらに、 V_1 を次の様に B^+ と B^- とに分類する。

$$i) \quad b \in B^+ \Leftrightarrow x \text{ が } e \text{ 上正の向きに } b \text{ に近づくとき, } g(x) \rightarrow g(b)$$

$$ii) \quad b \in B^- \Leftrightarrow x \text{ が } e \text{ 上負の向きに } b \text{ に近づくとき, } g(x) \rightarrow g(b)$$

(但し $g: \bar{\Sigma}_1 \rightarrow \bar{\Sigma}_2$ (Σ_j は $S^2 - e$ の components) は上記 "DS-diagram..." で定義された写像である)

V_2 も同様に次の C^+ と C^- に分ける。

$$i) \quad c \in C^+ \Leftrightarrow x \text{ が } e \text{ 上負の向きに } c \text{ に近づくとき, } g^{-1}(x) \rightarrow g^{-1}(c).$$

$$ii) \quad c \in C^- \Leftrightarrow x \text{ が } e \text{ 上正の向きに } c \text{ に近づくとき, } g^{-1}(x) \rightarrow g^{-1}(c).$$

そして、 $\theta: B^+ \cup B^- \rightarrow C^+ \cup C^-$ を

$$y = \theta(x) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

で定まる写像とすると、 $(\omega; B^+, B^-; C^+, C^-; \theta)$ (ω は e 上の指定された向き) は 数解研講究録 563 で singularity-data と呼ばれるものとなる。

以下で述べる DS-diagrams を作る方法は、singularity-data の class を定め、その中で DS-diagram として実現可能なものを探すというものである。

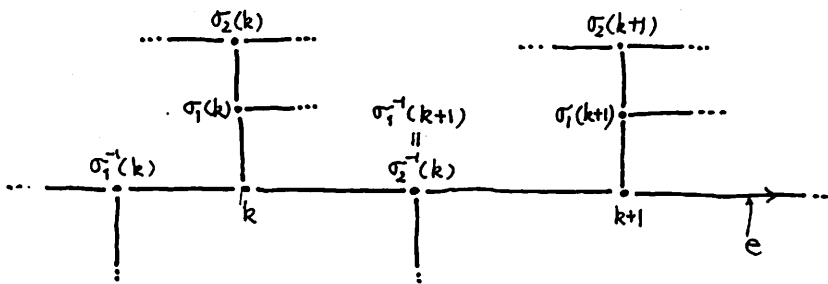
§.2.

まず、singularity-data として次の条件 (1) を満たす class を考える。

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} (a) B^- = \emptyset, C^- = \emptyset, \#B^+ = \#B^- = \nu \\ (b) e - B^+ \text{ の各 component に } C^+ \text{ の点 が 1 個 ずつある.} \end{array} \right.$

B^+ の点 が e 上 cyclic order $1, 2, \dots, \nu$ と並んでいるものとする。
又、 $\theta(k) \in C^+$ を 同じ文字 k で表わす。

このとき、(1) を満足する singularity-data が 実現可能 とすると、対応する DS-graph G の頂点、辺 は 下図 の 様に 並ぶ。



ここで σ_1, σ_2 は ν -次対称群 S_ν の元で $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ j_1 & j_2 & \dots & j_\nu \end{pmatrix} \in S_\nu$

のとき、 $\sigma(k) = j_k$ と書く。

これが実際に DS-graph として実現される為の条件は、後で述べるような条件を満足する $\tau \in \mathcal{S}_\nu$ が存在して、 σ_1, σ_2 が

$$(2) \quad \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_0 \cdot \sigma_1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \cdot \tau$$

を満足することである。但し、 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu-1 & \nu \\ 2 & 3 & \dots & \nu & 1 \end{pmatrix}$ で τ は巡回置換の積として $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_s$ ($\tau_\ell = (k_1^\ell, k_2^\ell, \dots, k_{r_\ell}^\ell)$) と書いたとき、 $A_\ell = \{k_1^\ell, \dots, k_{r_\ell}^\ell\}$ ($r_\ell = 1$ の場合も許して、 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s = \{1, \dots, \nu\}$ とする) が次の条件 (3) を満たすものである。

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) A_\ell \cap A_{\ell'} = \emptyset \text{ for } \ell \neq \ell' \\ (ii) \ell \neq \ell' \text{ のとき } (A_\ell, A_{\ell'} \text{ を } B^+ \text{ の部分集合とみて}) \\ \quad \text{e 上には } A_\ell, A_{\ell'} \text{ を分離するよう } 2 \text{ 点をとるこ} \\ \quad \text{ができる。} \end{array} \right.$$

(1) $\tau = \sigma_0$ の場合

この場合には、すくなくとも (2) の解として、 $\sigma_1 = \sigma_0^2, \sigma_2 = \sigma_0$ がある。これは、池田氏が講義録 563 "DS-diagram with E-cycle of example" の中で挙げた例 (A) である。

この解以外のものを $\nu = 5, 6$ のときは計算機で調べた結果。

$\nu = 5$ のとき、Fig. 1 の 1 例

$\nu = 6$ のとき、Fig. 2, 3 の 2 例

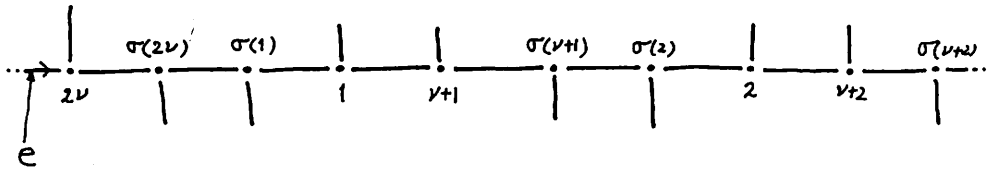
があることがわかった。

[I] $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ の場合

やはり計算機による結果. この場合には Fig. 4-7 の 4 例がある.

