

DS-diagram と Seifert Fibred Structure

慶応大. 理工. 石井 一平

教解研講究録 563 において, 筆者は Flow-Spine を導入した。
 一方, 同講究録において, 池田代によつて, DS-diagram with E-cycle が
 定義されている。その後の研究によつて, これら二つの概念が同一の
 ものであることが明らかになった。即ち, 3次元多様体 M を表現する
 DS-diagram with E-cycle が与えられたとき, それに対し M 上の normal pair
 で与えられた DS-diagram を生成するものが構成できる。

そこで, この報告では, 3次元多様体 M を表示する DS-diagram
 with E-cycle から, それに対応する M 上の normal pair を利用して, M の
 Seifert fibred structure を調べる方法を述べる。

以下, 定義に関しては, 上記講究録を参照。

§.1. DS-diagram with E-cycle から Normal pair へ

G を 2次元球面 S^2 上の 3-regular graph, P を closed fake
 surface, $f: S^2 \rightarrow P$ が local homeo. で (G, f) が一つの
 DS-diagram with E-cycle を定めているとする。その E-cycle を e で表
 わし, $S^2 - e$ の連結成分を Σ_1, Σ_2 で表わす。

e 上にある G の頂点は次の V_1 と V_2 とに分類される:

(*) $b \in V_j \Leftrightarrow b$ から出る e 上にはない G の edge は Σ_j に含まれる ($j=1, 2$).

そこで $g: \overline{\Sigma}_1 \rightarrow \overline{\Sigma}_2$ を次の (i) ~ (vi) で定める。

(i) $x \in V(G) \cap \Sigma_1$ のとき ($V(G)$ は G の頂点の集合)

$$y = g(x) \iff y \in V_1, f(y) = f(x)$$

(ii) $x \in V_1$ のとき.

$$y = g(x) \iff y \in V_2, f(y) = f(x)$$

(iii) $x \in V_2$ のとき

$$y = g(x) \iff y \in \Sigma_2, f(y) = f(x)$$

(iv) $x \in \Sigma_1 \cap (|G| - V(G))$ のとき.

$$y = g(x) \iff y \in e, f(y) = f(x)$$

(v) $x \in e - V(G)$ のとき

$$y = g(x) \iff y \in \Sigma_2, f(y) = f(x)$$

(vi) $x \in \Sigma_1 - |G|$ のとき

$$y = g(x) \iff y \in \Sigma_2, f(y) = f(x)$$

この写像が well defined であることは [1] の結果から容易にわかる。

さて、 $h: \overline{\Sigma}_2 \rightarrow \overline{\Sigma}_1$ を homeo. で $h|_e = \text{identity}$ なるものとし、 Σ を $M = B^3/f$ に埋め込まれた compact 2-disk, さらに $z: \overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma$ を onto-homeo. とする。このとき、DS-diagram (G, f) を実現する normal pair (ψ_t, Σ) で次の性質 (*) を持つものを構成することが出来る。(以下では、 z によって Σ を Σ_1 と同一視する)

$$(*) \quad x \in \Sigma \text{ のとき, } \hat{\tau}_+(x) = h(g(x))$$

但し, $\hat{\tau}_+(x) = \psi_\sigma(x)$, $\sigma = \inf \{t > 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma\}$. (ψ_t, Σ) の構成方法については [2] を参照.

§.2. Seifert fibred structure

前節に述べた結果から, 任意の $x \in \bar{\Sigma}_1$ に対し, $(h \circ g)^n(x) = x$ とする n が存在する様に homeo. h を選ぶことが出来る. $M = B^3/f$ 上に periodic flow が存在することになり, M は Seifert fibred とする. 従って, g が $\Sigma_1 - |G|$ 上及び $\bar{\Sigma}_1 \cap (|G| - V(G))$ 上で連続であることを考え合わせると, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理

