

## D S 変形 と P I P I N G

池田 裕司 (神戸大 理)  
 山下 正勝 (東洋大 工)  
 横山 和夫 (上智大 理工)

### §1. 準備

DS変形について議論するためには「near miss の問題」に細心の注意を払いながら作業を続ける必要がある。そこで、DS-diagram の局所的な状態の簡単な事実関係について述べておきたい。

$A$  を DS-diagram  $\Delta$  内の (oriented) 1-label ;  $a, b$  をそれぞれ  $A$  の initial 0-label, terminal 0-label とする.  $f: S^2 \rightarrow P$  を  $\Delta$  から induce される同一視写像,  $A^- = N(a, P) \cap A$ ,  $A^+ = N(b, P) \cap A$  とする. ただし,  $N(x, P)$  は点  $x \in P$  の正則近傍を表わす. 要するに,  $A$  の根もとの近辺が  $A^-$ , 先端近くが  $A^+$  だということである. この映像的理解で今後の議論には十分である.

1-label  $A$  の向きを無視したものを  $\|A\|$  と表わし, unoriented 1-label ということにする.

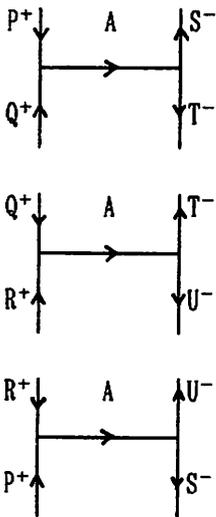


図 1-1(a)

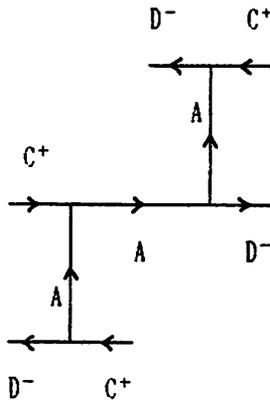


図 1-1(b)

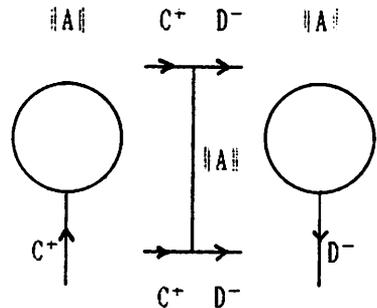


図 1-1(c)

(2)

1.1 Definition. 1-label  $A$  は,  $a \neq b$  のとき アーク型 (図 1-1(a)),  $a = b$  のとき ループ型 と呼ばれる. ループ型は  $\Delta$  内での  $A$  の近傍の形状によって, 稲妻型 (図 1-1(b)) と 風船型 (図 1-1(c)) に類別される.

1.2 Proposition.  $A$  を  $\Delta$  の 1-label とする. そのとき,

(i)  $a \neq b$  ならば  $A$  を label に持つ open 1-cells (3個ある) の閉包は互いに disjoint である.

(ii)  $a = b$  ならば  $A$  は稲妻型か風船型である.

さて,  $\Delta$  の 1つの 0-label の回りの状態について調べてみる. 次の図 2-3 の配置にある 1-labels  $A, B, C, D$  について記述する. これらの 1-labels には向きは定められているが, 必ずしも互いに異なっているとは限らないものとしておく. すなわち, たとえば  $A = B$  とか  $A = B^{-1}$  ということがあり得ることを想定している.

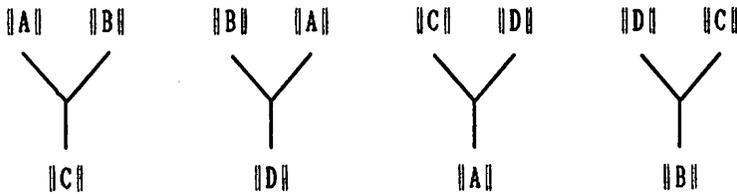


図 1-2

次の事実は DS-diagram の組合わせ構造が持つ興味深い性質である. 詳しくは池田-井上の論文『DSへの招待』を見よ.

1.3 Proposition.

(1)  $\|A\| = \|B\|$  ならば  $B = A^{-1}$  かつ  $\|C\| \neq \|A\|$ ,  $\|D\| \neq \|A\|$  である. 1-label  $A$  ( $= B^{-1}$ ) はループ型となるから,  $A$  の近辺は図 1-1 のようになっている.

(2)  $\|A\| = \|B\|$ ,  $\|C\| = \|D\|$  ならば  $\Delta$  の 0-label はただ一つに限られる. 結果として, そのような DS-diagram は図 1-3 の 3種類しかない:

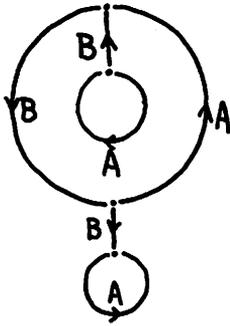
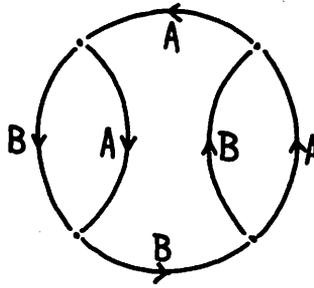
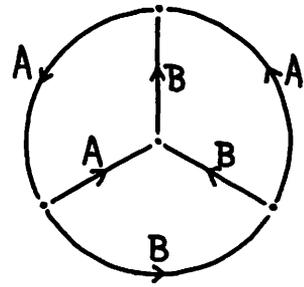
『あわび』 :  $S^3$ 『甲子園』 :  $L(4, 1)$ 『ペンツ』 :  $L(5, 2)$ 

図 1-3

『ペンツ』の名づけ親は小林一章先輩である。先輩の話によれば、ペンツはエルゴ  
ーニュ地方で生産される名車だそうである。

この小論ではDS変形について話を展開するつもりだが、変形の様子をことごとく  
絵の推移で表現しようとすれば、全体がパラパラ漫画風になってしまって、記述する  
内容のつまらなさに比べ、やたらページ数だけ増える、ということになる。これは紙  
に対するたいへんなボートクである。紙の無駄使いである。(こんな言い訳すら十分  
な無駄使いだ!) なんとか効率よく記述したい。

前回報告したようなDS-systemsの理論は、じつはこんな願望を動機として構  
築された、というのが本音である。(まだ未完成の部分が残されているけれども、こ  
の記法をこの場面で具体的に利用しながら手直しをするつもりである)。そこでは

『DS-diagram  $\Delta$  と DS-system  $\Sigma$  の間には

$$\Delta = \Delta(\Sigma) \leftrightarrow \Sigma = \Sigma_{\Delta}$$

という1:1の対応関係がある』

ことを示しておいた。この保障があるから、今後は  
絵  $\Delta$  の代わりに文字列  $\Sigma_{\Delta}$  を多用したい。(分かり  
にくさには目をつぶろう!) ここで用いるDS-  
system の記法について、実例をあげて説明してお  
く。

$$\Sigma = \{ FB, ECD^{-1}, CRB^{-1}AF^{-1}, AABCDDEF \}$$

は  $S^3$  を表わすDS-systemである。 $\Sigma$  から induce

されるDS-diagram  $\Delta(\Sigma)$  は図1-4のよう  
なる。(現物は石井(1-9), 河野(3-28)である)

この例を用いて説明する。

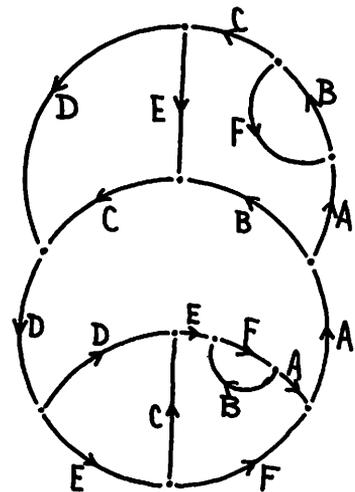


図 1-4

(4)

まず、 $\Sigma$ の1つの0-ラベルのまわりだけを問題にしたい場合について考える。  
corner  $(A^+, F^-)$  から定まる0-ラベル  $v = A^+ \wedge F^-$  のまわりを問題にするとき  
は関係する corner

$$(F^+, B^-); (B^+, A^-), (A^+, F^+); (F^+, A^-), (A^+, A^-), (A^+, B^-)$$

についての情報が明確にされていれば十分である。3つの fragments

$$F^+B^-, B^+A^-A^+F^+, F^+A^-A^+A^-A^+B^-$$

はこれらの情報を与えてくれる。それ以外の部分は無視してよいから、無視する部分  
を「…」で表わすことにして、 $\Sigma$ を

$$\Sigma = \{ \dots F^+B^- \dots B^+A^-A^+F^+ \dots F^+A^-A^+A^-A^+B^- \dots \}$$

と記述する。しかしながら、この記法は少しうるさい。そこで

$$B^+A^-A^+F^+ = B^+AF^+, F^+A^-A^+A^-A^+B^- = F^+AAB^-$$

とすれば、上の $\Sigma$ は

$$\Sigma = \{ \dots F^+B^- \dots B^+AF^+ \dots F^+AAB^- \dots \}$$

となってスッキリする。一般に、fragments は局所的に  $\dots Z^\pm X^\pm X^\mp Y^\pm \dots$  とな  
っているから

$$\dots Z^\pm \cdot X^+ \cdot Y^\pm \dots = \dots Z^\pm \cdot X \cdot Y^\pm \dots, \dots Z^\pm \cdot X^+ \cdot X^- \cdot Y^\pm \dots = \dots Z^\pm \cdot X^{-1} \cdot Y^\pm \dots$$

