

## メタモルフォーシス

池田裕司 山下正勝 横山和夫

### 1. 序

「 $\Delta$ ,  $\Delta'$  を頂点数が 2 以上の DS-diagram とする。そのとき,  $\Delta$  と  $\Delta'$  が DS 同値であれば, 3 辺形つぶしとその逆変換だけを有限回適用することで  $\Delta$  を  $\Delta'$  に移すことができる。」

この事実を報告するのが本稿の目的である。

1996 年に, H.Ikeda, M.Yamashita and K.Yokoyama [1] において, DS-変形の生成元を整理することができた。本稿はその続編であり, その内容については, 上智大学の 2000 年度春学期における幾何学特論 I の講義のなかなどで, すでに報告済みである。しかしその後も文章としては残していなかったもので, この場を借りて記録を残させていただく。

本稿で用いる記号と用語については必要に応じて簡単に説明をするつもりであるが, 詳しくは [1] をごらんいただきたい。

### 2. DS-diagram

2 次元 polyhedron  $P$  の各点の近傍が図 1 にある 3 つの図形のいずれかであるならば,  $P$  を **standard spine** という。(これまで我々は, この  $P$  のことを **fake surface** と呼んできたが, ここでは国際的に流通している用語 “standard spine” にしておく。)

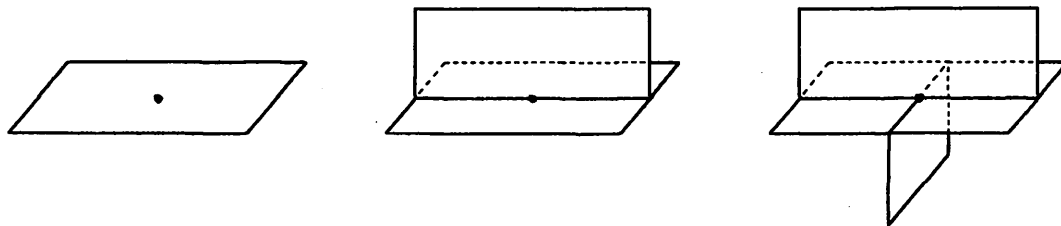


図 1 : standard spine の近傍

B を 3 次元閉多様体 M 内の 3-ball とすると, M-IntB は standard spine に collapse できる。DS-diagram とはおおざっぱに言えば, この collapsing を忠実に反映する identification map

$$f: (B^3, S^2) \rightarrow (M, P)$$

を利用して 3 次元閉多様体  $M = B^3/f$  の情報を 2 次元球面  $S^2 = \partial B^3$  上に表示した図式のことである。

図 2 は 3 次元球面  $M = S^3$  を表示するもっとも簡単な (というか, 頂点数の少ない) DS-diagram  $\Delta$  から “あわび” と呼ばれる standard spine  $P$  への identification map  $f: S^2 \rightarrow P$  の様子を描いたものである。説明の不足を補うために, いいわけとしてここに掲載しておく。

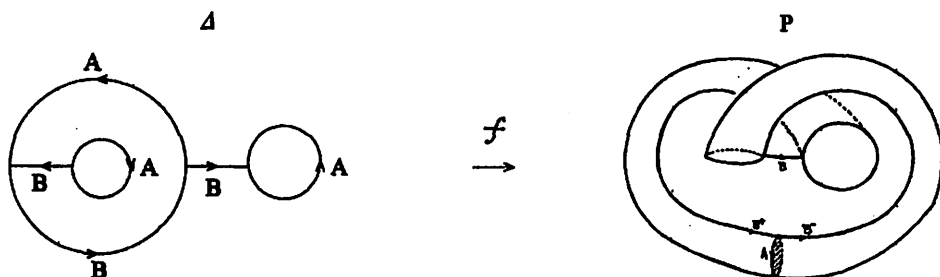


図 2 : あわびの等化写像

以下, (古典的な) DS-diagram について説明する。状況設定のために, 以下のような記号を固定しておく。

$B^3$  : 3-ball

$S^2$  : 2-sphere ( $= \partial B^3$ )

$G = (V_G : E_G)$  :  $S^2$  上の connected 3-regular graph

ただし  $V_G$ , および  $E_G$  はそれぞれ graph  $G$  の頂点集合, および辺集合。

さてこのとき, 2-sphere  $S^2$  には,  $G$  から自然に誘導される cell complex の構造を持たせることができる。それを  $K(G)$  と表す。このときの  $K(G)$  の cell 構造は

0-cell の集合 =  $V_G$  ;

1-cell の集合 =  $E_G = G - V_G$  ;

2-cell の集合 =  $S^2 - G$  の連結成分の集合

から構成されている。したがって, ここでの “cell” とは open cell のことである。

(古典的な) DS-diagram の形式的な定義を与えておく。

**Definition.** 以下の (1), (2) の条件を満たす  $\Delta = (S^2, G, f)$  のことを **DS-diagram** という :

(1)  $f: S^2 \rightarrow P$  は  $S^2$  から或る 2 次元 polyhedron  $P$  の上への local homeomorphism である。すなわち  $S^2, P$  には  $f: K(G) \rightarrow K(P)$  が cellular であるような cell 構造が入り、各 cell  $\sigma \in K(G)$  に対して  $f\sigma$  は  $\sigma$  から  $K(P)$  内の cell の上への同相写像である。この  $f$  のことを等化写像 (identification map) という。

(2) 各  $k$ -cell  $\lambda^k \in K(P)$  に対して  $f^{-1}(\lambda^k)$  の連結成分の個数を  $\#f^{-1}(\lambda^k)$  と表すことにすると、

$$\begin{aligned} \#f^{-1}(\lambda^2) &= 2, \\ \#f^{-1}(\lambda^1) &= 3, \\ \#f^{-1}(\lambda^0) &= 4. \end{aligned}$$

cell complex  $K(G), K(P)$  の各 cell には  $f: K(G) \rightarrow K(P)$  が orientation preserving であるように向きを入れておく。  $\sigma \in K(G)$  に対して  $f(\sigma) \in K(P)$  を  $\sigma$  の label という。さらに、  $\dim \sigma = k$  であるならば、  $K(P)$  の  $k$ -cell  $f(\sigma)$  のことを  $\sigma$  の  $k$ -label という。

グラフ  $G$  の頂点の数  $\#V_0$  が  $4n$  であるとき  $\nu(\Delta) = n$  とあらわし、 DS-diagram  $\Delta = (S^2, G, f)$  の頂点数ということにする。実際には、  $\nu(\Delta)$  とは standard spine  $P$  の頂点数のことである。このとき、  $\Delta$  の 0-, 1-, 2-labels の数はそれぞれ  $n, 2n, n+1$  である。

ここでは原則として、 DS-diagram の 0-label をアルファベット小文字であらわし、 1-label をアルファベット大文字であらわすことにする。

### 3. corner と環境

DS-diagram  $\Delta$  の 1-label  $A$  に対してその始点近くの部分を  $A^-$ 、 終点近くの部分を  $A^+$  と表す (図 3)。