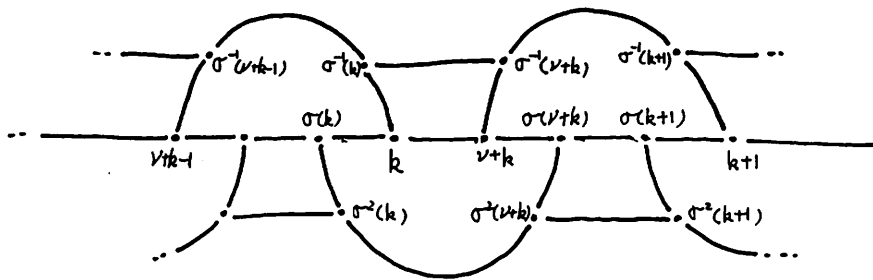
§.3.

次に下図の class を考える. ($\#(B^+ \cup B^-) = 2\nu$)



$$\begin{cases} B^+ = \{1, \dots, \nu\}, & B^- = \{\nu+1, \dots, 2\nu\} \\ C^+ = \theta(B^+), & C^- = \theta(B^-), & \sigma \in \mathcal{S}_{2\nu} \end{cases}$$

この singularity-data が実現可能とすると DS-graph は.



となる. このことから実現可能条件は σ が次の (4) を満足することであることがわかる.

$$(4) \quad \tau_1 \circ \tau_0 \circ \sigma = \sigma \circ \tau_1, \quad \sigma^2 \circ \tau_1 \circ \tau_0 = \tau_1 \circ \sigma^2$$

但し.

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu & \nu+1 & \nu+2 & \cdots & 2\nu-1 & 2\nu \\ \nu & 1 & \cdots & \nu-1 & \nu+2 & \nu+3 & \cdots & 2\nu & \nu+1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \nu & \nu+1, \nu+2 & \cdots & 2\nu \\ \nu+1 & \nu+2 & \cdots & 2\nu & 1 & 2 & \cdots & \nu \end{pmatrix}$$

計算機による結果.

$\nu=2$ のとき. 例なし.

$\nu=3$ のとき. 講義録 563 に挙げて $T = S^1 \times S^1 \times S^1$ の $\mathbb{C}P^2$ Fig. 8

$\nu=4$ のとき. 例なし

$\nu=5$ のとき. Fig. 9 の 1例

$\nu=6$ のとき. 例なし

$\nu=7$ のとき. 数例あり.

問題

§2. の条件と §3. の条件を混合したような条件ではどうか?

§4. Heegaard genus ≤ 1

次の条件 (5) を満足する singularity-data を考える.

(5) e 上 $B^+ \cup B^-$ と $C^+ \cup C^-$ は 2 点で分離される.

(i.e. $\exists x_1, x_2 \in e$ s.t. $B^+ \cup B^-$ と $C^+ \cup C^-$ は $e - \{x_1, x_2\}$ の異なる component に含まれる.)

条件 (5) を満たす範囲で 3-rd singularity を (manifold を不変に保って) 減らすことが出来るものを list up すると.

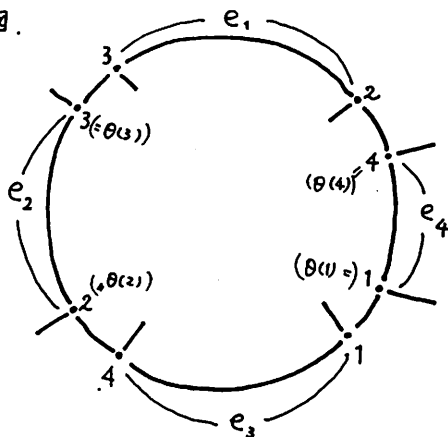
- (a) アワビ ... S^3
- (b) 池田(2-7) (研究録524) ... $S^2 \times S^1$
- (c) Fig. 10 ... $L(p, q)$ (lens space)

すべて尽くされる。即ち「条件⑤」 = 「Heegaard genus ≤ 1 」。

§.5.

最後に、§4.の一般化への手探りとして次のような singularity-data の class を考える。

- (a) 1, 2, 3, 4, $\theta(j)$ ($j=1, 2, 3, 4$) は右図。
- (b) $1, 3 \in B^-, 2, 4 \in B^+$
- (c) $\theta(B^+) = C^+, \theta(B^-) = C^-$
- (d) 1, 2, 3, 4 の他の $B^+ \cup B^-$ は右図の subarcs e_1, e_3 に含まれる。
- (e) $\theta(j)$ ($j=1, 2, 3, 4$) の他の $C^+ \cup C^-$ の点 は右図の subarcs e_2, e_4 上にある。



実現可能であって、(b)を満足する範囲内での manifold を変えない変形で 3-rd singularities を減少させることができないものを求めると、Fig. 11 で与えられる singularity-data を得る。この DS-Diagram を e の片側だけ描いたものが Fig. 12 である。 e の反対側の graph は、対称なものが出てくる。

Remark.

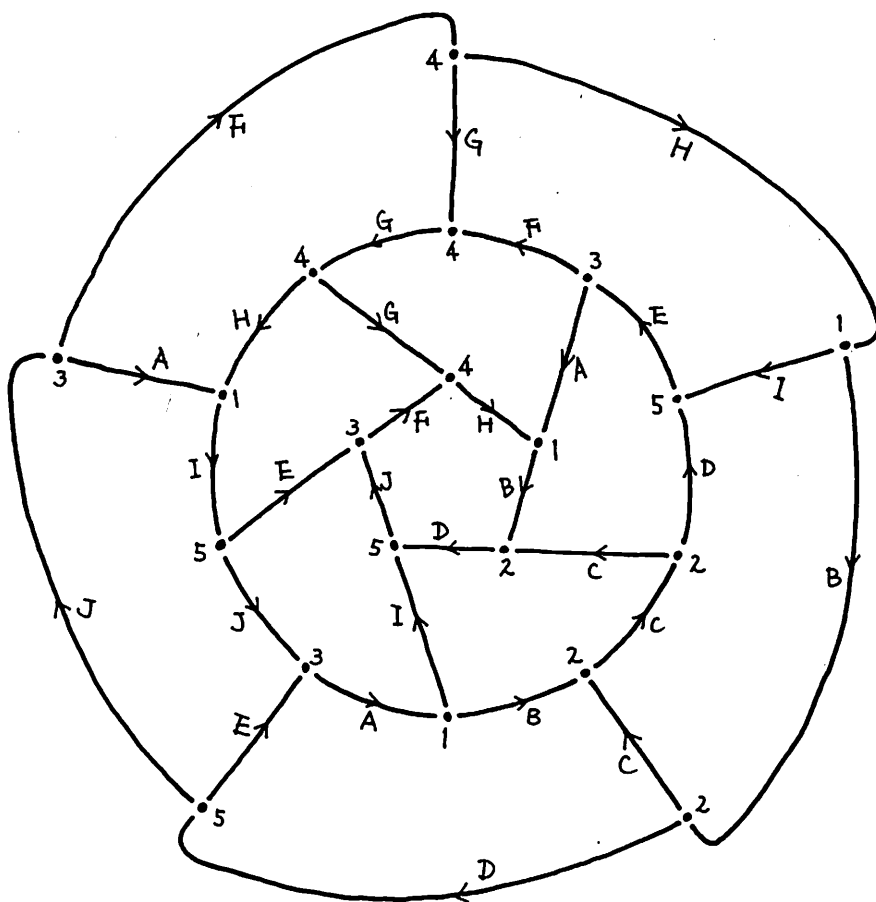
- (i) この節で取り扱った系列は、池田氏の“非基本変形”で統制されると思われる。
- (ii) 一般に $B^+ \cup B^-$ と $C^+ \cup C^-$ が e 上 4 点で分離される DS-diagram with E-cycle で表現される manifold は 2-generators, 2-relators の基本群表示を持つ。