と約束する。

あいだの「…」もうるさいから省略して、申し訳程度に最後尾につけて

$$\Sigma = \{ F^+B^-, B^+AF^+, F^+AAB^-, \dots \}$$

とする。あるいはいっそ、この尾てい骨「…」も外してしまうことにするか？

さて、この DS-system  $\Sigma$ の2辺形 BF に注目したいときには、1-labels  
B, F に付随した 0-labels のまわりの様子までを明確に記述すれば十分である。  
そのためには、2-gon BF の他に、 $\Sigma$ 内の n-gon から得られる fragments  
のうち、 $B^+B^{-1}AF^{-1}C^-$ ,  $A^+BC^-$ ,  $B^+FA^-$  が明示されていればよい。したがってこのとき  
は

$$\Sigma = \{ BF; B^+B^{-1}AF^{-1}C^-, A^+BC^- \dots B^+FA^-, \dots \}$$

などと略記する。

3辺形  $ECD^{-1}$  に注目するときは、 $ECD^{-1}$  を先頭において、上と同様な

$$\Sigma = \{ ECD^{-1}; F^-CEB^+, B^-CDDER^+, \dots \}$$

という略記法が得られる。

さて、このような約束のもとでボツボツ話にとりかかる。

§2. DS変形の定義

DS-system においては、1つの 0-level  $v$ の回りの corners は6個存在する。それらを

$$A^+B^+, C^+D^+; A^+C^+, B^+D^+; A^+D^+, B^+C^+$$

とする。これらの6個の corners を2つずつ対にして考える。すなわち

$$(A^+B^+, C^+D^+), (A^+C^+, B^+D^+), (A^+D^+, B^+C^+)$$

である。これらのうちのどれか一組、たとえば  $(A^+B^+, C^+D^+)$  に着目してみる。

2.1 Definition. DS-system

$$\Sigma_1 = \{A^+B^+, C^-D^+; A^+C^+, B^+C^+, A^+D^+, B^+D^+, \dots\}$$

を DS-system

$$\Sigma_2 = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^+B^+, C^-D^-, A^+GEC^+, B^+GFC^+, A^+HBD^+, B^+HFD^+, \dots\}$$

に変える変形を

$$\Phi = \Phi(A^+B^+, C^+D^+) : \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_2$$

と表わし、I<sup>+</sup>型変形という。また、 $\Sigma_2$  を  $\Sigma_1$  に変える変形を

$$\Phi^{-1} = \Phi^{-1}(EF^{-1}, GH^{-1}) : \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_1$$

と表わし、I<sup>-</sup>型変形という。I<sup>+</sup>型変形、I<sup>-</sup>型変形を総称して I型変形という。

上の  $\Sigma_1, \Sigma_2$  を DS-diagram で描写するとつぎの図のようになる。

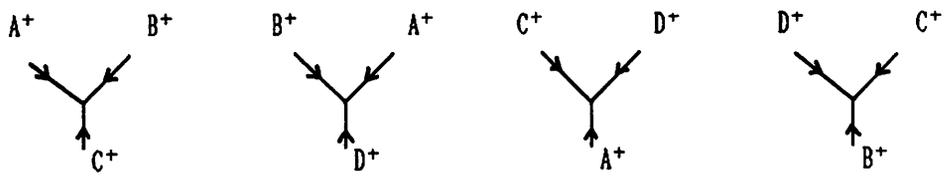


図 2-1:  $\Delta(\Sigma_1)$

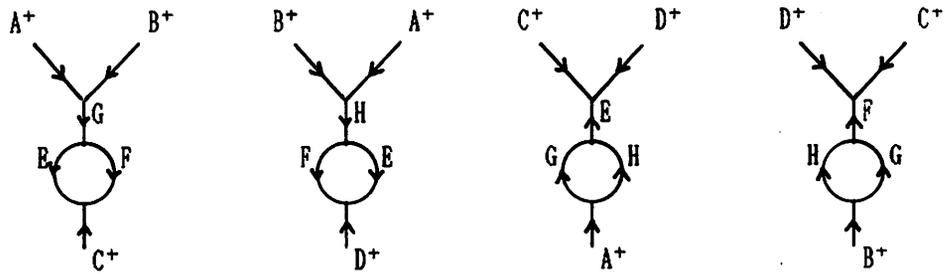


図 2-2:  $\Delta(\Sigma_2)$

(6)

2.2 Proposition. A を DS-system  $\Sigma$  内の 1-label とする. そのとき, A が風船型であるための必要十分条件は  $\Sigma$  が 1-gon A を含むことであり, A が稲妻型であるための必要十分条件は  $\Sigma$  が fragment AA または  $A^{-1}A^{-1}$  を含むことである.

2.3 Proposition. 2-gon の 2つの 1-labels は何れもつねにアーク型であり, 3-gon の 1-label がアーク型でないとしたらそれは必ず稲妻型である.

2.4 Definition. A および X, Y, Z がアーク型であるとき, DS-system  $\Sigma_3 = \{P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+AU^-; Q^+R^+, R^+P^+, P^+Q^+; T^-U^-, U^-S^-, S^-T^-, \dots\}$

を DS-system

$$\Sigma_4 = \{XYZ; P^+S^-, Q^+T^-, R^+U^-; Q^+XR^+, R^+YB^+, P^+ZQ^+;$$

$$T^-XU^-, U^-YS^-, S^-ZT^-, \dots\}$$

に変える変形を

$$\Psi = \Psi(A) : \Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_4$$

と表わし, II<sup>+</sup>型変形という. また,  $\Sigma_4$  を  $\Sigma_3$  に変える変形を

$$\Psi^{-1} = \Psi^{-1}(XYZ) : \Sigma_4 \Rightarrow \Sigma_3$$

と表わし, II<sup>-</sup>型変形という. II<sup>+</sup>型変形, II<sup>-</sup>型変形を総称して II型変形という.

上の  $\Sigma_3, \Sigma_4$  を DS-diagram で描写するとつぎの図のようになる.

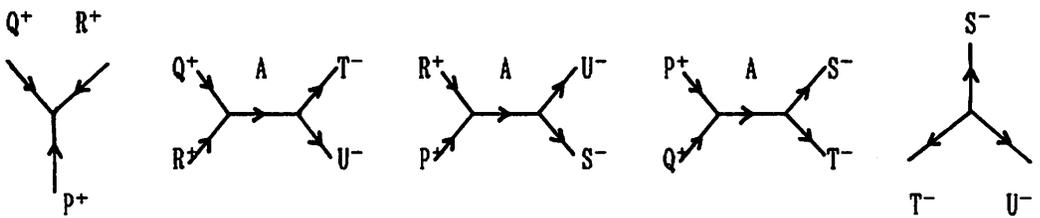


図 2-3:  $\Delta(\Sigma_3)$

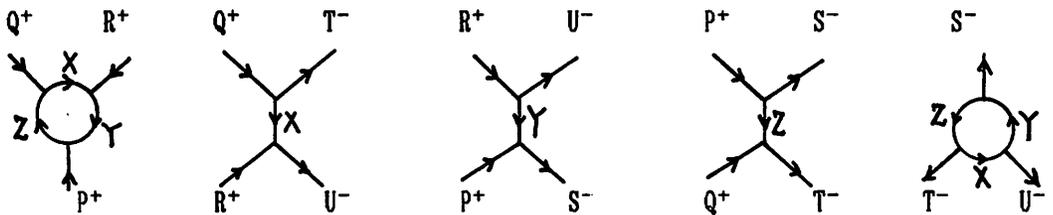


図 2-4:  $\Delta(\Sigma_4)$

2.5 Definition. I型変形, II型変形を総称して DS-system 上の初等 DS変形という. 2つの DS-systems  $\Sigma, \Sigma'$  に対して, DS-diagram の有限列:  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  で,

(a)  $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_n = \Sigma'$ ,

(b)  $\Sigma_{i+1}$  は  $\Sigma_i$  から初等DS変形で得られる,

となるものがあるとき,  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  は DS同値である, といい,  $\Sigma \approx \Sigma'$  と表わす. このとき, 変形  $\Sigma \Rightarrow \Sigma'$  を DS変形という.

2.6 Proposition. DS同値  $\approx$  は同値関係である.

DS変形によってラベルの型が変化する様子について注意しておく.

2.7 Proposition. (1) 元の  $\Sigma$  内でアーク型であったラベルは I<sup>+</sup>型変形, II<sup>+</sup>型変形によって新たに発生した  $\Sigma_*$  上でもアーク型である.

(2) I<sup>+</sup>型変形によって新たに発生した2つの 2-gons 上のラベルはともにアーク型である.

(3) II<sup>+</sup>型変形によって新たに発生した 3-gon 上の3つのラベル X, Y, Z はいずれもアーク型である.

2.8 Proposition. (1) (1) I<sup>-</sup>型変形  $\Phi^{-1}(EF^{-1}, GH^{-1})$  を行なうとき, 元の  $\Sigma$  内でアーク型だったラベルは, それが 2-gons  $EF^{-1}, GH^{-1}$  と incident でなければ, 新たな  $\Sigma_*$  上でもアーク型である.

(2) 3-gon XYZ に関する II<sup>-</sup>型変形を行なうとき, 元の  $\Sigma$  内でアーク型だったラベルは, それが XYZ と incident でなければ新たな  $\Sigma_*$  上でもアーク型である.