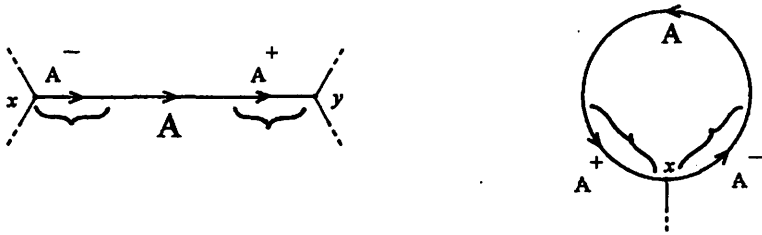


図 3 : 1-label  $A$  の端点近くを “ $A^-$ ”, “ $A^+$ ” で表す

DS-diagram の各 0-label は 4 点からなり、それぞれ 3 本の『手』が出ている。それらの配置は一般に次の図 4 のようになっている。

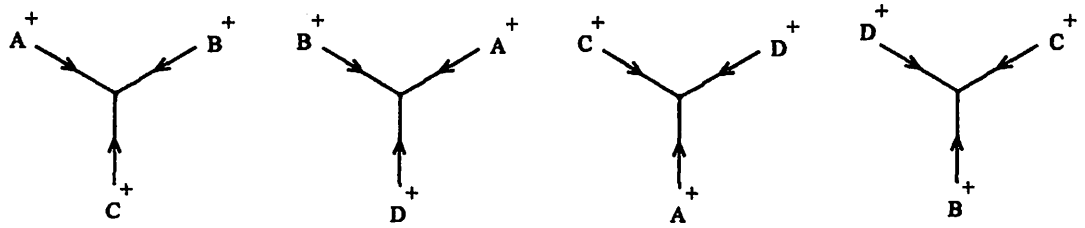


図 4 : 0-label のまわりの環境  $\Sigma(x)$

集合  $\Lambda = \{A^+, B^+\}$  を (oriented) corner という。orientation をあまり意識しないときは、通常  $A^+ B^+$  または  $B^+ A^+$  と簡略化した形であらわす。図形的には図 4 に現れる 1 対の糊しろのことである。図 4 の観察からわかるように、一般に 1 つの 0-label  $x$  の周辺は合計 6 種類の corners から構成されている。

それぞれの配置の様子は、これらの corners の集合である

$$\Sigma(x) = \{A^+ B^+, C^+ D^+; A^+ C^+, B^+ D^+; A^+ D^+, B^+ C^+\}$$

が与えられると自然に定まる。そこで  $\Sigma(x)$  のことを、0-label  $x$  のまわりの環境と呼ぶことにする。

$f(\Sigma(x))$  は standard spine  $P$  の 1 つの頂点の近傍になっている (図 5)。

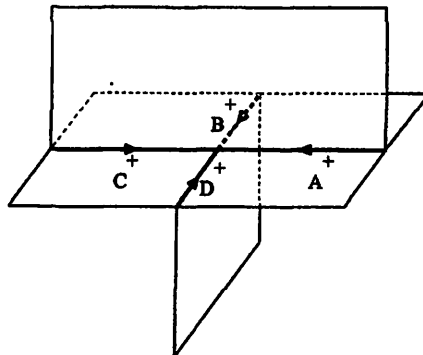


図 5 :  $f(\Sigma(x))$  の形状

一般に、standard spine  $P$  の部分集合  $W$  の近傍  $N$  に対して、identification map  $f: S^2 \rightarrow P$  による逆像  $f^{-1}(U)$  のことを  $W$  の環境という。通常は  $W$  として cell complex  $K(P)$  の subcomplex を考えることが多く、その場合、逆像  $f^{-1}(U)$  のデータも 2 次元球面  $S^2$  の cell 構造  $K(G)$  の言葉を用いて記述する。

DS-diagram の 1-label の始点の 0-label と終点の 0-label が異なるとき、その 1-label をアーク型 (arc type) といい、1-label の始点と終点が一致するときはループ型 (loop type) という。A を DS-diagram  $\Delta$  のひとつの 1-label とすると、 $\Delta$  内には label A を持つ 1-cells がちょうど 3 本ある。その配置と形状はアーク型とループ型で異なるが、ループ型はさら

に、風船型 (balloon type) と稲妻形 (zigzag type) という 2 つの型に分けることができる。

風船型の特徴は、同じ 1-label を持った 3 本のうちの 2 本が (あたかも縁日の風船のように) 1 辺形になっていることである。また稲妻型の特徴は、同じ 1-label を持った 3 本の辺が (同じ進行方向に) ジグザグに連なっていることである。これらはつぎのように symbolic に表すことができる。

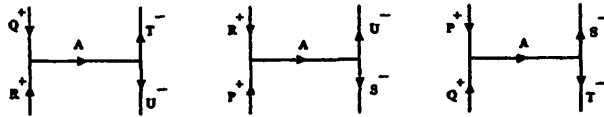
$$\text{アーク型} : \Sigma_a = \{P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+AU^-, P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

$$\text{風船型} : \Sigma_b = \{A; B^+AB^+, C^+AC^+, B^+C^+\}$$

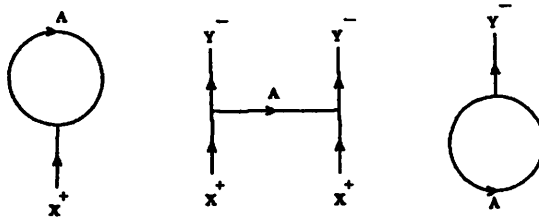
$$\text{稲妻型} : \Sigma_c = \{X^+AAY^-, X^+AY^-, X^+Y^-\}$$

この様子を絵で描くと図 6 のようになる。

$$\text{アーク型} : \Sigma_a = \{P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+AU^-, P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$



$$\text{風船型} : \Sigma_b = \{A; B^+AB^+, C^+AC^+, B^+C^+\}$$



$$\text{稲妻型} : \Sigma_c = \{X^+AAY^-, X^+AY^-, X^+Y^-\}$$

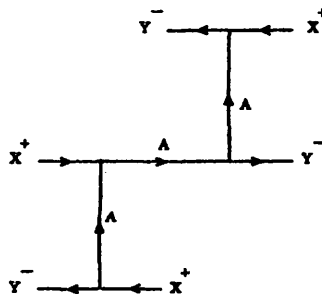


図 6 : 1-label A のまわりの環境

4.  $\Phi$ -変形

図4で示されているような, 0-label  $x$  のまわりの環境

$$\Sigma(x) = \{A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+\}$$

について考える. そのなかの1つの corner  $A^+B^+$  に注目して, 図7のように補助線(と補助円)を記入する.

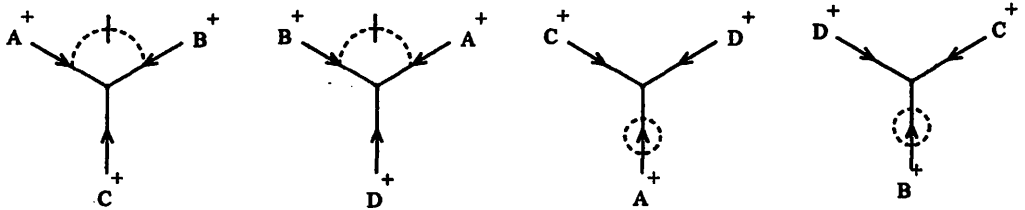


図7:  $\Phi^+$ -変形のための補助図

この補助図を介して得られる図8は

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^+,$$

$$A^+EG^{-1}C^+, B^+FH^{-1}D^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+EH^{-1}C^+\}$$

とあらわされる. この  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$  を  $(EF^{-1}, GH^{-1})$  のまわりの環境という.