問題

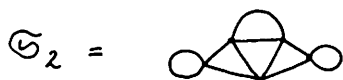
「 $B^+ \cup B^-$ と $C^+ \cup C^-$ が 4 点で分離される」

= 「Heegaard genus ≤ 2 」 ?

(5) - 1

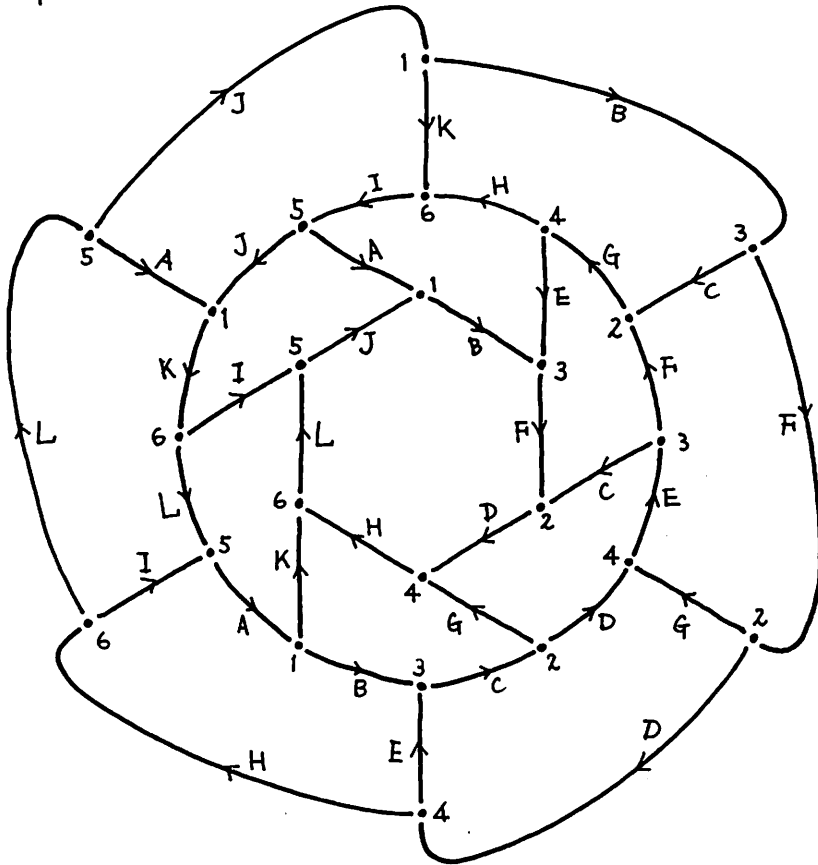


$$\pi_1 = \langle g_1, g_2 ; g_2 = g_1^2 g_2^2 g_1^2, g_1^3 = g_2^3 \rangle$$



[Fig. 1]

(6) - 1

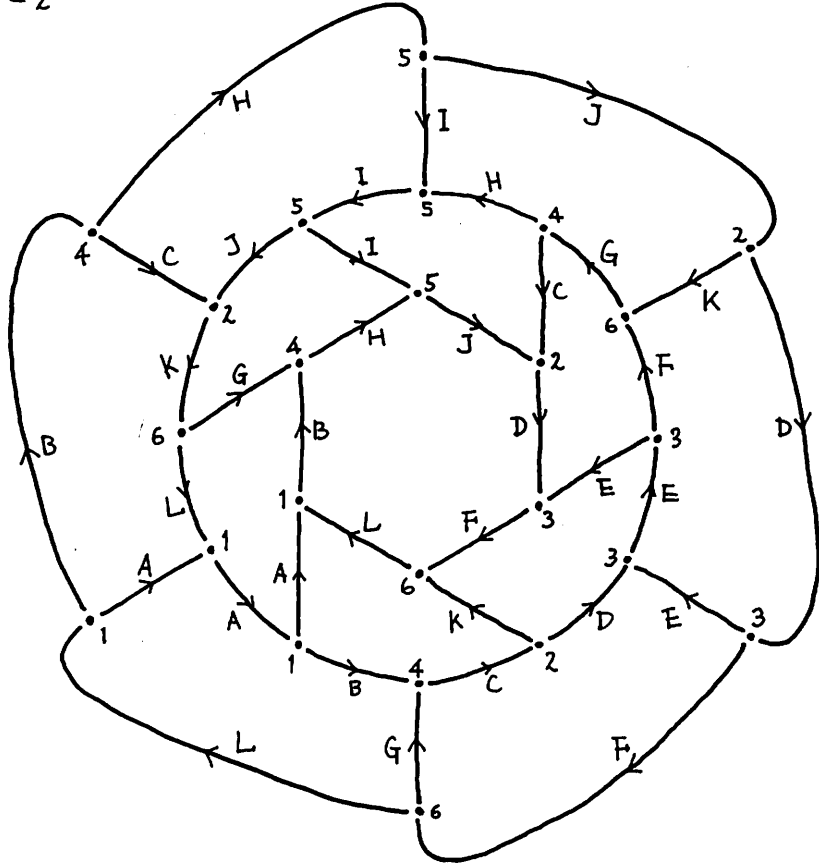


$$\pi_1 = \langle g_1, g_2 ; g_1^3 = g_2 g_1^{-1} g_2, g_2^3 = g_1^{-1} g_2 g_1^{-1} \rangle$$

$$\mathcal{G}_2 =$$

[Fig. 2]

