Flow-Spine の reducibility について

慶応大.理工. 石井 一平

§1. 定義

Flow-spine に関する記号は"数理研講究録563"と同じものを用いる。(ψ_t, Σ) を 3次元閉多様体 M 上の normal pair とし、$P_- = P_-(\psi_t, \Sigma)$ をそれが生成する Flow-spine とする。また、$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_\nu$ で $\mathfrak{S}_3(P_-)$ の点を表わす。

定義. a_k が simple point

$\Longleftrightarrow$ a_k が $P_- - \mathfrak{S}_2(P_-)$ の一角形の頂点

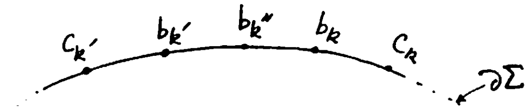
Remark. a_k が simple point $\Longleftrightarrow$ $k(2) = k(3)$

($k(j)$ の定義は 講究録563 を参照のこと)

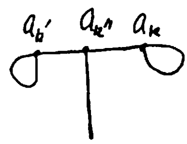
定義. $a_k, a_{k'}$ $(k \neq k')$ が 双子の simple points

$\Longleftrightarrow$ $a_k, a_{k'}$ がそれぞれ simple point で且. $k(1) = k''(1)$, $k'(1) = k''(2)$ (or $k(1) = k''(2)$, $k'(1) = k''(1)$) となる $a_{k''}$ が存在.

<u>Remark</u>. a_k, $a_{k'}$ が双子の simple points のとき. $b_j = \hat{T}_+(a_j)$, $c_j = \hat{T}_+^2(a_j)$ は $\partial\Sigma$ 上次の様に並んでいる.



又. DS-diagram で見れば,



なる形が現われている。

<u>定義</u>. (φ_t, Σ) が <u>simply reduced</u>

$\Longleftrightarrow$ P_- の各 simple point a_k に対し,

(i) $k(1) = k'(1)$ or $k'(2)$ for $\exists k'$

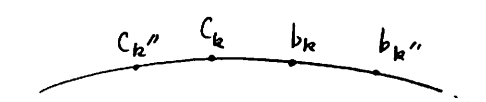
(ii) $k(4) = k'(3)$ or $k'(4)$ for $\exists k'$

が成り立つことをいう。

上の(i) (ii)は次のことと同じである。

$b_j = \hat{T}_+(a_j)$, $c_j = \hat{T}_+^2(c_j)$ $(j = 1, \cdots, \nu)$ のうち,

b_k の c_k の反対隣りは $b_{k'}$ で且つ
c_k の b_k の反対隣りは $c_{k'}$ である。



<u>Prop.1.</u> Δ を M 上のある normal pair (ψ_t, Σ) の singularity-data とし $a_k \in \mathfrak{S}_3(P_-(\psi_t,\Sigma))$ を上の (i) 又は (ii) を満たさない simple point とする。このとき Δ から b_k, c_k を取り除いて得られる singularity-data を実現する M 上の normal pair が存在する。

この命題によって singularity-data から (i) 又は (ii) を満足しない simple point を取り去るという操作によって、simply-reduced な Flow-spine が得られる。

<u>定義</u>. $\{a_1, \cdots, a_\nu\} = \mathfrak{S}_3(P_-(\psi_t,\Sigma))$ で

$a_{j_{2k-1}}, a_{j_{2k}}$ $(k=1,\cdots,r)$ が双子の simple points,

$a_{j_{2r+1}}, \cdots, a_{j_{2r+s}}$ を他の simple points とする。

このとき index $\kappa(\psi_t,\Sigma)$ を

$$\kappa(\psi_t,\Sigma) = \frac{s+r}{\nu-r}$$

と定める。

<u>Prop.2.</u> M が

$$\begin{cases} \text{(i)} & H_1(M;\mathbb{Z}) = \{0\} \\ \text{(ii)} & \text{M 上に } \kappa(\psi_t,\Sigma) \geqq \frac{1}{2} \text{ であるような} \\ & \text{simply-reduced normal pair } (\psi_t,\Sigma) \text{ が存在。} \end{cases}$$

を満たす。

$$\Longrightarrow \quad M = S^3$$

(証明の概略)