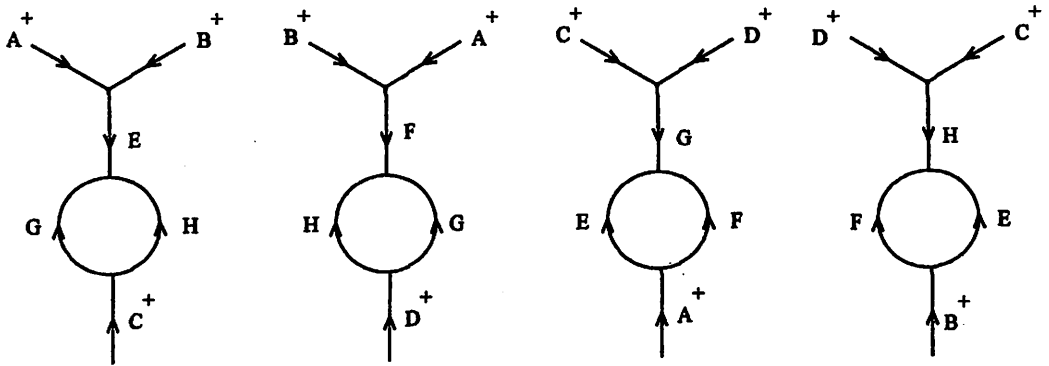


図8:  $(EF^{-1}, GH^{-1})$  のまわりの環境  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$

$\Sigma(x)$  を  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$  に変える変形を, corner  $A^+B^+$  に関する  $\Phi^+$ -変形といい, 記号で  $\Phi^+(A^+B^+)$  とあらわす.

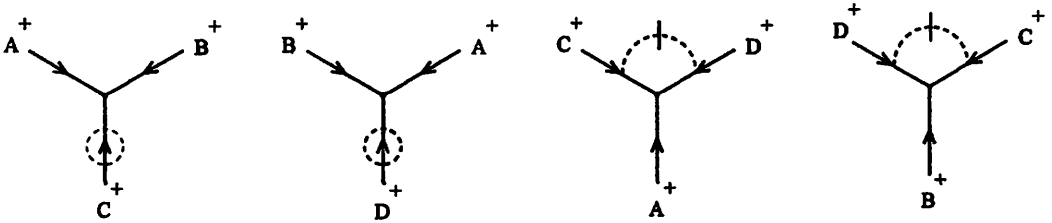


図 9:  $\Phi^+(C^+D^+)$  のための補助図

さて図 4 で, corner  $A^+B^+$  の代わりに corner  $C^+D^+$  に着目したときの変形  $\Phi^+(C^+D^+)$  について観察すると, この場合の補助図は図 9 のようになるが, これから得られる結果図は,  $\Phi^+(A^+B^+)$  による結果図 (= 図 8) と完全に一致する。

したがって, 次の関係がある。

**Proposition 1.**  $\Phi^+(A^+B^+) = \Phi^+(C^+D^+)$

図 4 (あるいは  $\Sigma(x)$ ) は 6 種類の corners

$$A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+C^+; A^+D^+, B^+D^+$$

から構成されているが, それらに関して

$$\Phi^+(A^+B^+) = \Phi^+(C^+D^+),$$

$$\Phi^+(A^+C^+) = \Phi^+(B^+D^+),$$

$$\Phi^+(A^+D^+) = \Phi^+(B^+C^+)$$

の 3 種類の  $\Phi^+$ -変形を考えることができる。

$\Phi^+(A^+B^+)$  の逆の変形は  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$  のなかの 2 種類の 2 辺形  $\{EF^{-1}, GH^{-1}\}$  に着眼すればよいので, これを

$$\Phi^-(EF^{-1}, GH^{-1}) : \Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) \Rightarrow \Sigma(x)$$

とあらわす。そのような変形を一般に,  $\Phi^-$ -変形と称する。

$\Phi^+$ -変形または  $\Phi^-$ -変形であるとき  $\Phi^\pm$ -変形 (または単に  $\Phi$ -変形) という。

## 5. $\Psi$ -変形

アーク型の 1-label  $A$  のまわりの環境:

$$\Sigma(A) = \{P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+AU^-,$$

$$P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

について考える (図 10 参照)。

$\Sigma(A)$ を

$$\Sigma(XYZ) = \{XYZ; P^+S^-, Q^+T^-, R^+U^-, P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

に変える変形を

$$\Psi^+(A) : \Sigma(A) \Rightarrow \Sigma(XYZ)$$

とあらわす。

これを絵で描くと、図 10  $\Rightarrow$  図 11 のようになっている。

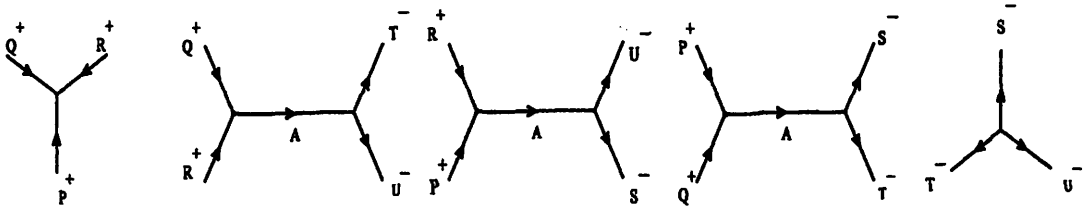


図 10 : アーク型 1-label A の周りの環境  $\Sigma(A)$

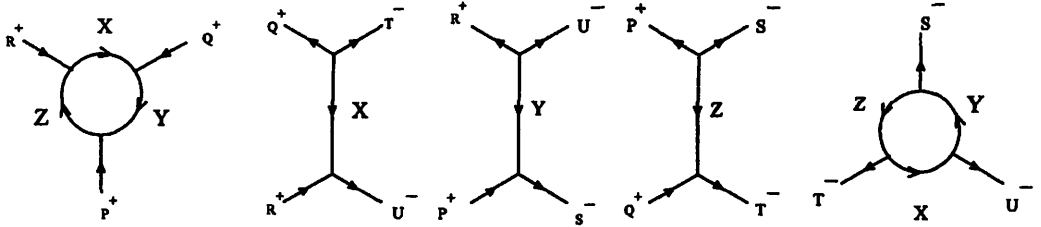


図 11 :  $\Psi^+(A)$  の結果図 :  $\Sigma(XYZ)$

$\Sigma(A)$ に $\Psi^+(A)$ を施して得られた $\Sigma(XYZ)$ においては、3 辺形 XYZ を構成する 1-labels X, Y, Z はいずれもアーク型になっている。

逆に、一般の DS-diagram のなかに現れる 3 辺形 XYZ の各 1-label X, Y, Z がいずれもアーク型であるとき、3 辺形 XYZ のまわりの環境は  $\Sigma(XYZ)$  の形であらわすことができる。