(6) - 2

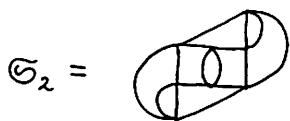
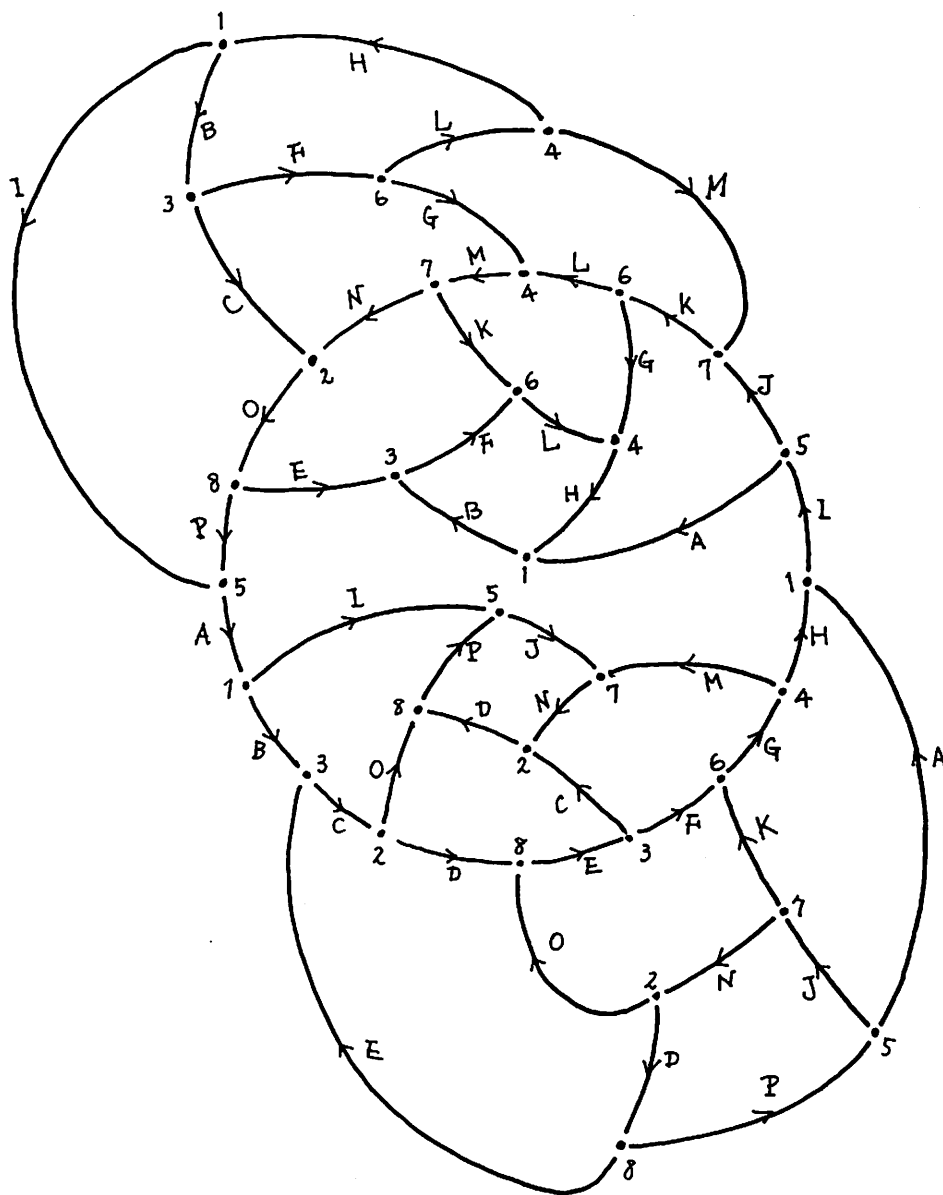


$$\pi_1 = \langle g_1, g_2 ; g_1 = g_2^2 g_1^2 g_2^2 g_1^2 g_2^2, g_2 = g_1^2 g_2^2 g_1^2 g_2^2 g_1^2 \rangle$$