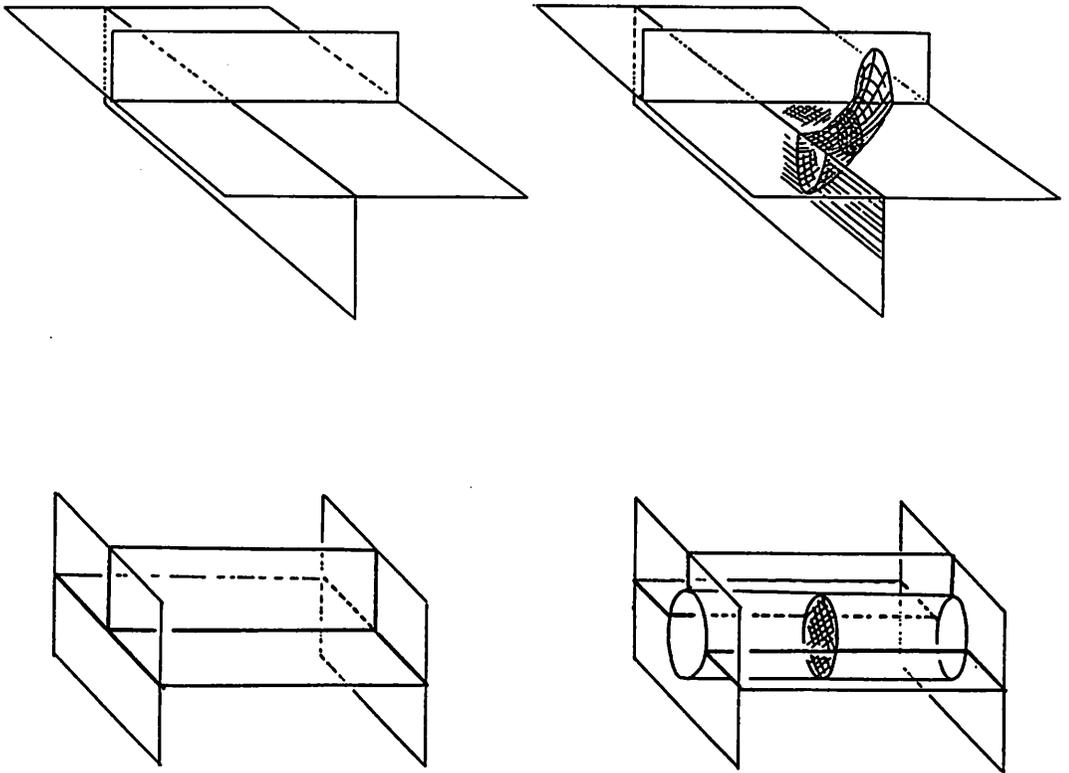
I<sup>-</sup>型変形を行なうときには, 当の 2-gons と incident なラベルは元の  $\Sigma$  内でアーク型であっても新たな  $\Sigma_*$  上でもアーク型であるとは限らない. また, II<sup>-</sup>型変形を行なうときには, 当の 3-gon と incident なラベルは元の  $\Sigma$  内でアーク型であっても新たな  $\Sigma_*$  上でもアーク型であるとは限らない. (要注意!)

DS-system に I型変形, II型変形を施して得られる polygonal system はいずれも再び DS-system になっている. すなわち, DS変形は DS-system を保存する変形である. 簡単にわかることであるが, ひとこと注意を喚起しておく.

(8)

2.9 Theorem.  $\Sigma, \Sigma'$  をDS同値な DS-system とし,  $M(\Sigma), M(\Sigma')$  をそれぞれ  $\Sigma, \Sigma'$  から associate される3次元閉多様体とする. そのとき  $M(\Sigma)$  と  $M(\Sigma')$  は位相同型である.

[証明] I型変形, II型変形が多様体の位相型を変えないことを示せばよい. 実際には DS-diagram で眺めるほうが考えやすい. これらの変形で変化する部分の近傍を調べると, いずれも collapsible な多様体になっていることがわかるので 3-ball であると知れる. 下の図は各近傍をDS図式の表面にまで collapse した状態での spine の様子である. ■



## §3. PIPING

$\Delta = (S^2, f, G)$  を DS-diagram とする.  $\alpha$  を  $\Delta$  の open 2-cell とし,  $\alpha$  の境界  $\partial\alpha$  上に,  $G$  の頂点以外の 2 点  $p, q$  を  $f(p) \neq f(q)$  となるように選ぶ.  $p, q$  を含む  $\partial\alpha$  上の open 1-cells をそれぞれ  $P, Q$  ( $P=Q$  かもしれない) とする.  $\partial\alpha$  は (必要ならば巡回的な順序の入れかえ, および  $P, Q$  の役割交換をして)

$$\partial\alpha = P \cdot \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \cdot Q \cdot \tau^*_1 \tau^*_2 \cdots \tau^*_m, \quad 0 \leq n \leq m,$$

と書ける.  $p$  と  $q$  を結ぶ  $\alpha$  内の勝手な proper arc を  $\ell(p, q)$  とする.  $p, q$  に対して, このような  $\ell(p, q)$  は ambient isotopy を除いて一意である.

$$x = f(p), \quad y = f(q), \quad \ell(x, y) = f(\ell(p, q)), \quad [\alpha] = f(\alpha)$$

とおく.  $P, Q$  の 1-label をそれぞれ  $A, B$  とし,  $\tau_i, \tau^*_j$  の 1-label を  $J_i, J^*_j$  とする. すなわち,  $A = f(P), B = f(Q), J_i = f(\tau_i), J^*_j = f(\tau^*_j)$  である. また,  $w = J_1 J_2 \cdots J_n, w^* = J^*_1 J^*_2 \cdots J^*_m$  において

$$[\partial\alpha] = A \cdot J_1 J_2 \cdots J_{n-1} \cdot B \cdot J^*_1 J^*_2 \cdots J^*_{m-1} J^*_m = AwBw^*$$

と書く.

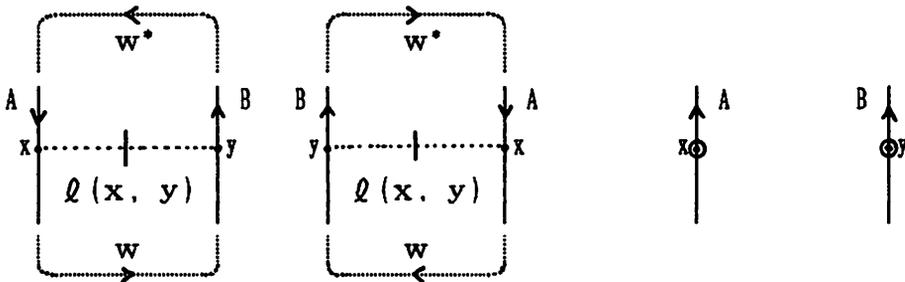


図 3-1

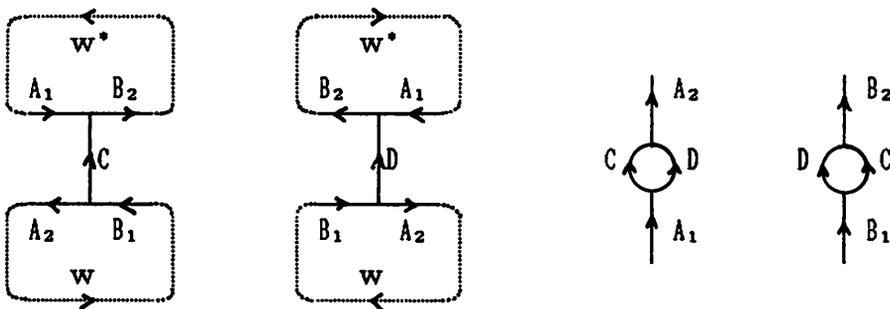


図 3-2

(10)

$P, Q$ の unoriented 1-label  $\|A\|, \|B\|$  が異なるときは問題ないが、一致する場合には、これからさきの議論は  $x, y$  の位置に影響される。そこで話を単純化するために、 $x \in A^+, y \in A^-$  としておこう。すなわち、 $x$  は  $A$  の終点近くに、 $y$  は  $A$  の始点近くに配置されているものとする。 $A \# B$  の初めの  $A$  上の  $x$  と終わりの  $y$  を結ぶ補助線を井型、初めの  $A$  上の  $y$  と終わりの  $x$  を結ぶ補助線を  $b$  型とする。

つぎに少々曖昧な定義を述べておく。

**3.1 Definition.** DS-diagram  $\Delta$  が図 3-1 で与えられているとき、 $\Delta$  を図 3-2 で示されるような DS-diagram  $\Delta'$  に変える変形を  $\ell(x, y)$  に沿った piping という。 $\|A\| \neq \|B\|$  のときは  $L_n(A \# B)$  と表わし、 $\|A\| = \|B\|$  のときは  $\ell(x, y)$  の選び方によって、 $L_n(A \# B^{\pm 1} : \#)$ 、または  $L_n(A \# B^{\pm 1} : b)$ 、と表わす。これらをまとめて  $L_n$  と書く。

DS-diagram 上で piping を具体的に実行するときには、 $\ell(x, y)$  の位置をあらわす 2本の補助線を入れ、第 3の  $x, y$  の位置に 2つの小円を描きいれておくと便利である。補助線は対応する 2組の  $x$  と  $y$  を結べばよいが、そのような補助線として図 3-1 にあるように点線を用い、その中央に点線に直交する短い実線を描き入れることにする。

この小論では、次の主定理を示すことを最大目標とする。

**3.2 Theorem.** piping は DS 変形である。

さて、この piping を DS-system で書くならば、形式的には

$$\Sigma_{\Delta} = \{A \# B \#^*, \dots, A \dots B \dots A \dots B \dots\}$$

$\Rightarrow$

$$\Sigma_{\Delta'} = \{C D^{-1}, A_2 \# B_1, B_2 \#^* A_1, \dots, A_1 C A_2 \dots B_1 C^{-1} B_2 \dots A_1 D A_2 \dots B_1 D^{-1} B_2 \dots\}$$

となるが、定理の証明のためには、この piping を

$$[\partial \alpha] = A \# B \#^* = A \cdot J_1 J_2 \dots J_n \cdot B \cdot J^*_1 J^*_2 \dots J^*_m, \quad n \leq m,$$

の形に応じて、もっと明確に表現しておく必要がある。そこで次節以降では、この piping の正確な記述を個別に述べながら上の主定理を帰納的に示していくことにする。

§4.  $L_{-1}$ .