このとき、 $\Sigma(XYZ)$ を $\Sigma(A)$ に変える変形のことを

$$\Psi^-(XYZ) : \Sigma(XYZ) \Rightarrow \Sigma(A)$$

とあらわす。

$\Psi^+$ -変形または $\Psi^-$ -変形であるとき $\Psi^\pm$ -変形 (または単に $\Psi$ -変形) という。



## 5. メタモルフォーシス

**Definition.** DS-diagram  $\Delta$  に対して、 $\Phi^\pm$ -変形と  $\Psi^\pm$ -変形を有限回適用して DS-diagram  $\Delta'$  が得られるとき、 $\Delta'$  は  $\Delta$  と **DS 同値** であるといい、それらの変形の有限列：

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

(または単に、 $\Delta \Rightarrow \Delta'$ ) を  $\Delta$  から  $\Delta'$  への **DS 変形** という。

ここでの“DS 同値”の定義は、従来用いてきたものではなく、[1]において確立された改良版の概念である。

元来、“DS 変形”とは 2 辺形つぶしと 3 辺形つぶし、およびそれらの逆変換からなる変形の有限列のこととしていた。しかし、そのような定義では変形可能かどうかの(ニアミスは駄目！などの)禁則条件の記述が複雑で、論理の展開に不便をきたしていた。

本稿の趣旨は、さらなる改良版として、**DS 変形の本質は 3 辺形つぶし**、およびそれらの逆変換だけで十分である、ということを主張するものである。

つぎの定理 1 は《**DS 理論における基本定理**》とでもいうべきもので、あまりにも有名である。

### 定理 1 (マトヴィーエフ・石井・横山の定理)

$\Delta_1, \Delta_2$  を DS-diagram とし、 $M(\Delta_1), M(\Delta_2)$  をそれぞれ、 $\Delta_1, \Delta_2$  が定める 3 次元閉多様体とする。そのとき、 $M(\Delta_1)$  と  $M(\Delta_2)$  が PL 同相であるための必要十分条件は  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  が DS 同値であることである。

この結果についてのコメントは、当面、差し控えることにしよう。参考資料として S.V.Matveev [5] を挙げておく。

**Definition.** 2 つの DS-diagrams  $\Delta, \Delta'$  に対して、 $\Psi^\pm$ -変形だけを有限回繰り返して移りあえるとき、 $\Delta$  と  $\Delta'$  は **metamorphic** であるといい、それらの変形の有限列：

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

(または単に、 $\Delta \Rightarrow \Delta'$ ) を  $\Delta$  から  $\Delta'$  への **metamorphosis** ということにする。

ここでのテーマはつぎの定理 2 を示すことである。

**定理 2.**  $\nu(\Delta) \geq 2, \nu(\Delta') \geq 2$  である 2 つの DS-diagram  $\Delta$  と  $\Delta'$  が DS 同値であるならば、 $\Delta$  と  $\Delta'$  は **metamorphic** である。

## 6. 定理2の証明

まず、次の Proposition 2 および Proposition 3 によって簡単な注意をしておこう。

**Proposition 2.** DS-diagram  $\Delta$  の1つの 0-label  $x$  の環境

$$\Sigma(x) = \{A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+\}$$

に付随する 1-labels  $A, B, C, D$  のすべてがループ型であるならば、 $\nu(\Delta) = 1$  である。

**Proposition 3.** DS-diagram  $\Delta$  が、環境：

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^+,$$

$$A^+EG^{-1}C^+, B^+FH^{-1}D^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+EH^{-1}C^+\}$$

を含み、それに付随する 1-labels  $A, B, C, D$  のすべてがループ型であるならば、 $\nu(\Delta) = 3$  である。

これらの Proposition 2, Proposition 3 が成り立つことを確認するには、各頂点から 3 本ずつ出ている『手』がどのようにつながっているか、その様子を調べればよい。

1-labels  $A, B, C, D$  のすべてがループ型であるならば、 $\Sigma(x)$  にしても  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$  にしても、それを含む DS-diagram はそれ自体で閉じてしまい、ここに現れている以上の新たな 1-label を含有することはできないのである。

**Lemma 1.** (1) DS-diagram  $\Delta$  が  $\nu(\Delta) \geq 2$  を満たすならば、 $\Delta$  に対する  $\Phi^+$ -変形は  $\Psi^+$ -変形のみ有限列で置き換えることができる。

(2) DS-diagram  $\Delta_*$  が  $\nu(\Delta_*) \geq 4$  を満たすならば、 $\Delta_*$  に対する  $\Phi^-$ -変形は  $\Psi^-$ -変形のみ有限列で置き換えることができる。

[Lemma 1 の証明] (1) について：

$\Delta$  を  $\nu(\Delta) \geq 2$  なる DS-diagram とし、 $\Delta$  の 0-label  $x$  のまわりの環境を

$$\Sigma(x) = \{A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+\}$$

とする。Proposition 2 により、 $\nu(\Delta) \geq 2$  であれば 1-labels  $A, B, C, D$  のうちどれか 1 つはアーク型であるものが存在する。いま、それを  $D$  としても一般性を失わない。

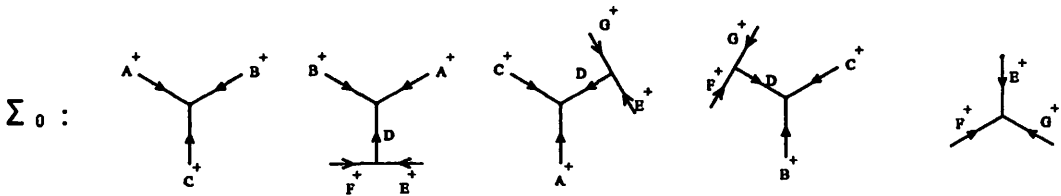
そのとき 1-label  $D$  のまわりの環境：

$$\Sigma_0 = \Sigma(D) (\supset \Sigma(x))$$

は(順序も少し変えて)

$$\Sigma_0 = \{B^+C^+, C^+A^+, A^+B^+; A^+D^-E^+, B^+D^-F^+, C^+D^-G^+; F^+G^+, G^+E^+, E^+F^+\}$$

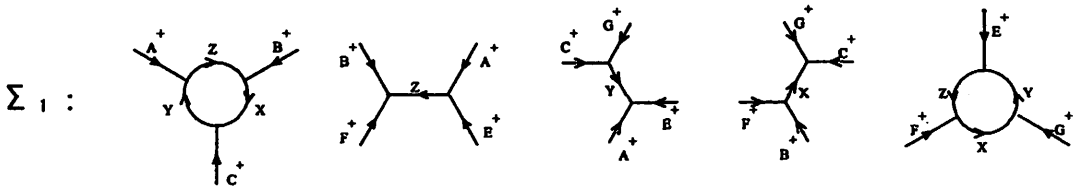
と書ける。



この環境  $\Sigma_0 = \Sigma(D)$  に piping  $\Psi^+(D)$  を施すと

$$\Sigma_1 = \{XYZ; B^+XC^+, C^+YA^+, A^+ZB^+; A^+E^+, B^+F^+, C^+G^+; F^+XG^+, G^+YE^+, E^+ZF^+\}$$

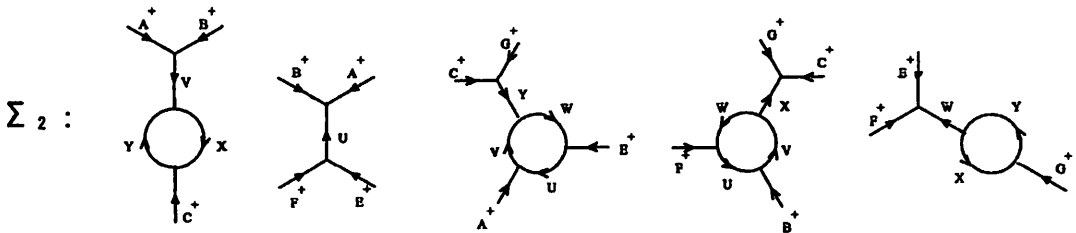
となる。



1-labels X, Y, Z は  $\Psi^+$ -変形で発生してきたものであるからアーク型である。そこで、この  $\Sigma_1$  に piping  $\Psi^+(Z)$  を施すと