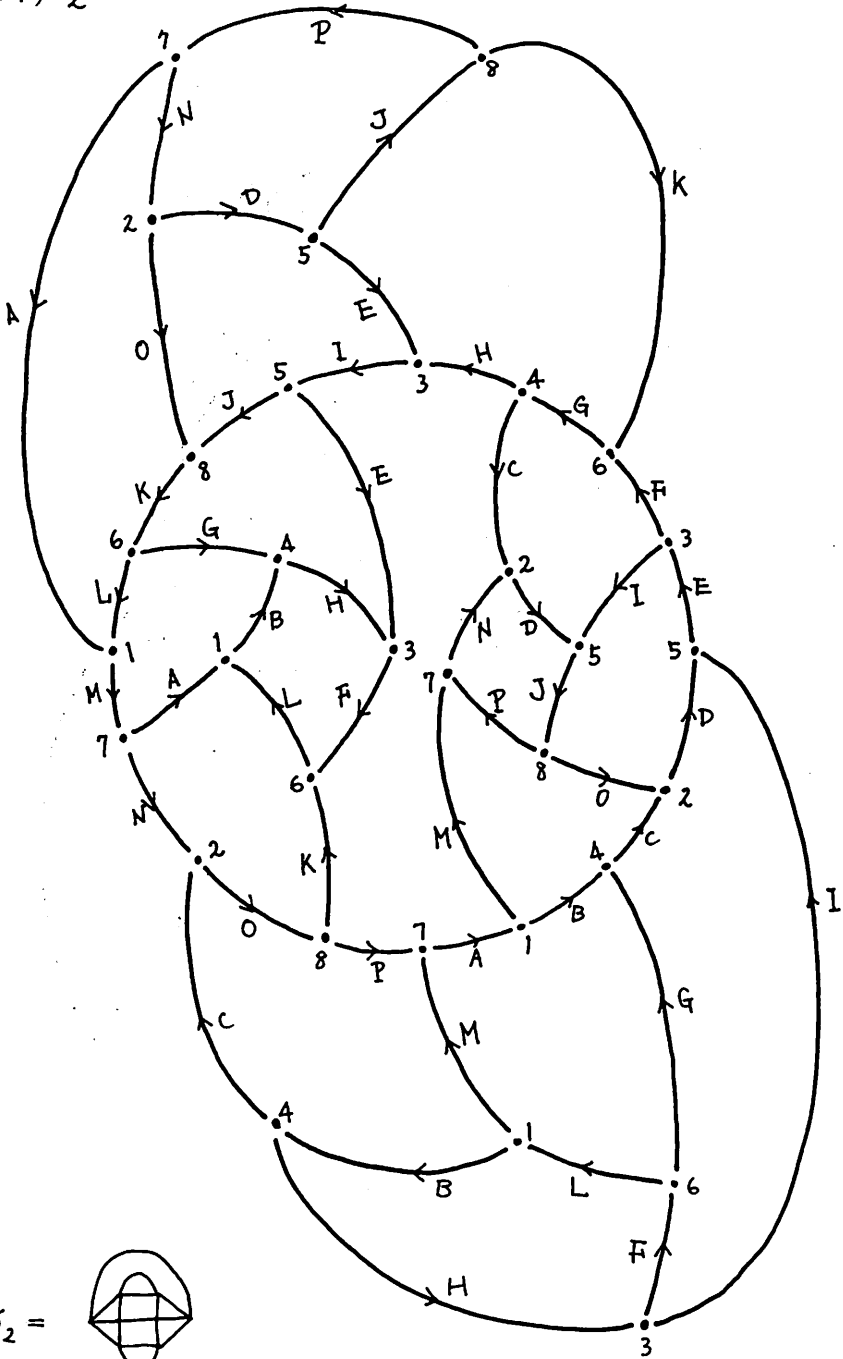
[Fig. 3]

(4, 4) - 1

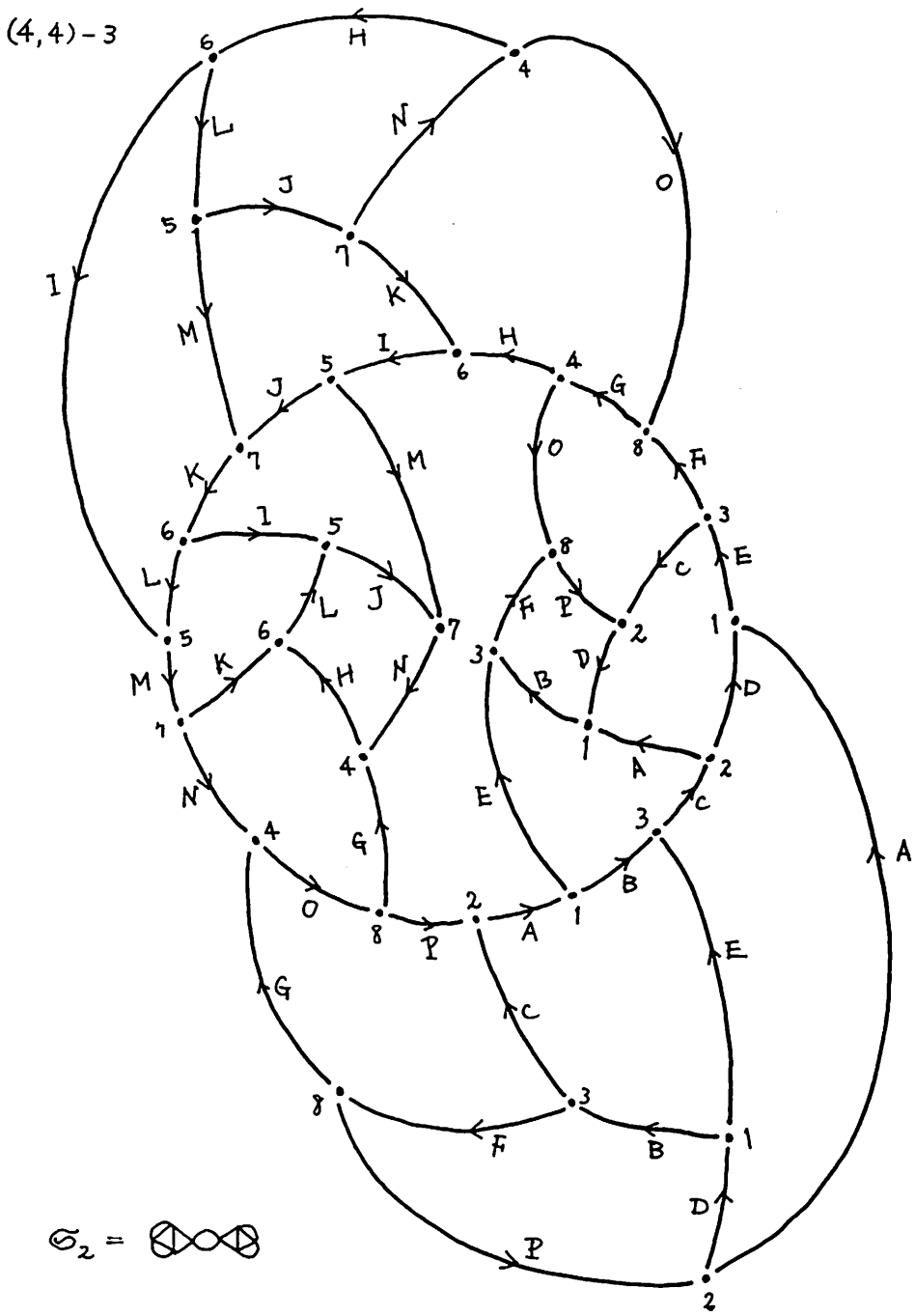


[Fig. 4]