§.1. のような DS-diagram (G, f) に対し, 次の (i), (ii) を満足するグラフ $\check{G} \subset \bar{\Sigma}_1$ と homeo. $h: \bar{\Sigma}_2 \rightarrow \bar{\Sigma}_1$ が存在すれば,

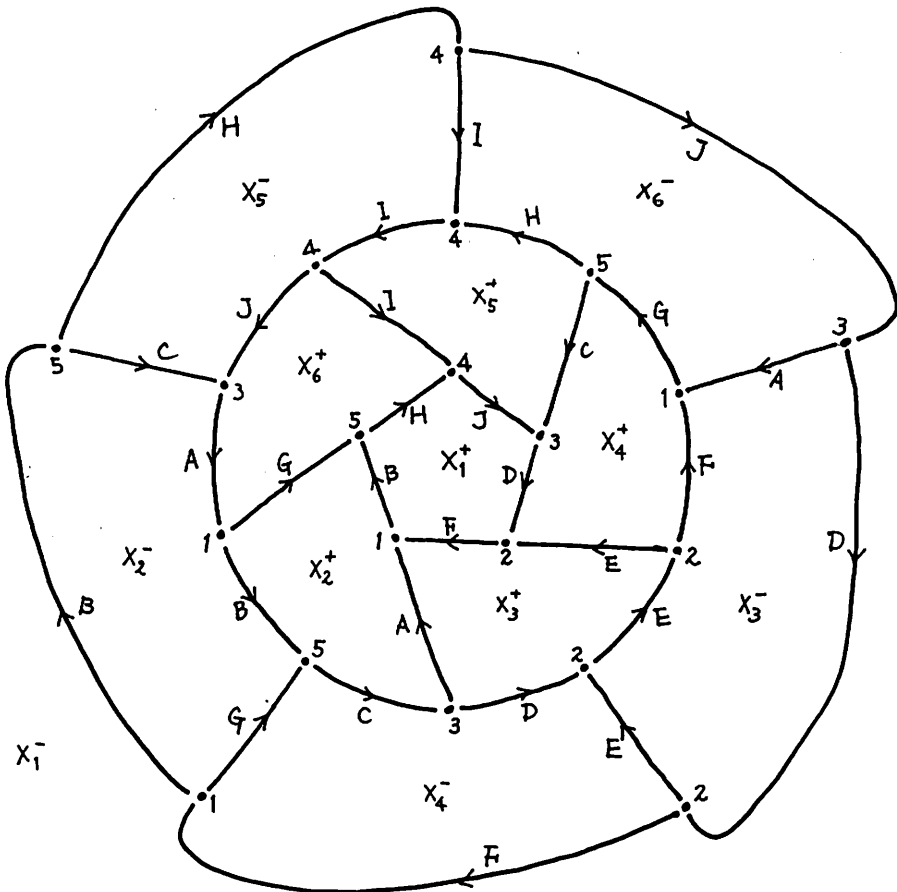
$M = B^3/f$ は Seifert fibred manifold である.

$$(i) \quad |\check{G}| \supset |G| \cap \bar{\Sigma}_1, \quad V(\check{G}) \supset V(G) \cap \bar{\Sigma}_1$$

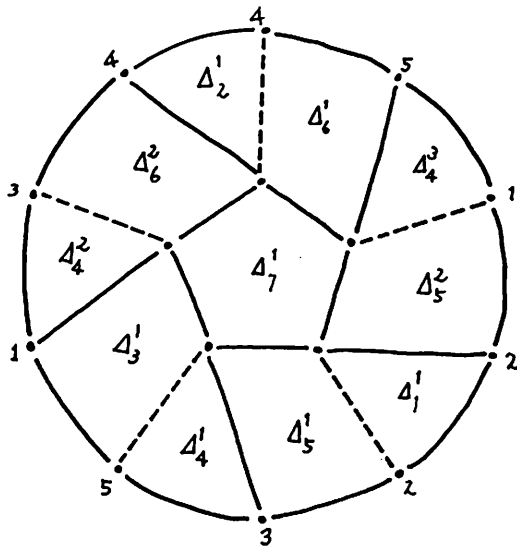
$$(ii) \quad h(g(|\check{G}|)) = |\check{G}|, \quad h(g(V(\check{G}))) = V(\check{G})$$