$$\Sigma_2 = \{UVW, XY; B^+VXC^+, C^+YV^{-1}A^+, A^+B^+, A^+U^{-1}E^+, B^+U^{-1}F^+, C^+G^+, F^+W^{-1}XG^+, G^+YWE^+, E^+F^+\}$$

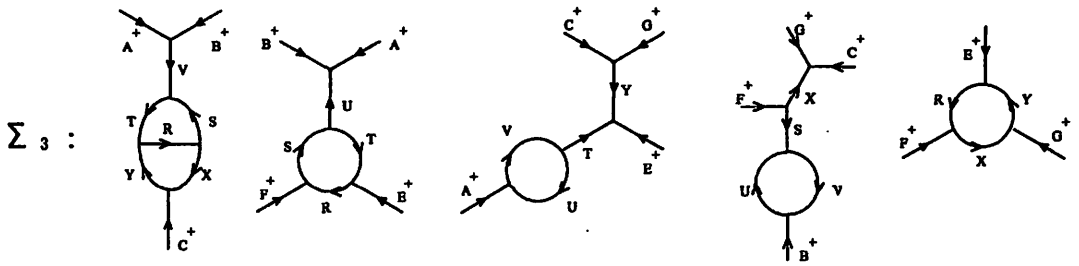
となる。



このとき発生した U, V, W も同じ理由でアーク型 1-label である。  $\Sigma_2$  に piping  $\Psi^+(Y)$  を適用すれば

$$\Sigma_3 = \{RST, UV, XYR; B^+VS^{-1}XC^+, C^+YT^{-1}V^{-1}A^+, A^+B^+, A^+U^{-1}TE^+, B^+U^{-1}S^{-1}F^+, C^+G^+, F^+XG^+, G^+YE^+, E^+F^+\}$$

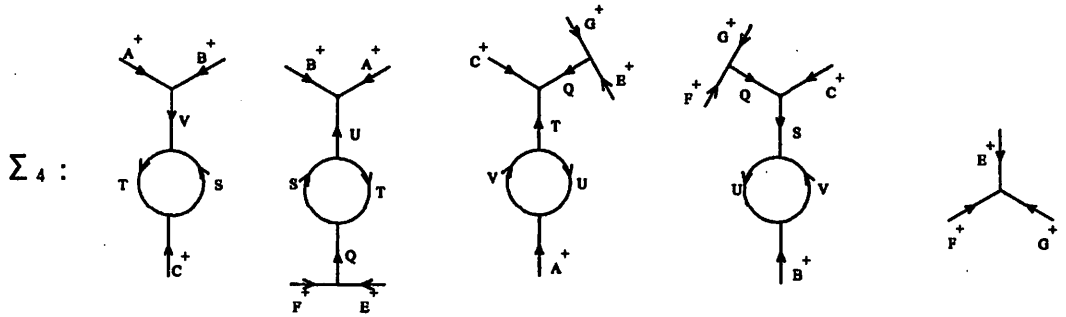
となる。



このとき、1-labels R, S, T はアーク型である。この  $\Sigma_3$  に 3 辺形つぶし  $\Psi^-(XYR)$  を施して

$$\Sigma_4 = \{ST, UV; B^+VS^{-1}C^+, C^+T^{-1}V^{-1}A^+, A^+B^+, A^+U^{-1}TQ^{-1}E^+, B^+U^{-1}S^{-1}Q^{-1}F^+, C^+Q^{-1}G^+, F^+G^+, G^+E^+, E^+F^+\}$$

が得られる。



$E^+, P^+, C^+$  の部分を簡約すると、 $\{ST, UV\}$  のまわりの環境  $\Sigma_4^*(\subset \Sigma_4)$  は

$$\Sigma_4^* = \{ST, UV; B^+VS^{-1}C^+, C^+T^{-1}V^{-1}A^+, A^+B^+, A^+U^{-1}TQ^+, B^+U^{-1}S^{-1}Q^+, C^+Q^+\}$$

と表される。1-labels のいくつかを

$$Q \rightarrow D, V \rightarrow E, U^{-1} \rightarrow F, T^{-1} \rightarrow G, S \rightarrow H$$

と書き直すと、 $\Sigma_4^*$  は

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^+, A^+EG^{-1}C^+, B^+FH^{-1}D^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+EH^{-1}C^+\}$$

と一致する。よって Lemma 1 の(1)は示された。

(2)について：

Lemma 1 の(2)は、(1)の逆をたどればよいので証明の必要はないようだが、 $\Psi^\pm$ -変形が実際に可能であるかどうかをチェックするために、あえて記述しておく。

DS-diagram  $\Delta$  が

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^+, A^+EG^{-1}C^+, B^+EH^{-1}C^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+FH^{-1}D^+, \}$$

を含み,  $\nu(\Delta_*) \geq 4$  であるものとしよう。1-labels E, F, G, H はアーク型である。

また, Proposition 2 により, 1-labels A, B, C, D のうちのどれか1つ, たとえば D はアーク型である。このとき,  $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$  は

$$T_0 = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^{-1}N^+, A^+EG^{-1}C^+, B^+EH^{-1}C^+, \\ A^+FG^{-1}D^{-1}M^+, B^+FH^{-1}D^{-1}L^+, M^+N^+, N^+L^+, L^+M^+\}$$

と書ける。これに piping  $\Psi^+(D)$  を施すと

$$T_1 = \{XYZ, EF^{-1}, ZGH^{-1}; A^+B^+, C^+N^+, A^+EG^{-1}XC^+, B^+EH^{-1}Y^{-1}C^+, \\ A^+FG^{-1}M^+, B^+FH^{-1}L^+, M^+XN^+, N^+YL^+, L^+ZM^+\}$$

となる。ここで発生した 1-labels X, Y, Z はアーク型である。

この  $T_1$  に 3 辺形つぶし  $\Psi^-(ZGH^{-1})$  を施すと

$$T_2 = \{XY, EW^{-1}F^{-1}; A^+B^+, C^+N^+, A^+EXC^+, B^+EY^{-1}C^+, \\ A^+FM^+, B^+FL^+, M^+WXN^+, N^+YW^{-1}L^+, L^+M^+\}$$