(4.4)-2

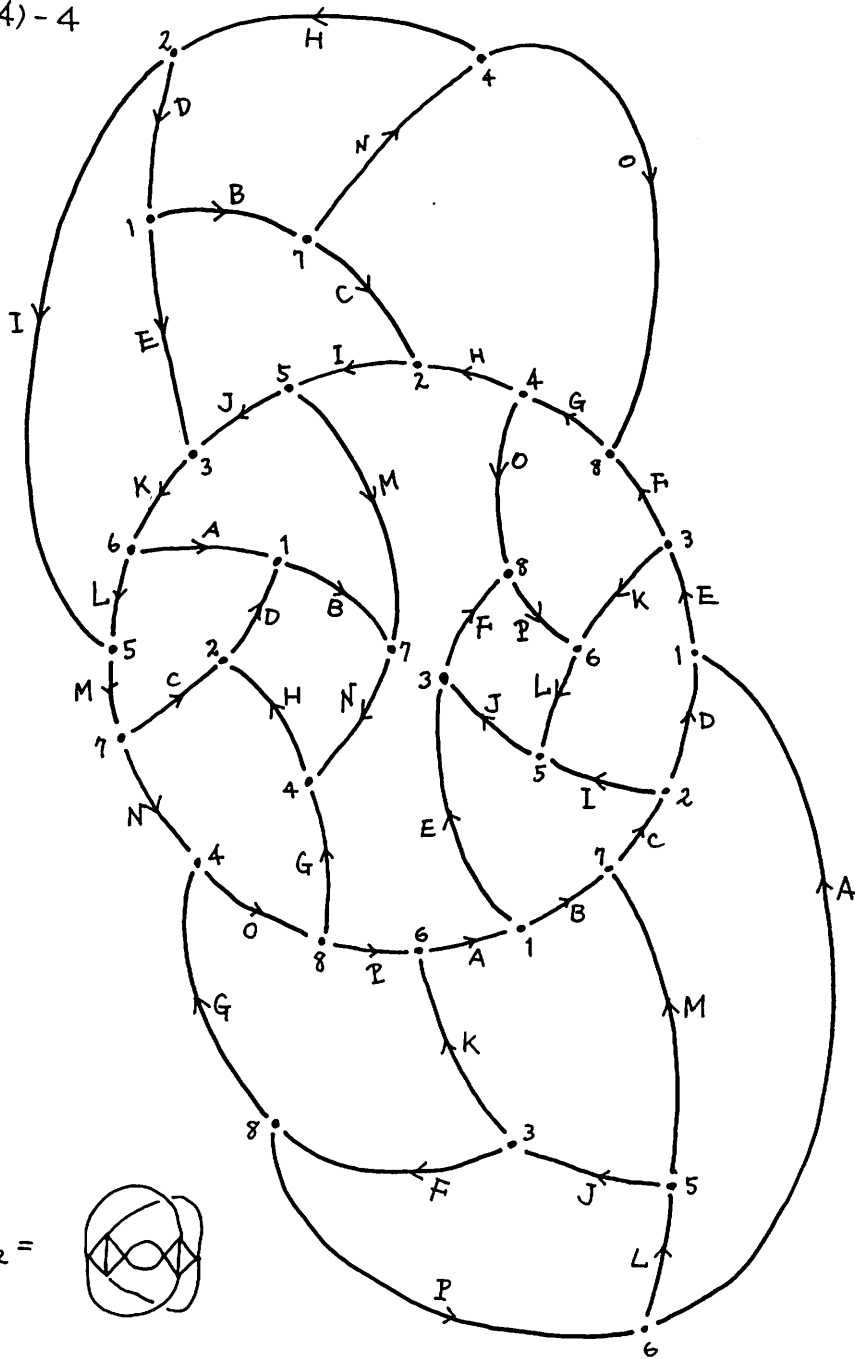


[Fig. 5]

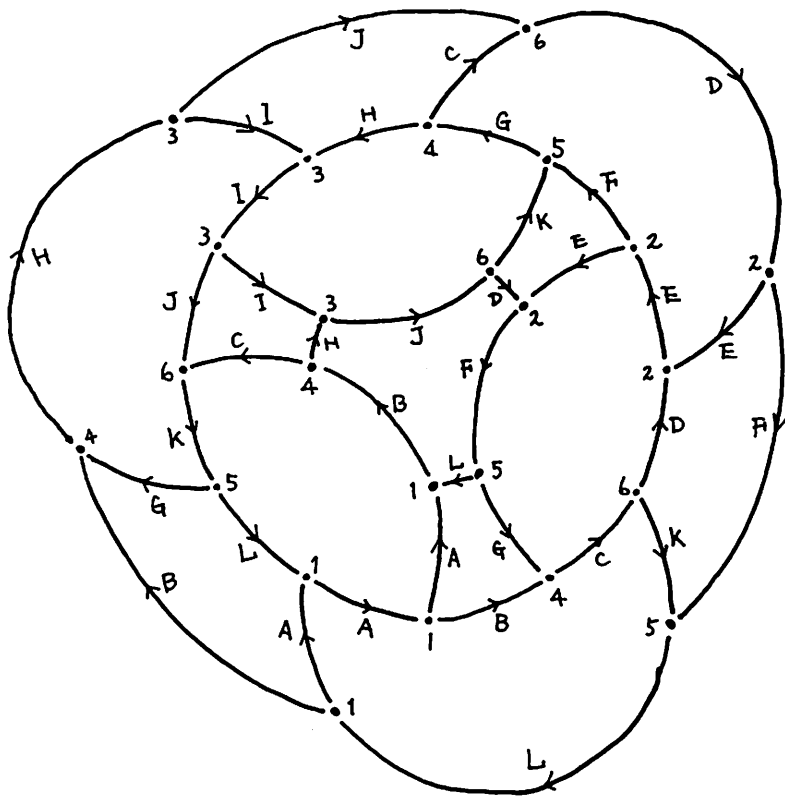


[Fig. 6]