最も特殊な場合、すなわち2点  $p, q$  を含む  $\partial\alpha$  上の open 1-cell が一致する ( $P=Q$ ) 場合の piping  $L_{-1} = L_{-1}(A)$  について述べる.  $A=f(P)$  の近傍の様子は,  $A$  がアーク型, 風船型, 稲妻型のどれであるかによって, 若干のバリエーションがある.  $A$  がアーク型の場合の DS-system は一般的な形の

$$\Sigma = \Sigma(A) = \{R^+AU^-, P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+P^+, R^+Q^+, P^+Q^+, U^-S^-, U^-T^-, S^-T^-, \dots\}$$

となる. しかし,  $A$  がループ型の場合にはこれらのラベルのいくつかが一致してしまうので, DS-system は簡略化した形で表わされる. すなわち,

$$A \text{ が 稲妻型のとき: } \Sigma = \{R^+AAU^-, U^-AR^+, R^+U^-, \dots\},$$

$$A \text{ が 風船型のとき: } \Sigma = \{A; R^+AR^+, U^-AU^-, \dots\},$$

としてよい.

1-label  $A$  上の2点  $x, y$  を結ぶ補助線  $\ell(x, y)$  と補助円について調べる. 3つの  $A$  のどれに補助円が載っているかで場合分けをすると, 図にあるような5種類が考えられる (図 4-1, 4-2, 4-3). このうち, 図 4-3 の (b) だけは  $[\alpha]$  が 1-gon になっていて, これについては別の扱いをする必要がある. しかし, それ以外の4種類についての piping は本質的に同じものとなっている. すなわち:

4.1 Proposition.  $L_{-1}(A)$  を具体的に表わすとつぎのようになる:

(1)  $[\alpha]$  が 1-gon ならば,

$$\Sigma = \{A; X^+AX^+, Y^-AY^-\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{CD^{-1}, A_1A_3, A_2; X^+A_1CA_2C^{-1}A_3X^+, Y^-A_1DA_2D^{-1}A_3Y^-\},$$

(2)  $[\alpha]$  が 1-gon でなければ,

$$\Sigma = \{R^+AU^-, P^+AS^-, Q^+AT^-, \dots\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{CD, A_2; R^+A_1A_2U^-, P^+A_1CA_2C^{-1}A_3S^-, Q^+A_1D^{-1}A_2DA_3T^-, \dots\}.$$

$[\alpha]$  が 1-gon のときの piping はただ1通りしか存在しない. しかも, これは  $I^+$ 型変形そのものである. すなわち:

4.2 Proposition.  $[\alpha]$  が 1-gon ならば,  $L_{-1}(A) = \Phi(A^+A^-, R^+U^-)$ .

したがって今後, 1-gon についての piping については, 議論する必要はない.

(12)

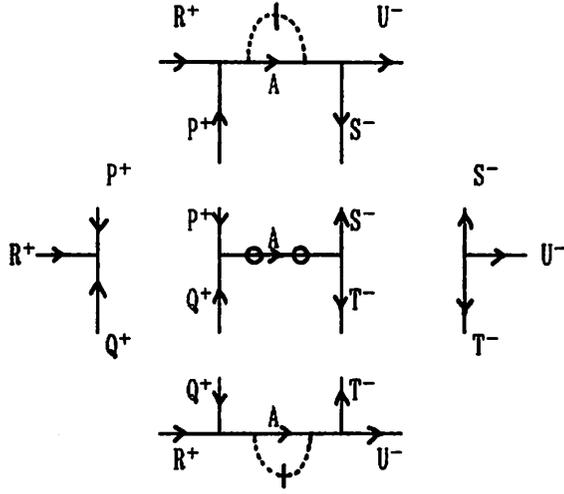
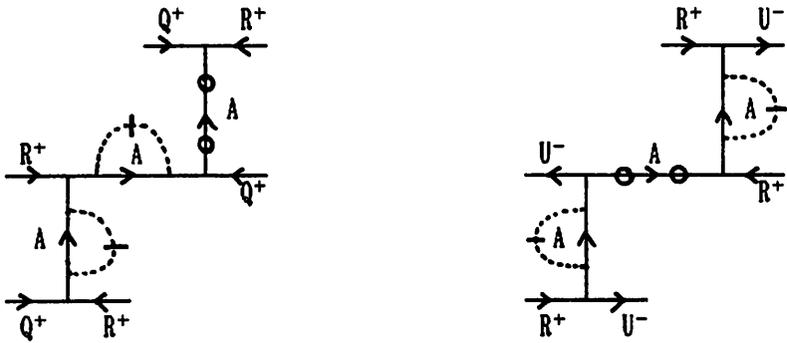


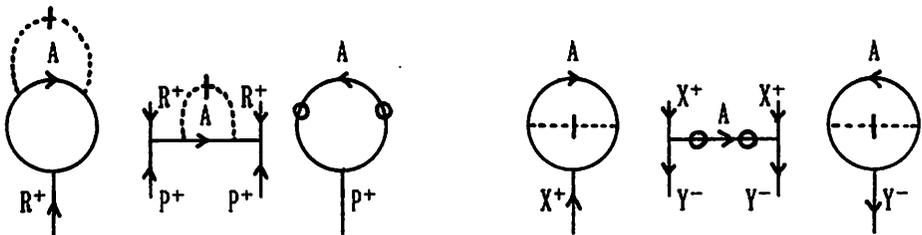
图 4-1



(a)  $P=U=A, S=T=R^{-1}$

(b)  $P=U^{-1}, Q=S=A, T=R^{-1}$

图 4-2



(a)  $U=R^{-1}, Q=T=A, S=P^{-1}$

(b)

图 4-3

4.3 Theorem. piping  $L_{-1} : \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  はDS変形である.

[証明]  $[\alpha]$  が 1-gon の場合には  $L_{-1}(A)$  は  $I^+$ 型変形である (4.2) から, ここでは  $[\alpha]$  が  $(m+1)$ -gon,  $m \geq 1$ , の場合に定理がなりたつことを示せばよい.

$[\partial\alpha] = \cdots RAU \cdots$  での piping  $L_{-1} = L_{-1}(A) : \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  について考える.

$$\Sigma = \Sigma(A) = \{R^+AU^-, P^+AS^-, Q^+AT^-, R^+P^+, R^+Q^+, P^+Q^+, U^-S^-, U^-T^-, S^-T^-, \dots\}$$

に対して,  $L_{-1}(A)$  は

$$\Sigma = \{R^+AU^-, P^+AS^-, Q^+AT^-, \dots\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{CD, A_2; R^+A_1A_3U^-, P^+A_1CA_2C^{-1}A_3S^-, Q^+A_1D^{-1}A_2DA_3T^-, \dots\}.$$

である. ところで,  $[\alpha]$  は 1-gon でないから,  $\|A\| \neq \|R\|$  または  $\|A\| \neq \|U\|$  である. いま,  $\|A\| \neq \|R\|$  とする ( $\|A\| = \|R\|$  のときは  $\|A\| \neq \|U\|$  だから  $R$  の代わりに  $U$  を利用すればよい).  $\Sigma$  に  $I^+$ 型変形  $\Phi(R^+A^-, P^+Q^+)$  を適用すると,

$$\Sigma_1 = \{FG, A_2R_*; R^+A_3U^-, P^+A_2FA_3S^-, Q^+A_2G^{-1}A_3T^-, R^+F^{-1}R_*P^+, R^+GR_*Q^+, P^+Q^+, U^-S^-, U^-T^-, S^-T^-, \dots\}$$

が得られる.  $F, G, A_2, R_*$  はそれぞれ 2-gon 上の 1-label だからアーク型である. そこで  $\Sigma_1$  に  $II^+$ 型変形  $\Psi(R_*)$  を施すと,

$$\Sigma_2 = \{CDE, BFG, A_2; R^+A_3U^-, P^+CA_2C^{-1}FA_3S^-, Q^+D^{-1}A_2DG^{-1}A_3T^-, R^+F^{-1}P^+, R^+GQ^+, P^+E^{-1}Q^+, U^-S^-, U^-T^-, S^-T^-, \dots\}$$

が得られる.  $E$  はこのとき発生した 3-gon 上の 1-label だからアーク型である. すなわち 3-gon  $EFG$  上の 1-label はすべてアーク型である. そこで  $II^-$ 型変形  $\Psi^{-1}(EFG)$  を  $\Sigma_2$  に施すと,

$$\Sigma_3 = \{CD, A_2; R^+A_1A_3U^-, P^+A_1CA_2C^{-1}A_3S^-, Q^+A_1D^{-1}A_2DA_3T^-, R^+P^+, R^+Q^+, P^+Q^+, U^-S^-, U^-T^-, S^-T^-, \dots\}$$

となる.  $\Sigma$  と  $\Sigma_3$  を比較してみれば分かるように

$$L_{-1}(A) = \Psi^{-1}(EFG) \circ \Psi(R_*) \circ \Phi(R^+A^-, P^+Q^+)$$

である. よって  $L_{-1}$  はDS変形である. ■

(14)

§5.  $L_0$ .