となる。W はアーク型の 1-label である。この  $T_2$  に対して 3 辺形つぶし  $\Psi^-(EW^{-1}F^{-1})$  を適用すれば

$$T_3 = \{XYV; A^+V^{-1}B^+, C^+N^+, A^+XC^+, B^+Y^{-1}C^+, \\ A^+M^+, B^+L^+, M^+XN^+, N^+YL^+, L^+VM^+\}$$

となる。V はアーク型である。この  $T_3$  に  $\Psi^-(XYV)$  を施して

$$T_4 = \{A^+B^+, C^+U^{-1}N^+, A^+C^+, B^+C^+, \\ A^+U^{-1}M^+, B^+U^{-1}L^+, M^+N^+, N^+L^+, L^+M^+\}$$

が得られる。そこで,  $U^{-1} \rightarrow D$  と置き換えて  $L^+, M^+, N^+$  の部分を簡約すると

$$T_4^* = \{A^+B^+, C^+D^+, A^+C^+, B^+C^+, A^+D^+, B^+D^+, \}$$

となるが, これは  $\Sigma(x)$  にほかならない。よって Lemma 1 の (2) は示された。■

$\Delta$  を  $\nu(\Delta) = n$  である DS-diagram とし,  $\Delta$  の 1 つの 0-label  $x$  のまわりの環境:

$$\Sigma(x) = \{A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+\}$$

に関する 3 種の  $\Phi^+$ -変形:

$$\Phi^+(A^+B^+) = \Phi^+(C^+D^+),$$

$$\Phi^+(A^+C^+) = \Phi^+(B^+D^+),$$

$$\Phi^+(A^+D^+) = \Phi^+(B^+C^+),$$

で得られる DS-diagram をそれぞれ  $\Delta(A^+B^+)$ ,  $\Delta(A^+C^+)$ ,  $\Delta(A^+D^+)$  とする。

$$\nu(\Delta(A^+B^+)) = \nu(\Delta(A^+C^+)) = \nu(\Delta(A^+D^+)) = n + 2 (\geq 3)$$

である。

いま, 3 つの corners  $A^+B^+$ ,  $A^+C^+$ ,  $A^+D^+$  のうちの 2 つを  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) とおこう。そのとき, つぎの Lemma 2 が成り立つ。

**Lemma 2.** 頂点数  $n$  の DS-diagram  $\Delta$  の 1 つの 0-label のまわりの corners  $\gamma_1, \gamma_2$  に関する  $\Phi^+$ -変形で得られる DS-diagrams を  $\Delta(\gamma_1)$ ,  $\Delta(\gamma_2)$  とする。そのとき, metamorphosis  $\Delta(\gamma_1) \Rightarrow \Delta(\gamma_2)$  が存在する。

[Lemma 2 の証明] どれも同じだから、 $\gamma_1 = A^+B^+$ ,  $\gamma_2 = A^+C^+$  の場合について示そう。

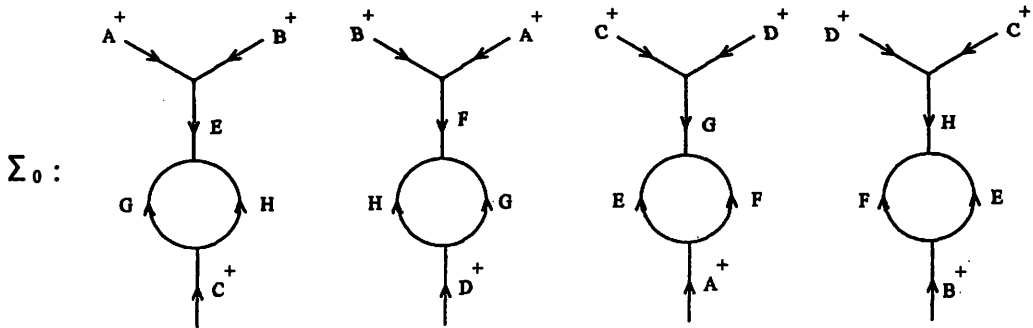
$\Delta(\gamma_1) = \Delta(A^+B^+)$  内で、

$$\Sigma(\alpha) = \{A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+\}$$

から  $\Phi^+(A^+B^+)$  によって得られた部分の環境は

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^+D^+, A^+EG^{-1}C^+, B^+FH^{-1}D^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+EH^{-1}C^+\}$$