(4,4) - 4

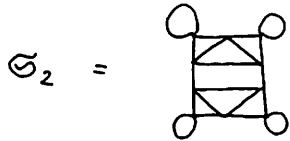
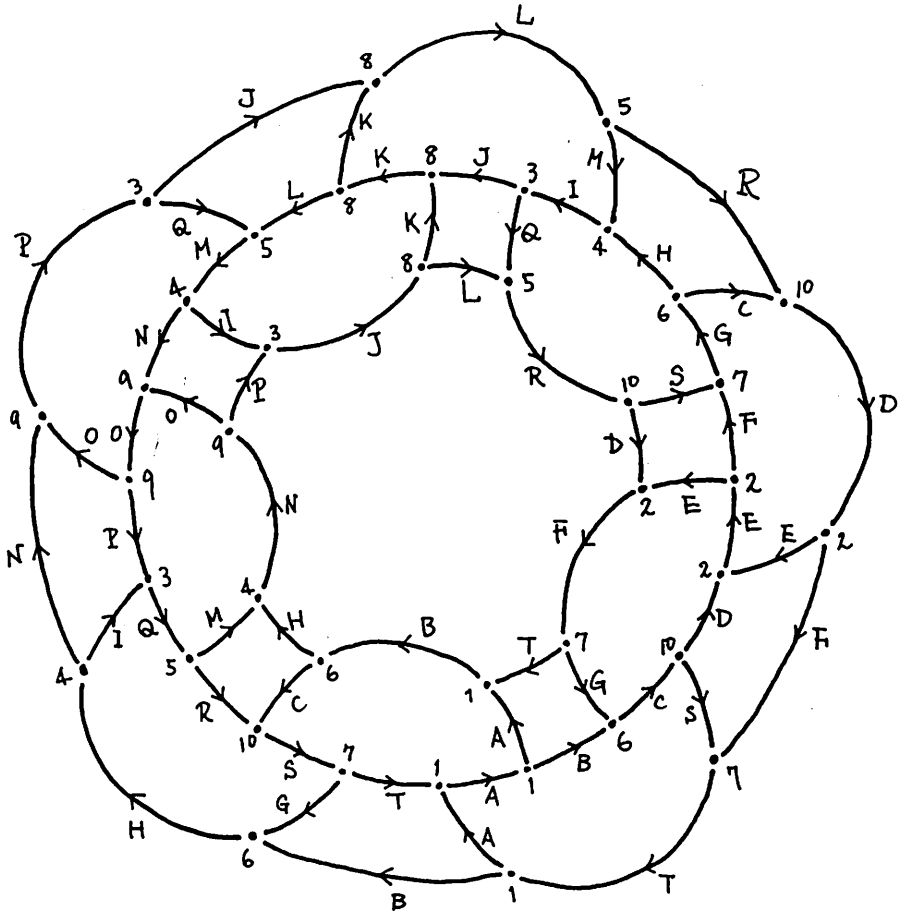


[Fig. 7]

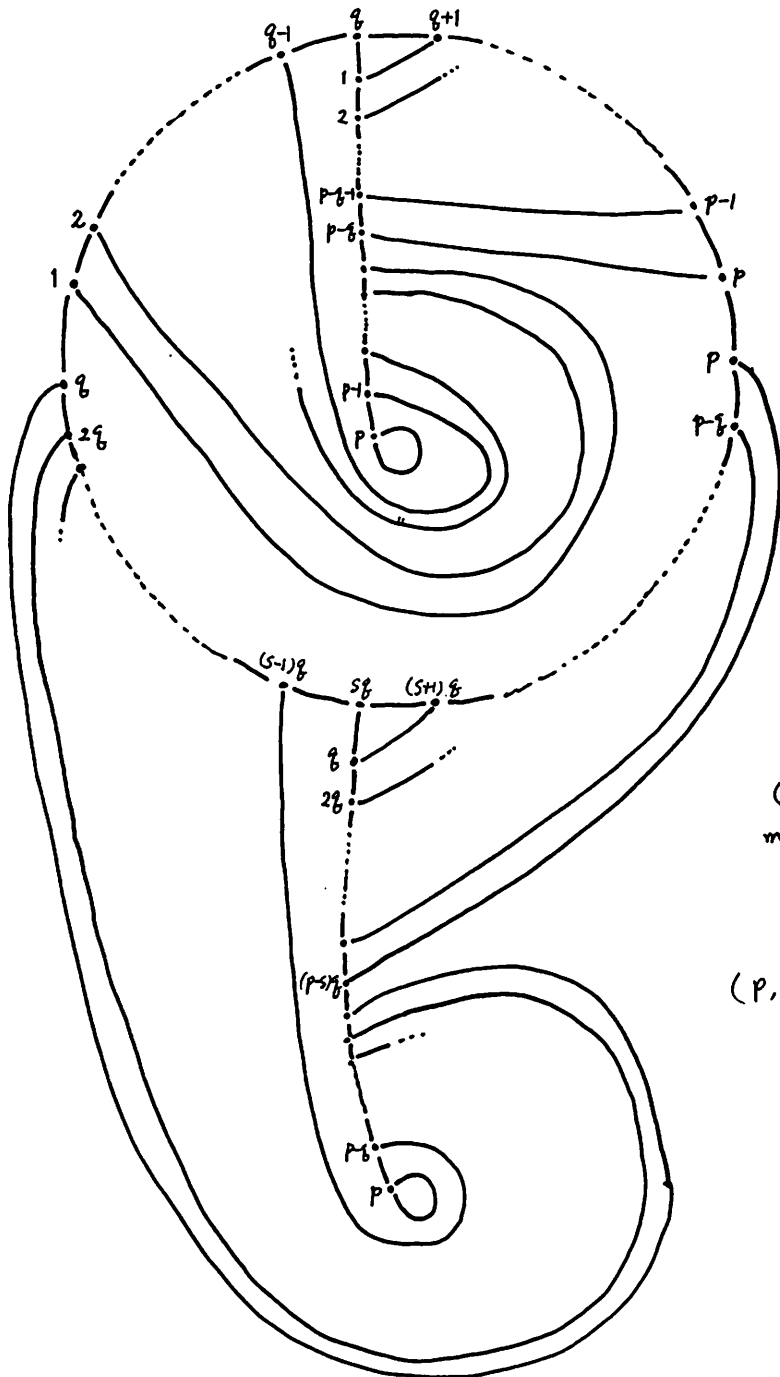


$\mathcal{G}_2 =$
 A small graph with three nodes and three edges forming a triangle. The nodes are represented by circles, and the edges are represented by lines connecting them.