この節では  $n=0$  の場合, すなわち piping  $L_0$  について述べる. このときは 2点  $p, q$  を含む  $\partial\alpha$  上の open 1-cells  $P, Q$  が隣接している. この場合,  $A = f(P)$  と  $B = f(Q)$  が異なる場合と一致する場合に分けて考える必要がある.

$\|A\| \neq \|B\|$  の場合:  $AB$  の  $\Delta(\Sigma)$  での近傍を一般的な配置として図示すればつぎのようになる.

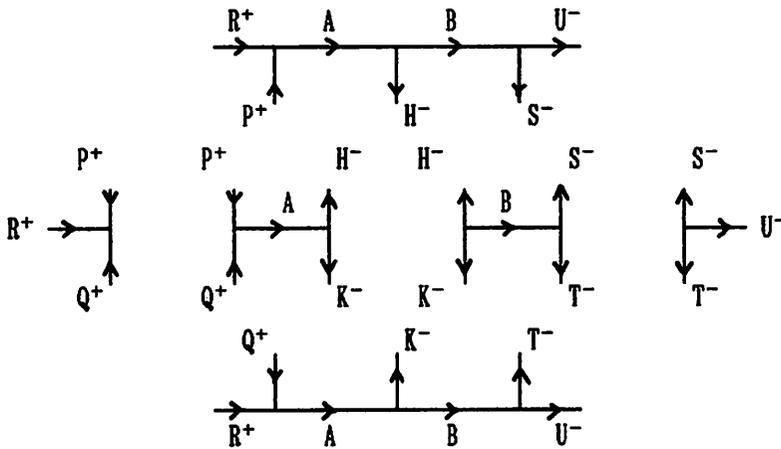


図 5-1

この図に対応する DS-system はつぎのようになる:

$$\Sigma = \Sigma(AB) = \{R^+ABU^-, P^+Q^+, H^-K^-, S^-T^-, R^+P^+, P^+AH^-, H^-BS^-, S^-U^-, R^+Q^+, Q^+AK^-, K^-BT^-, T^-U^-, \dots\}.$$

5.1 Proposition.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき,  $L_0(AB)$  は

$$\Sigma = \{R^+ABU^-, P^+AH^-, H^-BS^-, Q^+AK^-, K^-BT^-\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{CD^{-1}, A_2B_1; R^+A_1B_2U^-, P^+A_1CA_2H^-, H^-B_1C^{-1}B_2S^-, Q^+A_1DA_2K^-, K^-B_1D^{-1}B_2T^-, \dots\}$$

である.

$A, B$  がアーク型, 稲妻型, 風船型のいずれであっても  $L_0(AB)$  は  $A^+B^-$  の部分しか変化させないから, 統一的に扱った. 実際, いずれの場合にも次がなりたつ:

5.2 Proposition.  $L_0(AB) = \Phi(A^+B^-, H^-K^-)$ .

実をいうと, piping は  $I^+$ 型変形を一般化した変形である. 言いかえると,

『I<sup>+</sup>型変形  $\Phi(AB^{-1}, CD^{-1})$  とは, corner  $(A^+, B^+)$  で定まる 2-label  $[\alpha]$  内で  $x \in A$  と  $y \in B$  を結んだ補助線  $l(x, y)$  に沿った piping  $L_0(AB^{-1})$  である』ということが出来る ( $A, B$  の代わりに  $C, D$  を採用してもよい)。

$\|A\| = \|B\|$  の場合:  $A$  は必然的に稲妻型になる. したがって DS-system  $\Sigma(AB)$  に現われる 1-labels のあいだには

$$A=B=P=T, Q=H^{-1}=U^{-1}, R=K^{-1}=S^{-1}$$

(あるいはその鏡像としての

$$A=B=S=Q, T=H=R^{-1}, U=K=P^{-1})$$

という関係があるから,  $\Sigma(AA)$  は

$$\Sigma(AA) = \{R^+AAU^-, U^-AR^+, R^+U^-, \dots\}$$

と簡略化できる. 図 5-2 は  $l(x, y)$ ,  $l(y, x)$  を掛けた模式図であり, 図 5-3 は現物の DS-diagram  $\Delta(\Sigma(AA))$  に補助線と補助円をつけた絵である.

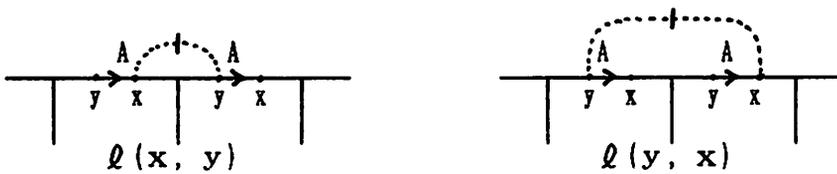


図 5-2

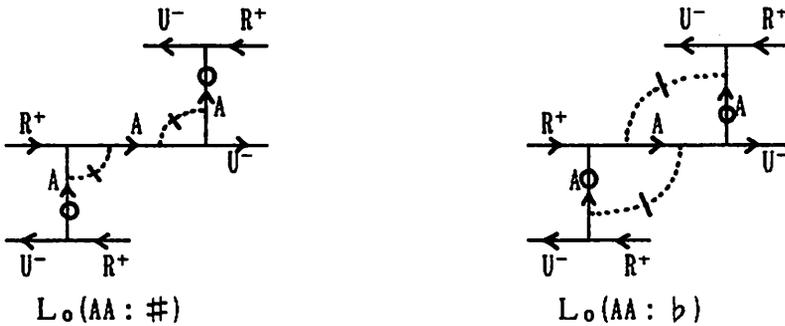


図 5-3

5.3 Proposition.  $\|A\| = \|B\|$  のとき (必然的に  $A = B$  となる!):

$L_0(AA: \#)$ ,  $L_0(AA: b)$  はそれぞれつぎのようになる:

$$L_0(AA: \#): \quad \Sigma(AA) = \{R^+AAU^-, U^-AR^+, R^+U^-, \dots\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^*(\#) = \{CD, A_1A_3; R^+A_1CA_2A_2DA_3U^-, U^-A_1D^{-1}A_2C^{-1}A_3R^+, \dots\},$$

$$L_0(AA: b): \quad \Sigma(AA) = \{R^+AAU^-, U^-AR^+, R^+U^-, \dots\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^*(b) = \{CD, A_1CA_2A_2DA_3; R^+A_1A_3U^-, U^-A_1D^{-1}A_2C^{-1}A_3R^+, \dots\}.$$

5.4 Proposition.  $L_0(AA: \#) = \Phi(A^+A^-, R^+U^-)$ .

5.4 は  $\|A\| = \|B\|$  の場合の I<sup>+</sup>型変形  $\Phi(A^+A^-, C^+D^+)$  が piping  $L_0(AA: \#)$ であることを示している。(  $\|C\| \neq \|D\|$  であれば前述の piping  $L_0(CD^{-1})$  と考えてもよい。しかし、 $\|A\| = \|B\|$  かつ  $\|C\| = \|D\|$  の場合 ( $\Leftrightarrow$  あわび) もある!)

一方、 $L_0(AB: b)$  は I<sup>+</sup>型変形ではない。

5.5 Theorem. piping  $L_0: \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  は DS変形である。

[証明] 上の命題 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 により、 $\|A\| \neq \|B\|$  のときの  $L_0(AB)$ 、 $\|A\| = \|B\|$  のときの  $L_0(AA: \#)$ 、はいずれも I<sup>+</sup>型変形であった。また、 $[\alpha]$  は 1-gon でないから、 $\|A\| = \|B\|$  のときは必然的に  $A = B$  であった。したがって、 $L_0(AA: b)$  が DS変形であることを示せば証明は完結する。

$[\alpha]$  が  $(m+2)$ -gon,  $m \geq 1$ , であることと  $A$  が稲妻型であることから  $\|R\| \neq \|A\|$  かつ  $\|U\| \neq \|A\|$  である。したがって、

$$\Sigma = \Sigma(AA) = \{R^+AAU^-, U^-AR^+, R^+U^-, \dots\}$$

に  $\Phi(A^+U^-, A^-R^+)$  を施すと

$$\Sigma_1 = \{A_1U_0, FG; R^+A_0G^{-1}A_1A_0U^-, U^-G^{-1}U_0^{-1}A_0FA_1R^+, R^+U_0F^{-1}U^-, \dots\}$$

となる。変形によって発生した  $A_0, U_0$  はアーク型である。そこで  $\Sigma_1$  に  $\Psi(A_0)$  を適用すると

$$\Sigma_2 = \{XYZ, A_1X^{-1}U_0, FGZ; R^+G^{-1}A_1U^-, U^-YG^{-1}U_0^{-1}FA_1YR^+, R^+ZU_0F^{-1}XU^-, \dots\}$$

を得る。 $Z$  は  $\Sigma_1$  でのアーク型 1-labels  $F, G$  の共通頂点に発生した 3-gon の上の 1-label であるから、 $\Sigma_2$  内の  $F, G, Z$  はいずれもアーク型である。したがって  $\Sigma_2$  には  $\Psi^{-1}(FGZ)$  が適用できて

$$\Sigma_3 = \{XY, A_1X^{-1}A_2U_0A_2, R^+A_1U^-, U^-YU_0^{-1}A_1YA_2R^+, R^+U_0XU^-, \dots\}$$

となる。この  $\Sigma_3$  にアーク型の  $U_0$  で再度 II<sup>+</sup>型変形  $\Psi(U_0)$  を行なうと、 $\Sigma_3$  は

$$\Sigma_4 = \{CDE, XYB; A_1X^{-1}CA_2A_2D; R^+B^{-1}A_1U^-, U^-YA_1YD^{-1}A_2C^{-1}R^+, R^+XU^-, \dots\}$$

となる。 $X, Y, B$  もアーク型であることが確認できるので、 $\Sigma_4$  に  $\Psi^{-1}(XYB)$  を施せば

$$\Sigma_5 = \{CD, A_1CA_2A_2DA_3; R^+A_1A_3U^-, U^-A_1D^{-1}A_2C^{-1}A_3R^+, R^+U^-, \dots\}$$

が得られる。 $\Sigma_5 = \Sigma_0$  であるから

$$L_0(AA: b) = \Psi^{-1}(XYB) \circ \Psi(U_0) \circ \Psi^{-1}(FGZ) \circ \Psi(A_0) \circ \Phi(A^+U^-, A^-R^+)$$

と書ける。すなわち  $L_0(AA: b)$  は DS変形である。これで  $L_0$  が DS変形であることがすべて言えた。■

§6.  $L_1$ .