と書ける。これを出発点  $\Sigma_0$  としよう。 $\nu(\Sigma_0) = n + 2$  である。

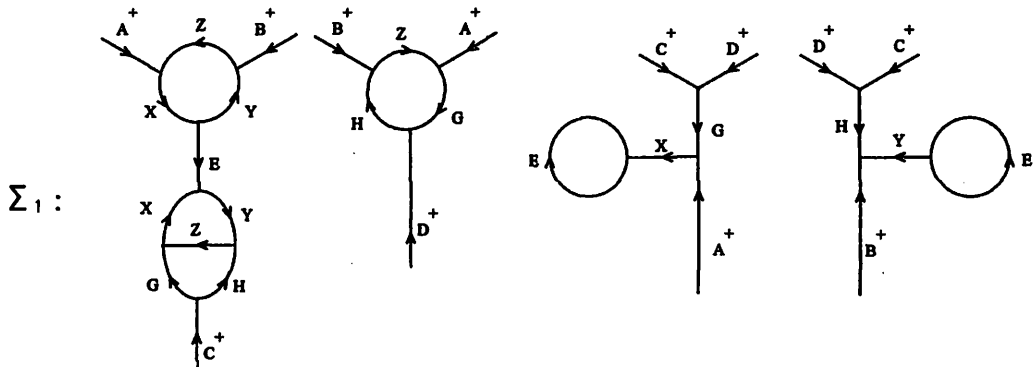


$\Sigma_0$  に piping  $\Psi^+(F)$  を施すと

$$\Sigma_1 = \{E, GZ^{-1}H^{-1}, XYZ; A^+Z^{-1}B^+, C^+D^+,$$

$$A^+XEX^{-1}G^{-1}C^+, B^+H^{-1}D^+, A^+G^{-1}D^+, B^+Y^{-1}EYH^{-1}C^+\}$$

が得られる。 $\nu(\Sigma_1) = \nu(\Sigma_0) + 1 = n + 3$  である。

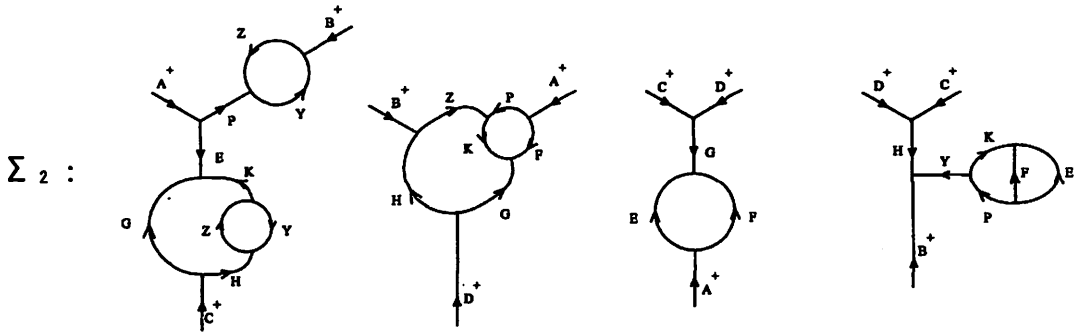


この  $\Sigma_1$  に piping  $\Psi^+(X)$  を施すと

$$\Sigma_2 = \{EF^{-1}, GK^{-1}Z^{-1}H^{-1}, YZ, PKF^{-1}; A^+PZ^{-1}B^+, C^+D^+,$$

$$A^+EG^{-1}C^+, B^+H^{-1}D^+, A^+FG^{-1}D^+, B^+Y^{-1}P^{-1}EK^{-1}YH^{-1}C^+\}$$

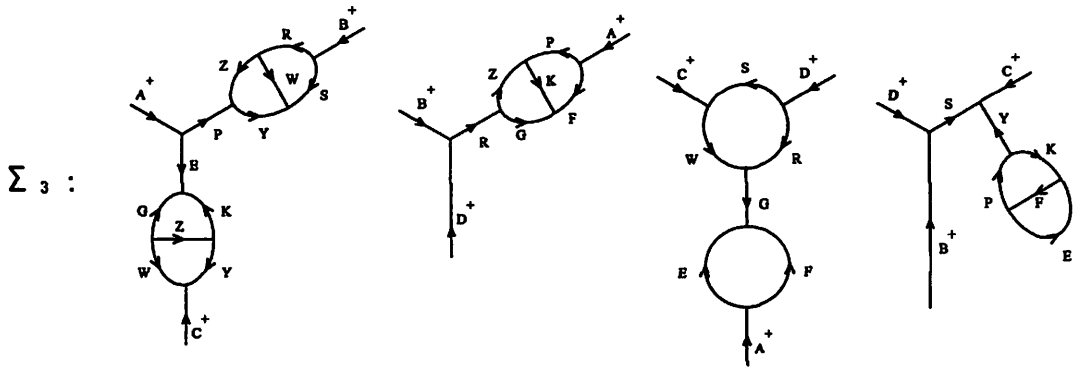
が得られる。 $\nu(\Sigma_2) = \nu(\Sigma_1) + 1 = n + 4$  である。



さらに、この $\Sigma_2$ に piping  $\Psi^+(H)$ を施すと

$$\Sigma_3 = \{EF^{-1}, GK^{-1}Z^{-1}, YW^{-1}Z, RWS^{-1}, PKF^{-1}; A^+PZ^{-1}R^{-1}B^+, C^+S^{-1}D^+, A^+EG^{-1}WC^+, B^+D^+, A^+FG^{-1}R^{-1}D^+, B^+SY^{-1}P^{-1}EK^{-1}YC^+\}$$

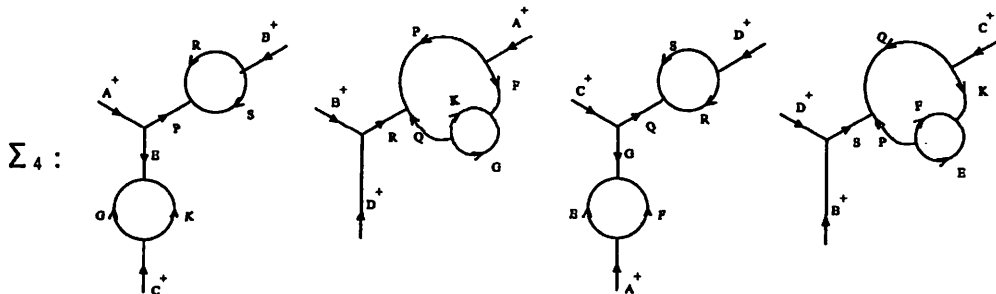
が得られる。 $\nu(\Sigma_3) = \nu(\Sigma_2) + 1 = n + 5$ である。



そこで $\Sigma_3$ のなかの3辺形 $YW^{-1}Z$ に着目して3辺形つぶし $\Psi^-(YW^{-1}Z)$ を適用すると

$$\Sigma_4 = \{EF^{-1}, GK^{-1}, RS^{-1}, PQ^{-1}KF^{-1}; A^+PR^{-1}B^+, C^+QS^{-1}D^+, A^+EG^{-1}C^+, B^+D^+, A^+FG^{-1}QR^{-1}D^+, B^+SP^{-1}EK^{-1}C^+\}$$

が得られる。 $\nu(\Sigma_4) = \nu(\Sigma_3) - 1 = n + 4$ である。



この  $\Sigma_4$  のなかの 2 組の 2 辺形  $(EF^{-1}, GK^{-1})$  に着目して  $\Phi^-(EF^{-1}, GK^{-1})$  を実行し、

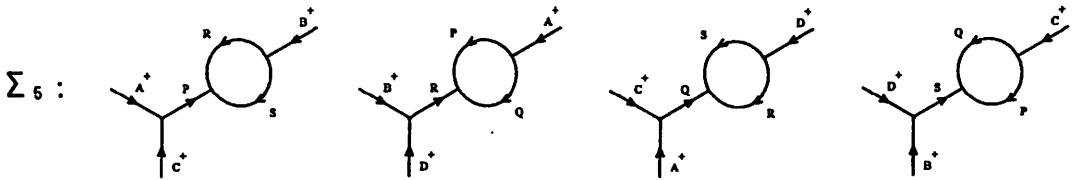
$$KP \rightarrow P, FQ \rightarrow Q; EC^+ \rightarrow C^+, GA^+ \rightarrow A^+$$

と書き直すと、初期の目的である  $\Delta(\gamma_2) = \Delta(A^+C^+)$  の環境:

$$\Sigma_5 = \{RS^{-1}, PQ^{-1}; A^+PR^{-1}B^+, C^+QS^{-1}D^+,$$

$$A^+C^+, B^+D^+, A^+QR^{-1}D^+, B^+SP^{-1}C^+\}$$

が得られる。  $\nu(\Sigma_5) = \nu(\Sigma_4) - 2 = n + 2$  である。



最後の  $\Phi^-$  は  $\nu(\Delta(\Sigma_4)) \geq n + 4 \geq 5$  に適用されるものだから、Lemma 1 によって、

$\Phi^-(EF^{-1}, GK^{-1})$  は  $\Psi^\pm$ -変換だけからなる有限列で表すことができる。 ■

頂点数が 1 の DS-diagrams は図 12 の 3 種類ですべてである。

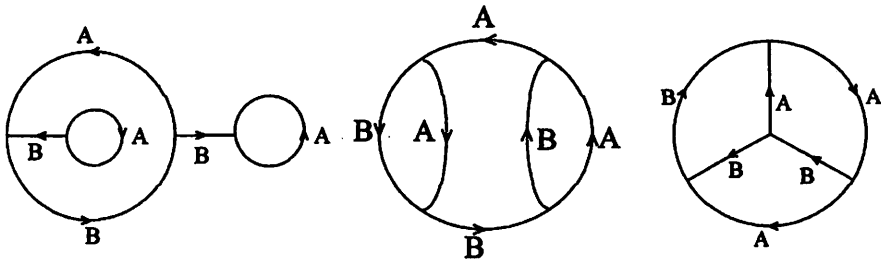


図 12 : 頂点数 1 の DS-diagram 一覧

これらが表す多様体は左から順に、

3 次元球面  $S^3$ , レンズ空間  $L(4, 1)$ , レンズ空間  $L(5, 2)$

である。これらの DS-diagram に  $\Phi^+$ -変換を施すと、それぞれに対して 3 種類ずつの 3 頂点 DS-diagram が得られる (図 13 ~ 図 15)。