[Fig. 8]



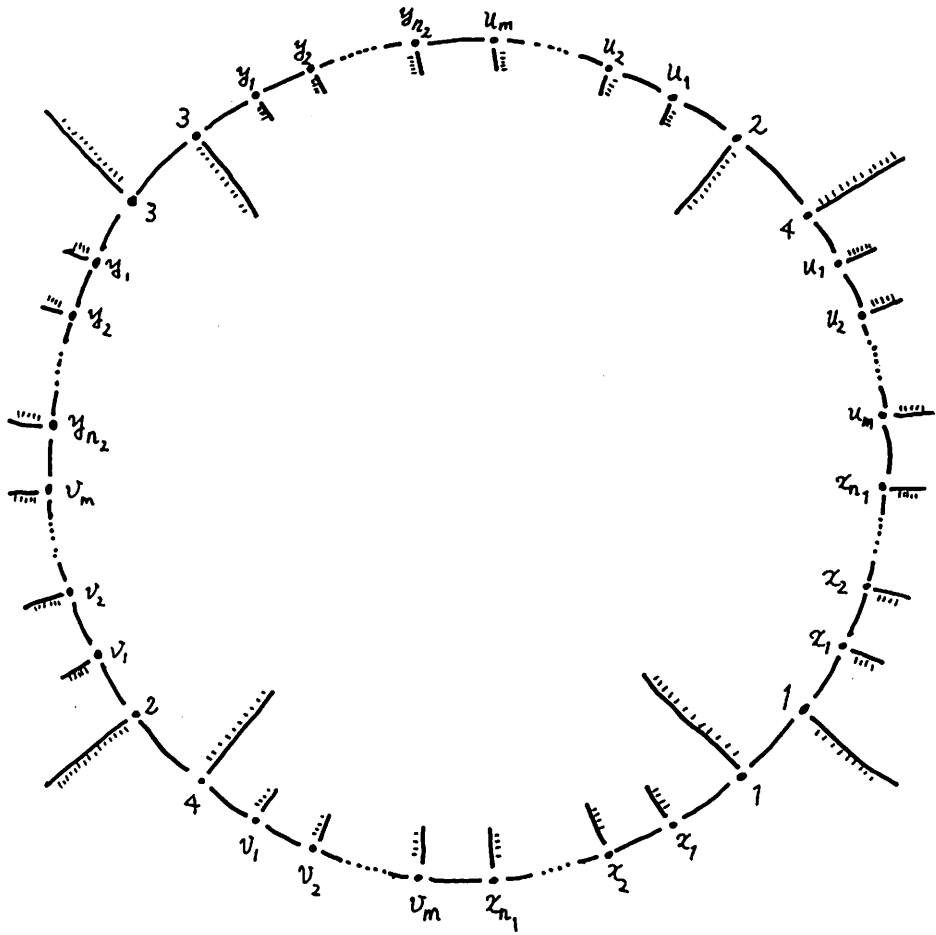
[Fig. 9]



(番号はすべて
 $\text{mod } p$ で考える
 $sg \equiv 1 \pmod{p}$)

$(p, g) = 1$

[Fig. 10]

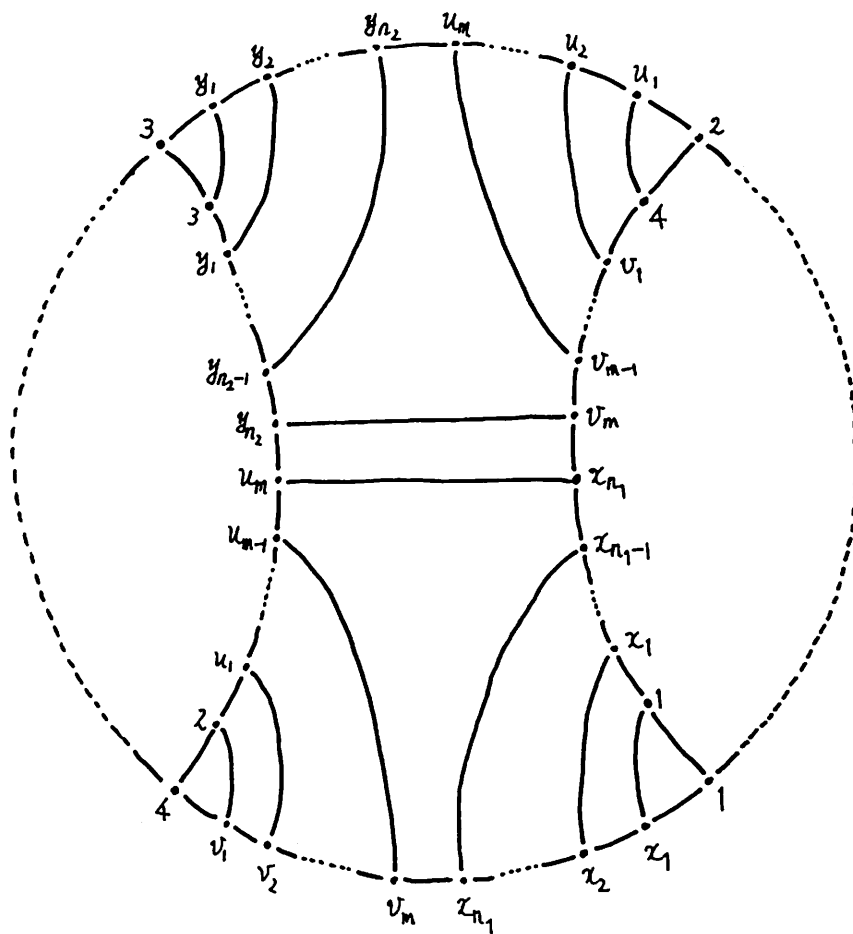


$$B^+ = \{ 2, 4, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \}$$

$$B^- = \{ 1, 3, x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2} \}$$

$$\pi_1 = \langle g_1, g_2 ; g_2 g_1 = g_1^{n_1} g_2^{-m}, g_1 g_2 = g_2^{n_2} g_1^{-m} \rangle$$

[Fig. 11]



[Fig. 12]