$[\partial\alpha] = \dots R A J B U \dots$  での piping  $L_1: \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  について考える. ここで  $[\alpha]$  は  $(m+3)$ -gon,  $m \geq 1$ , としてよい. 各 1-label がアーク型, 風船型, 稲妻型のいずれであるかによって, 種々のバリエーションがあるが,  $\Delta(\Sigma)$  での AJB の近傍を一般的な配置として図示すれば図 6-1 のようになる.

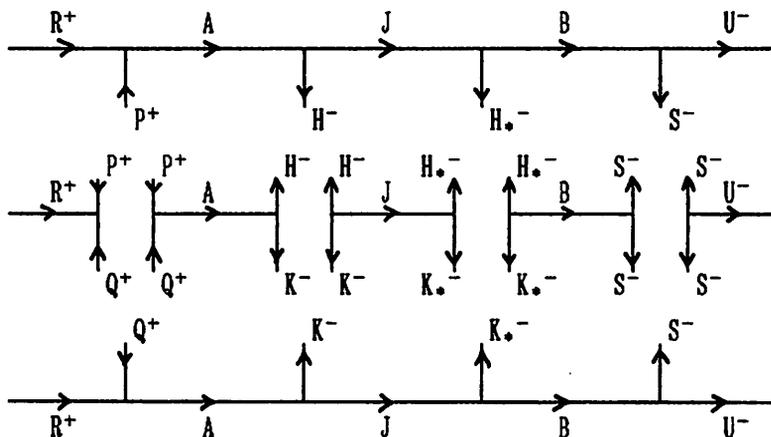


図 6-1

したがって DS-system  $\Sigma = \Sigma(AJB)$  の一般形は

$$\Sigma(AJB) = \{R^+ A J B U^-, R^+ P^+, P^+ A H^-, H^- J H^-, H^- B S^-, S^- U^-, \\ R^+ Q^+, Q^+ A K^-, K^- J K^-, K^- B T^-, T^- U^-, \dots\}$$

である. この  $\Sigma$  に piping  $L_1$  を施して得られる polygonal system を  $\Sigma^*$  とする. すなわち,  $L_1: \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  である. このときの  $\Sigma^*$  の形を求める. そのために以下,  $\|A\| \neq \|B\|$  の場合と  $\|A\| = \|B\|$  の場合に分けて考える.

6.1 Proposition.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき, piping  $L_1(AJB): \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  は

$$\Sigma = \{R^+ A J B U^-, P^+ A H^-, H^- B S^-, Q^+ A K^-, K^- B T^-, \dots\}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{C D, A_2 J B_1; R^+ A_1 B_2 U^-,$$

$$P^+ A_1 C A_2 H^-, H^- B_1 C^{-1} B_2 S^-, Q^+ A_1 D^{-1} A_2 K^-, K^- B_1 D B_2 T^-, \dots\}$$

である.

6.2 Proposition.  $\|A\| \neq \|B\|$  のときは,  $J$  はアーク型か稲妻型である.

$J$  がアーク型ならば  $\|J\| \neq \|A\|$  かつ  $\|J\| \neq \|B\|$  である. また,

$J$  が稲妻型ならば  $\|J\| \neq \|A\|$  または  $\|J\| \neq \|B\|$  である.

[証明]  $J$  が風船型ならば  $\|A\| = \|B\|$  となるから仮定に反する. したがって  $J$  はアーク型であるか稲妻型である.

もし,  $\|J\| = \|A\|$  または  $\|J\| = \|B\|$  であるならば  $J$  は稲妻型にしかならないから,  $J$  がアーク型ならば  $\|J\| \neq \|A\|$  かつ  $\|J\| \neq \|B\|$  である.  $J$  が稲妻型のときは,  $\|J\| = \|A\|$  ならば  $\|J\| \neq \|B\|$  となり,  $\|J\| = \|B\|$  ならば  $\|J\| \neq \|A\|$  となる. ■

6.3 Lemma.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき,  $\text{piping } L_1(AJB) : \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  は DS 変形である.

[証明] 上の命題から  $\|J\| \neq \|A\|$  または  $\|J\| \neq \|B\|$  がなりたつ. どちらでも同じだから, 以下,  $\|J\| \neq \|A\|$  とする. このとき,

$$\Sigma = \{R^+AJBU^-, H^-K^-, H_*^-K_*^-, \\ R^+P^+, P^+AH^-, H^-JH_*^-, H_*^-BS^-, \\ R^+Q^+, Q^+AK^-, K^-JK_*^-, K_*^-BT^-, \dots\}$$

に  $I^+$ 型変形  $\Phi(A^+J^-, H^-K^-)$  を適用すると

$$\Sigma_1 = \{EF, A_2J_1; R^+A_1J_2BU^-, H^-K^-, H_*^-K_*^-, \\ R^+P^+, P^+A_1EA_2H^-, H^-J_1E^{-1}J_2H_*^-, H_*^-BS^-, \\ R^+Q^+, Q^+A_1F^{-1}A_2K^-, K^-J_1FJ_2K_*^-, K_*^-BT^-, \dots\}$$

を得る.  $J_2$  は  $\Phi$  によって  $J$  を分割して得られたものだから,  $J$  がグループ型であったとしても  $J_2$  はアーク型である. したがって  $\Sigma_1$  には  $II^+$ 型変形  $\Psi(J_2)$  を適用することができる. そうすると  $\Sigma_1$  は

$$\Sigma_2 = \{CG^{-1}D, EFG, A_2J_1; R^+A_1BU^-, H^-K^-, H_*^-G^{-1}K_*^-, \\ R^+P^+, P^+A_1CEA_2H^-, H^-J_1E^{-1}H_*^-, H_*^-C^{-1}BS^-, \\ R^+Q^+, Q^+A_1D^{-1}F^{-1}A_2K^-, K^-J_1FK_*^-, K_*^-DBT^-, \dots\}$$

に変わる.  $E, F, Z^{-1}$  はいずれもアーク型であるから,  $\Sigma_2$  に  $\Psi^{-1}(EFZ^{-1})$  を適用することができる

$$\Sigma_3 = \{CD, A_2J_1B_1; R^+A_1BU^-, H^-K^-, H_*^-K_*^-, \\ R^+P^+, P^+A_1CA_2H^-, H^-J_1H_*^-, H_*^-B_1C^{-1}BS^-, \\ R^+Q^+, Q^+A_1D^{-1}A_2K^-, K^-J_1K_*^-, K_*^-B_1DBT^-, \dots\}$$

となる.  $\Sigma_3$  中の文字  $J_1, B$  を  $J, B_2$  と置き変えて不変な部分を省略すると  $\Psi^{-1}(EFZ^{-1}) \circ \Psi(J_2) \circ \Phi(A^+J^-, H^-K^-) : \Sigma \Rightarrow \Sigma_3$  は

$$\Sigma = \{R^+AJBU^-, P^+AH^-, H_*^-BS^-, Q^+AK^-, K_*^-BT^-, \dots\} \\ \Rightarrow \Sigma_3 = \{CD, A_2JB_1; R^+A_1B_2U^-,$$

$$P^+A_1CA_2H^-, H_*^-B_1C^{-1}B_2S^-, Q^+A_1D^{-1}A_2K^-, K_*^-B_1DB_2T^-, \dots\}$$

となるが, これは  $L_1(AJB) : \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  にほかならない. すなわち,  $L_1(AJB)$  は DS 変形である. ■

$A = B$  の場合には, (1)に現われる 1-labels のあいだには

$$Q=S=J, H=T, K=U, H_*=R^{-1}, K_*=P^{-1}$$

あるいはその鏡像の配置にある

$$P=T=J, K=T, H=U, K_*=R^{-1}, H_*=Q^{-1}$$

という関係がある. どちらでもおなじだから上のほうの関係式を用いる. 模式図はつぎのようになる.