$P_-(\mathcal{V}_t,\Sigma)$ のすべての一角形から $D^2\times I$-変形を行う。すると $(\mathcal{V}_t,\Sigma)$ が simply-reduced で $\kappa(\mathcal{V}_t,\Sigma)\geq 1/2$ であることからすべての 3-rd singularity が消滅する。従って M について次の (i), (ii) のいづれかが成り立つ。

(i) $M-\Delta^3 \searrow 0$ (Δ^3 は M 内の 3-simplex)

(ii) $M-\Delta^3 \searrow$ fake surface without 3rd singularity

一方 $H_1(M;\mathbb{Z})=\{0\}$ のとき (ii) は起こらない。従って $M-\Delta^3\searrow 0$, 即ち $M=S^3$。//

<u>定義</u>. M 上の simply-reduced normal pair $(\mathcal{V}_t,\Sigma)$ が<u>可約</u>

$\Longleftrightarrow$ M 上に $\kappa(\mathcal{V}_t,\Sigma)<\kappa(\mathcal{V}_t',\Sigma')$ となる simply-reduced normal pair $(\mathcal{V}_t',\Sigma')$ が存在。

§.2. 可約である為の条件

M 上の simply-reduced normal pair $(\mathcal{V}_t,\Sigma)$ に対して、次の条件 (*) を満足する単純閉曲線 $\gamma\subset M$ を考える。

(*)
- (i) $\gamma\cap(\Sigma\cup \mathfrak{S}_2(P_-(\mathcal{V}_t,\Sigma)))=\phi$
- (ii) γ は $P_-(\mathcal{V}_t,\Sigma)$ と唯一点で transversal に交わる。
- (iii) $x_1, x_2\in\gamma$, $x_1\neq x_2 \Rightarrow \hat{T}_-(x_1)\neq\hat{T}_-(x_2)$

($\hat{T}_-=\hat{T}_-(\mathcal{V}_t,\Sigma)$)

(*)を満足する γ に対し $\ell(\gamma)$ で $\hat{T}_+(\gamma \cap P_-(\psi_t, \Sigma)) \in C_{\ell(\gamma)}$ となる $\partial\Sigma - (\hat{T}_+(\mathfrak{S}_2(P_-)) \cup \hat{T}_+^2(\mathfrak{S}_2(P_-)))$ の component $C_{\ell(\gamma)}$ の番号を表わす ($P_- = P_-(\psi_t, \Sigma)$)。

Remark. 任意の component C_ℓ に対し、(*)を満足する γ で $\ell = \ell(\gamma)$ となるものが存在する。

Prop. 3. $P_-(\psi_t, \Sigma)$ に対し条件(*)及び次の(i),(ii)を満足する単純閉曲線 γ が存在すれば (ψ_t, Σ) は可約である。

(i) ψ_t と至る所接しない embedded 2-disk $Y \subset M - \Sigma$ で $\partial Y = \gamma$ となるものが存在する。

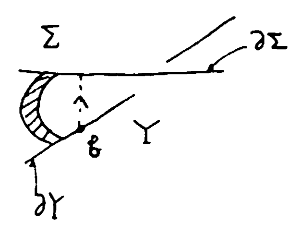
(ii) $\ell(\gamma)$ は次の (a), (b) のいづれでもない。

(a) ある simple point a_k に対し $\ell(\gamma) = k(1)$ or $k(2)$

(b) ある simple point a_k に対し、$\ell(\gamma) = k(4)$ でかつ、(*)及び $\gamma' \cap P_+(\psi_t, \Sigma) = \phi$ を満たす γ' が存在する。

(証明の概略)

$\gamma \cap P_- = \{b\}$ とする。Σ と Y とを b を通る orbit の近くで右図のように結び ψ_t に接しない 2-disk Σ_1 を作る。このとき、(ψ_t, Σ_1) は normal pair となり、$a = \hat{T}_-(\psi_t, \Sigma_1)(b)$ は $P_-(\psi_t, \Sigma_1)$ の simple point となる。



この simple point から Prop. 1 で述べた simply-reduced normal pair を作る操作を行なうと上の条件(ii)より $\kappa(\psi_t', \Sigma') < \kappa(\psi_t, \Sigma)$ となる normal pair (ψ_t', Σ') を得る。//