§.3. Example

下の Fig.1 の DS-diagram を例にとりて. 前節の定理を説明し. さらに. orbit manifold, exceptional fibres がどのように読み取られるかを見てみよう. 下図で E-cycle e は $e = \partial(U\overline{X_j^+})$, $\Sigma_1 = \text{Int}(U\overline{X_j^+})$ とする.



[Fig. 1.]



[Fig. 2]

$\overline{\Sigma}_1 \cap G$ に上の Fig.2 に破線で插いた edges を付け加えて \tilde{G} を作り. $\Sigma_1 - |\tilde{G}|$ の各 component を上図の様に Δ_j^i と名付ける. 但し. $j=1, \dots, 7, i=1, \dots, r_j$ として. $r_1=r_2=r_3=r_7=1, r_4=3, r_5=r_6=2$ である.

g の定義から. $h: \overline{\Sigma}_2 \rightarrow \overline{\Sigma}_1$ を次の (*) を満足するようにとることが出来る.

$$(*) \quad h \circ g(\Delta_j^i) = \Delta_j^{i+1} \quad (j=1, \dots, 7, i=1, \dots, r_j, \Delta_j^{r_j+1} = \Delta_j^1)$$

このように h をとると. $(h \circ g)^{r_j}(\Delta_j^1) = \Delta_j^1$ となる. しかも. $(h \circ g)^{r_j}|_{\Delta_j^1}$ は連続に. $\overline{\Delta_j^1}$ まで拡張される. この拡張した Δ_j^1 からそれ自身への同相写像を h_j と書くことにする.

R を適当に選ぶと R_j ($j=4, \dots, 7$) は恒等写像となることが容易にわかる。

$R_1: \overline{\Delta_1} \rightarrow \overline{\Delta_1}$ を調べてみよう。 $\overline{\Delta_1}$ 上の \tilde{G} の頂点を a_1, a_2, a_3 とし、これらが Fig. 2 で反時計回りに並んでいるものとする。 g の定義から $R_1(a_j) = a_{j+1}$ ($j=1, 2, 3, a_4 = a_1$) となる。従って、 R を適当にとると、 $(R_1)^3 = \text{identity}$ とする。従って、 R_1 は $\overline{\Delta_1}$ の内部に1つの固定点を持ち、この固定点の周りで R_1 は $2\pi/3$ の回転であるとしてよい。§1. の構成法を見れば、このことは、この固定点を通る orbit が exceptional fibre τ (3,1)-type である。

同様に $R_2: \overline{\Delta_2} \rightarrow \overline{\Delta_2}$ も固定点を1つ持ち、その周りで R_2 は $2\pi/3$ の回転。 $R_3: \overline{\Delta_3} \rightarrow \overline{\Delta_3}$ の固定点の周りで R_3 は π の回転である。

又、orbit manifold N は次の様に求めることができる。 $\overline{\Sigma_1}$ 上に同値関係 \sim を

$$x \sim y \iff (h \circ g)^k(x) = y \text{ for some } k$$

と定めれば、 $N = \overline{\Sigma_1} / \sim$ 。

この例の場合には $N = S^2$ であることは容易にわかる。

上の考察を合わせれば、Fig. 1 の DS-diagram で表示される manifold は S^2 上の Seifert fibred manifold τ (3,1)-type の exceptional fibre を2本、(2,1)-type の exceptional fibre を1本持つ。

References

- [1] H. Ikeda, DS-diagrams with E-cycle, Kobe J. Math. 3('86) 103-112
- [2] I. Ishii, Combinatorial construction of non-singular flows on 3-manifolds, to appear in Kobe J. Math.