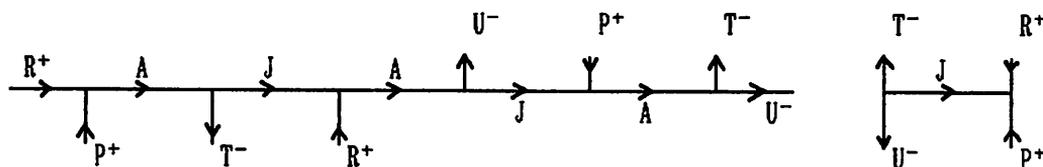


図 6-2

このときの  $\Sigma = \Sigma(AJA)$  は

$$\Sigma(AJA) = \{ R^+AJAU^-, P^+AT^-, T^-JR^+, U^-JP^+, R^+P^+, T^-U^-, \dots \}$$

である.

6.4 Proposition.  $A = B$  のとき, piping  $L_1(AJA: \#)$ ,  $L_1(AJA: b)$  はそれぞれ次の式で与えられる:

$$L_1(AJA: \#): \quad \Sigma(AJA) = \{ R^+AJAU^-, P^+AT^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^*(\#) = \{ CD, A_3JA_1; R^+A_1CA_2A_2DA_3U^-, P^+A_1D^{-1}A_2C^{-1}A_3T^-, \dots \}$$

$$L_1(AJA: b): \quad \Sigma(AJA) = \{ R^+AJAU^-, P^+AT^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^*(b) = \{ CD, A_3JA_1D^{-1}A_2A_2C^{-1}; R^+A_1A_3U^-, P^+A_1CA_2DA_3T^-, \dots \}$$

6.5 Proposition.  $A = B$  のとき,  $\|J\| \neq \|A\|$  である. またこのとき,  $J$  がループ型ならば  $J$  は稲妻型で, そのような DS-diagram  $\Delta(\Sigma(AJA))$  は, あわび, 甲子園, ベンツの3種類に限定される.

[証明]  $[\alpha]$  が  $(m+3)$ -gon,  $m \geq 1$ , だから,  $\|J\| \neq \|A\|$  は明らかである.

$J$  がループ型だと  $A$  もループ型である. このとき  $J$  を風船型だとすると,  $[\partial\alpha]$  は  $\dots XJX^{-1} \dots$  となるので, 前提条件に反する. よって  $J$  がループ型ならば必然的に稲妻型でなければならない. 稲妻型の図を考えればすぐにわかることだが, この場合の DS-diagram は1頂点からならざるを得ない. したがってそのような DS-diagram  $\Delta(\Sigma)$  は, あわび, 甲子園, ベンツの3種類に限定される. ■

(20)

6.6 Lemma. piping  $L_1(AJA : \#)$ ,  $L_1(AJA : b)$  はどちらもDS変形である.

[証明] 上の命題により  $J$  は  $\|J\| \neq \|A\|$  であるから

$$\Sigma = \Sigma(AJA) = \{R^+AJAU^-, P^+AT^-, T^-JR^+, U^-JP^+, R^+P^+, U^-T^-, \dots\}$$

に  $I^+$ 型変形  $\Phi(A^+J^-, T^-U^-)$  を適用することができる. 以下, 変形の過程を簡単に述べておこう. この流れを追えば自然に Lemma の証明が得られる:

$$\Sigma = \{R^+AJAU^-, P^+AT^-, T^-JR^+, U^-JP^+, R^+P^+, U^-T^-, \dots\}$$

$\Phi(A^+J^-, T^-U^-)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{EF, A_2J_1; R^+A_1J_2A_1F^{-1}A_2U^-, \\ P^+A_1BA_2T^-, T^-J_1E^{-1}J_2R^+, U^-J_1FJ_2P^+, R^+P^+, U^-T^-, \dots\}$$

$\Psi(J_2)$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{GHK, EFG, A_2J_1; R^+HA_1A_1KF^{-1}A_2U^-, \\ P^+K^{-1}A_1H^{-1}EA_2T^-, T^-J_1E^{-1}R^+, U^-J_1FP^+, R^+GP^+, U^-T^-, \dots\}$$

$L_0(A_1A_1 : \#)$

$$\Rightarrow \Sigma_3(\#) = \{CD, A_{13}A_{11}, GHK, EFG, A_2J_1; R^+HA_{11}CA_{12}A_{12}DA_{13}KF^{-1}A_2U^-, \\ P^+K^{-1}A_{11}D^{-1}A_{12}C^{-1}A_{13}H^{-1}EA_2T^-, \\ T^-J_1E^{-1}R^+, U^-J_1FP^+, R^+GP^+, U^-T^-, \dots\}$$

$\Psi^{-1}(GHK)$

$$\Rightarrow \Sigma_4(\#) = \{CD, A_{13}J_*A_{11}, EF, A_2J_1; R^+A_{11}CA_{12}A_{12}DA_{13}F^{-1}A_2U^-, \\ P^+A_{11}D^{-1}A_{12}C^{-1}A_{13}EA_2T^-, T^-J_1E^{-1}J_*R^+, U^-J_1FJ_*P^+, R^+P^+, U^-T^-, \dots\}$$

$\Phi^{-1}(A_2J_1, EF)$

$$\Rightarrow \Sigma_5(\#) = \{CD, A_{13}J_*A_{11}; R^+A_{11}CA_{12}A_{12}DA_{13}U^-, \\ P^+A_{11}D^{-1}A_{12}C^{-1}A_{13}T^-, T^-J_*R^+, U^-J_*P^+, R^+P^+, U^-T^-, \dots\}$$

$A_{11} \rightarrow A_1, A_{12} \rightarrow A_2, A_{13} \rightarrow A_3, J_* \rightarrow J$  により,  $\Sigma_*(\#)$  を得る.

つぎに,  $L_1(AJA : b)$  がDS変形であることを示す.

$\Sigma = \Sigma(AJA)$  に  $\Psi(J_2) \circ \Phi(A^+J^-, T^-U^-)$  を施して

$$\Sigma_2 = \{GHK, EFG, A_2J_1; R^+HA_1A_1KF^{-1}A_2U^-, \\ P^+K^{-1}A_1H^{-1}EA_2T^-, T^-J_1E^{-1}R^+, U^-J_1FP^+, R^+GP^+, U^-T^-, \dots\}$$

に変形するところまでは  $L_1(AJA : \#)$  のときと全く同じである. さて, この  $\Sigma_2$  に  $L_0(A_1A_1 : b)$  を施すところから先は

$$\Sigma_2 = \{GHK, EFG, A_2J_1; R^+HA_1A_1KF^{-1}A_2U^-, \\ P^+K^{-1}A_1H^{-1}EA_2T^-, T^-J_1E^{-1}R^+, U^-J_1FP^+, R^+GP^+, U^-T^-, \dots\}$$

$L_0(A_1A_1 : b)$

$$\Rightarrow \Sigma_3(b) = \{ CD, A_{13}A_{11}D^{-1}A_{12}A_{12}C^{-1}, GHK, EFG, A_2J_1; R^+HA_{11}A_{13}KF^{-1}A_2U^-, \\ P^+K^{-1}A_{11}CA_{12}DA_{13}H^{-1}EA_2T^-, T^{-}J_1E^{-1}R^+, U^{-}J_1FP^+, R^+G^{-1}P^+, U^{-}T^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(GHK)$

$$\Rightarrow \Sigma_4(b) = \{ CD, A_{13}J_0A_{11}D^{-1}A_{12}A_{12}C^{-1}, EF, A_2J_1; R^+A_{11}A_{13}F^{-1}A_2U^-, \\ P^+A_{11}CA_{12}DA_{13}EA_2T^-, T^{-}J_1E^{-1}J_0R^+, U^{-}J_1FJ_0P^+, R^+P^+, U^{-}T^-, \dots \}$$

$\Phi^{-1}(A_2J_1, EF)$

$$\Rightarrow \Sigma_5(b) = \{ CD, A_{13}J_0A_{11}D^{-1}A_{12}A_{12}C^{-1}; R^+A_{11}A_{13}U^-, \\ P^+A_{11}CA_{12}DA_{13}T^-, T^{-}J_0R^+, U^{-}J_0P^+, R^+P^+, U^{-}T^-, \dots \}$$

となるから、この  $\Sigma_5(b)$  の文字を  $A_{11} \rightarrow A_1, A_{12} \rightarrow A_2, A_{13} \rightarrow A_3, J_0 \rightarrow J$  と変更すれば、 $\Sigma_*(b)$  を得る。■

**6.7 Proposition.**  $A = B^{-1}$  のとき、 $\|J\| \neq \|A\|$  である。また  $J$  は風船型である。

[証明]  $\|J\| \neq \|A\|$  であることはあきらかである。また  $J$  が稲妻型のときは  $J$  の近辺を調べてみればすぐ分かるように  $AJA^{-1}$  の形は決して現われない。その理由は  $DS$ -system が  $AA^{-1}$  の部分を含まないことにある。■

したがって、 $A = B$  の場合には、(1)に現われる 1-labels のあいだには

$$Q=S=J, H=T, K=U, H_*=R^{-1}, K_*=P^{-1}$$

(またはその鏡像の配置にある

$$P=T=J, K=T, H=U, K_*=R^{-1}, H_*=Q^{-1})$$

という関係がある。DS-diagram ではつぎのようになる。

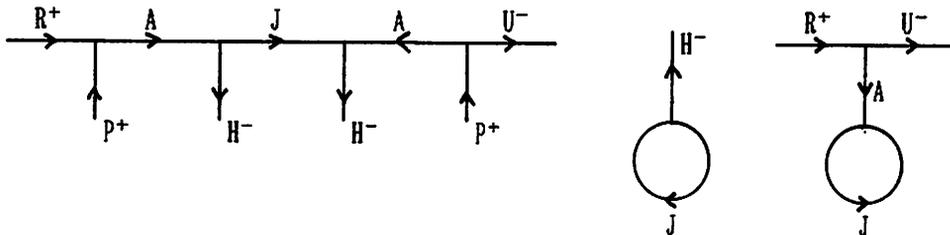


図 6-3

したがってこのときの  $\Sigma = \Sigma(AJA^{-1})$  は

$$\Sigma(AJA^{-1}) = \{ J; R^+AJA^{-1}U^-, P^+AH^-, H^{-}JH^-, R^+P^+, P; U^-, U^{-}R^+, \dots \}$$

である。

(22)

6.8 Proposition.  $A = B^{-1}$  のとき, piping  $L_1(AJA^{-1} : \#)$  は次の式で与えられる:

$$\Sigma = \{ R^+AJA^{-1}U^-, P^+AH^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_3JA_3^{-1}C^{-1}A_2^{-1}; R^+A_1CA_2A_1^{-1}U^-, P^+A_1D^{-1}A_2D^{-1}A_3H^-, \dots \}.$$

また,  $L_1(AJA^{-1} : b) = L_1(AJ^{-1}A^{-1} : \#)$  である.