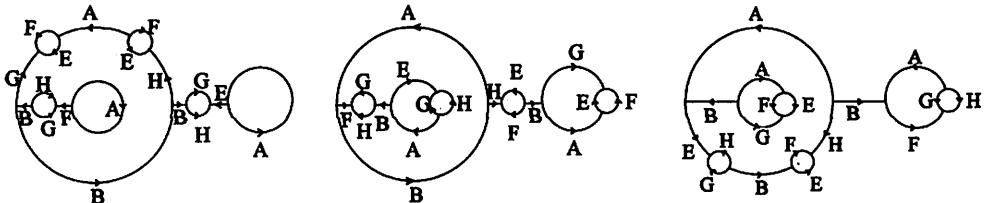


図 13 : “あわび” に  $\Phi^+$ -変換を施して得られる 3 頂点 DS-diagram



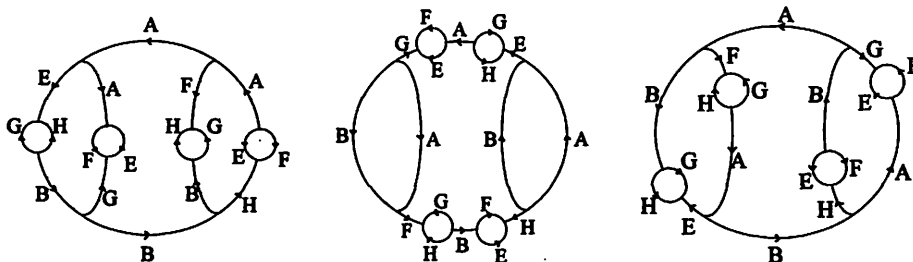


図 14：“甲子園”に $\Phi^+$ -変換を施して得られる3頂点 DS-diagram

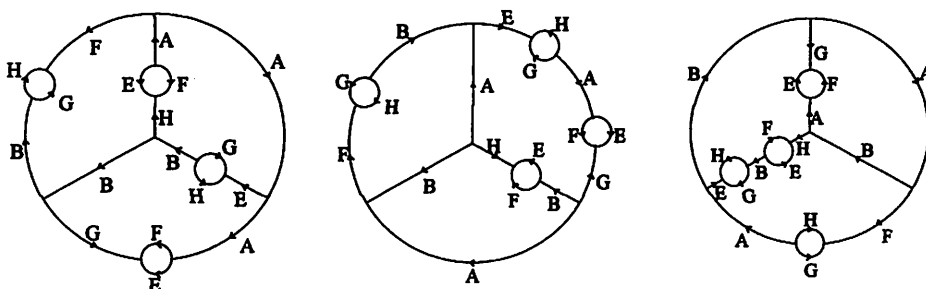


図 15：“ベンツ”に $\Phi^+$ -変換を施して得られる3頂点 DS-diagram

Lemma 2によって、それぞれの3組の3頂点 DS-diagrams は有限回の $\Psi^\pm$ -変換だけで互いに移りあう。図 14 の真ん中の図と右側の図は同じ（すなわち同型な）DS-diagram であることを注意しておく。

ところで、河野正晴氏(1989年10月箱根)により、3頂点 DS-diagrams のリストが作成された。それによると、3頂点 DS-diagrams は総数63種類であり、それらのなかで $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ 型の環境を内包するものは8種類である。そしてそれらはすべて図 13 ~ 図 15 のなかに含まれている。

これらの事実を整理すると、次の Lemma 3 のような形で述べる事ができる。

**Lemma 3.**  $\Delta_1, \Delta_2$  が頂点数3の DS-diagrams で、ともに $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ 型の環境を内包するとする。そのとき $\Delta_1, \Delta_2$  が DS-同値であれば $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  は metamorphic である。

[定理2の証明]  $\nu(\Delta) \geq 2$ かつ $\nu(\Delta') \geq 2$ であるような DS 変形

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta_i = \Delta'$$

において、ある番号 $i$ の DS-diagram  $\Delta_i$  が $\nu(\Delta_i) = 1$ であったとする。このとき $1 = \nu(\Delta_i) < \nu(\Delta_{i+1})$ なので、DS 変形 $\Delta_i \Rightarrow \Delta_{i+1}$ は $\Phi^+$ -変形か $\Psi^+$ -変形のどちらか

であるが、じつは $\Phi^+$ -変形でなければならない。なぜならば、 $\nu(\Delta_i) = 1$ であるから $\Delta_i$ のすべての1-labelsはループ型であり、この $\Delta_i$ に $\Psi^+$ -変形を適用することはできないからである。また、DS変形 $\Delta_{i-1} \Rightarrow \Delta_i$ は $\Phi^-$ -変形である。なぜならば、 $\nu(\Delta_{i-1}) > \nu(\Delta_i) = 1$ であるからDS変形 $\Delta_{i-1} \Rightarrow \Delta_i$ は $\Phi^-$ -変形であるか $\Psi^-$ -変形であるが、もしもDS変形 $\Delta_{i-1} \Rightarrow \Delta_i$ が $\Psi^-$ -変形であるとする、その逆変換 $\Delta_i \Rightarrow \Delta_{i-1}$ が $\Psi^+$ -変形ということになって上の議論に反するからである。

よって、 $\nu(\Delta_{i-1}) = 3$ かつ $\nu(\Delta_{i+1}) = 3$ であり、 $\Delta_{i-1}$ 、 $\Delta_{i+1}$ はDS同値であるから、Lemma 3により $\Delta_{i-1}$ を $\Delta_{i+1}$ に移すDS変形として metamorphosis, すなわち $\Psi^\pm$ -変形だけの有限列、を採用することができる。このようにして変形を適当に取り替えれば、1頂点DS-diagramはすべて当初の有限列のなかから排除することができる。

したがって、 $\nu(\Delta) \geq 2$ かつ $\nu(\Delta') \geq 2$ であるようなDS-diagramsに対するDS変形

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_k = \Delta'$$

として、各 $i$ に対して $\nu(\Delta_i) \geq 2$ であるようなものがとれる。よってLemma 1の働きにより、 $\Delta$ に $\Psi^\pm$ -変形を有限回適用するだけで $\Delta'$ を得ることができる。■

(完)

## References

- [1] H. Ikeda, M. Yamashita and K. Yokoyama, Symbolic description of homeomorphisms on closed 3-manifolds., Kobe J. Math., 13 (1996) 69-115.
- [2] H. Ikeda, Identification maps on the 2-sphere., Kobe J.Math.,2 (1985), 163-167.
- [3] H. Ikeda and Y. Inoue, Invitation to DS-diagrams., Kobe J.Math.,2 (1985), 169-186.
- [4] I. Ishii, Flows and spines., Tokyo J. Math.,9 (1986),505-525.
- [5] S. V. Matveev, Transformation of special spines and the Zeeman Conjecture., Math. USSR Izvestiya (1988), Translation 423-434.
- [6] S. V. Matveev, Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg 2007.