6.9 Lemma. piping  $L_1(AJA^{-1} : \#)$ ,  $L_1(AJA^{-1} : b)$  はどちらもDS変形である.

[証明]  $L_1(AJA^{-1} : b) = L_1(AJ^{-1}A^{-1} : \#)$  であるから,  $L_1(AJA^{-1} : \#)$  について示せばよい. まず, 上の命題により  $J$  は  $\|J\| \neq \|A\|$  であるから

$$\Sigma = \Sigma(AJA^{-1}) = \{ J; R^+AJA^{-1}U^-, P^+AH^-, H^-JH^-, R^+P^+, P^+U^-, U^-R^+, \dots \}$$

に  $I^+$ 型変形  $\Phi(J^+A^+, J^-H^-)$  を適用することができる. 以下, 流れを略記すると

$$\Sigma = \Sigma(AJA^{-1}) = \{ J; R^+AJA^{-1}U^-, P^+AH^-, H^-JH^-, \dots \}$$

$$\Phi(J^+A^+, J^-H^-)$$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_2J_2^{-1}, J_1EJ_2; R^+A_1EA_2J_1A_1^{-1}U^-, P^+A_1F^{-1}A_2H^-, H^-J_1F^{-1}J_2H^-, \dots \}$$

$$L_1(A_2J_1A_1^{-1})$$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, EF, A_{22}J_1A_{12}^{-1}, A_{21}CA_{22}J_2^{-1}, J_1EJ_2; R^+A_{11}CA_{12}EA_{21}A_{11}^{-1}U^-, P^+A_{11}D^{-1}A_{12}F^{-1}A_{21}D^{-1}A_{22}H^-, H^-J_1F^{-1}J_2H^-, \dots \}$$

$$\Psi^{-1}(A_{22}J_1A_{12}^{-1})$$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1}D, EFG, A_{21}CJ_2^{-1}, EJ_2; R^+A_{11}CEA_{21}A_{11}^{-1}U^-, P^+A_{11}D^{-1}F^{-1}A_{21}D^{-1}H^-, H^-F^{-1}J_2G^{-1}H^-, \dots \}$$

$$\Psi^{-1}(EFG)$$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_{21}CA_*J_2^{-1}A_*^{-1}, J_2; R^+A_{11}CA_{21}A_{11}^{-1}U^-, P^+A_{11}D^{-1}A_{21}D^{-1}A_*H^-, H^-J_2H^-, \dots \}$$

となる. そこで

$$A_{11} \rightarrow A_1, A_{21} \rightarrow A_2, A_* \rightarrow A_3, J_1 \rightarrow J$$

とすれば,  $\Sigma_*$  を得る. ■

この節の結果, すなわち 6.3, 6.6, 6.9 をまとめるとつぎのようになる:

6.10 Lemma. piping  $L_1$  はDS変形である.

§7.  $L_n$ .

$n \geq 2$  のときの piping  $L_n: \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  について記述する. 各 1-label が アーク型, 風船型, 稲妻型のいずれであるかによって, 種々のバリエーションがあるが,  $\Delta(\Sigma)$  での AwB の近傍を一般的な配置として図示すれば下図 のようになる.

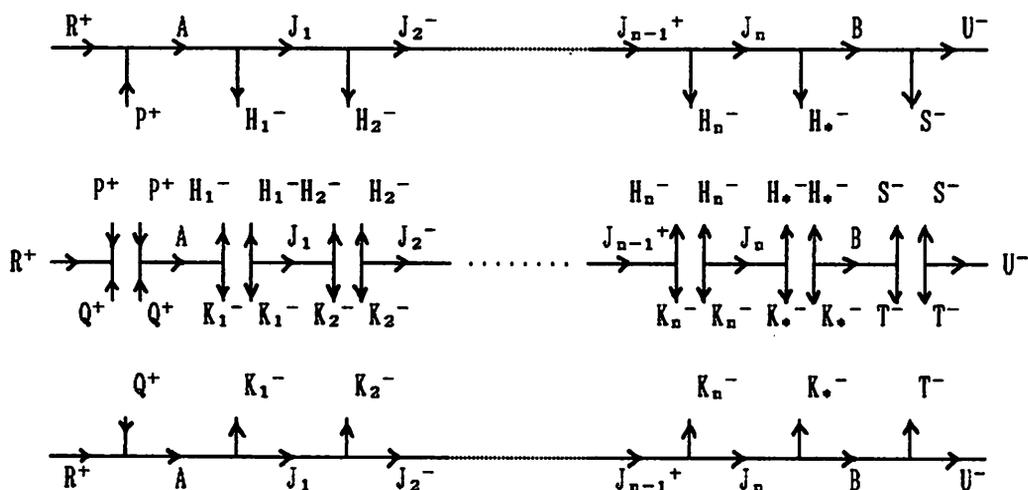


図 7-1

したがって DS-system  $\Sigma = \Sigma(AwB)$  の一般形は

$$\Sigma = \Sigma(AwB) = \{ R^+AJ_1 \cdots J_nBU^-, \\ R^+P^+, P^+AH_1^-, H_1^-J_1H_2^-, \cdots, H_n^-J_nH_n^-, H_n^-BS^-, S^-U^-, \\ R^+Q^+, Q^+AK_1^-, K_1^-J_1K_2^-, \cdots, K_n^-J_nK_n^-, K_n^-BT^-, T^-U^-, \cdots \}$$

である. この  $\Sigma$  に piping  $L_n$  を施して得られる polygonal system を  $\Sigma^*$  とする. すなわち,  $L_n: \Sigma \Rightarrow \Sigma^*$  である. このときの  $\Sigma^*$  の形式を定めておく. 以下,  $\|A\| \neq \|B\|$  の場合と  $\|A\| = \|B\|$  の場合に分ける.  $\|A\| = \|B\|$  のときはさらに,  $A = B$  の場合と  $A = B^{-1}$  の場合に分けて考える.

$\|A\| \neq \|B\|$  のとき,  $\Sigma = \Sigma(AwB)$  に piping  $L_n(AwB)$  を施して得られるものを  $\Sigma^*$  とすると, この  $\Sigma^*$  は

$$\Sigma^* = \{ CD, A_2J_1 \cdots J_nB_1; R^+A_1B_2U^-, \\ R^+P^+, P^+A_1CA_2H_1^-, H_1^-J_1H_2^-, \cdots, H_n^-J_nH_n^-, H_n^-B_1C^{-1}B_2S^-, S^-U^-, \\ R^+Q^+, Q^+A_1D^{-1}A_2K_1^-, K_1^-J_1K_2^-, \cdots, K_n^-J_nK_n^-, K_n^-B_1DB_2T^-, T^-U^-, \cdots \}$$

(24)

となる。したがってこの変形で変化しない部分を省略してしまえば、 $L_n(AwB)$  はつぎのように表わすことができる。

7.1 Proposition.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき、 $L_n(AwB)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_nBU^-, P^+AH_1^-, Q^+AK_1^-, H_*^-BS^-, K_*^-BT^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_2J_1 \cdots J_nB_1; R^+A_1B_2U^-,$$

$$P^+A_1CA_2H_1^-, Q^+A_1D^{-1}A_2K_1^-, H_*^-B_1C^{-1}B_2S^-, K_*^-B_1DB_2T^-, \dots \}$$

となる。

$A = B$  の場合には、(1)に現われる 1-labels のあいだには

$$P=K_*^{-1}, Q=J_n, R=H_*^{-1}; S=J_1, T=H_1, U=K_1$$

(あるいはその鏡像の配置にある

$$Q=H_*^{-1}, P=J_n, R=K_*^{-1}; T=J_1, S=K_1, U=H_1)$$

という関係がある。模式図はつぎのようになる。

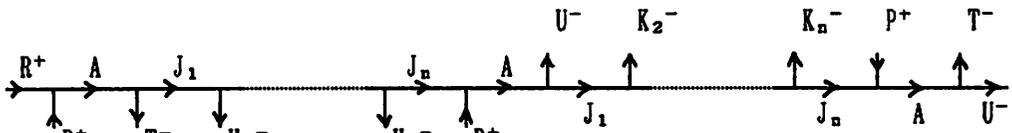


図 7-2

7.2 Proposition.  $A = B$  のとき :

$L_n(AwA: \#)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_nAU^-, P^+AT^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_3J_1 \cdots J_nA_1; R^+A_1CA_2A_2DA_3U^-, P^+A_1D^{-1}A_2C^{-1}A_3T^-, \dots \},$$

$L_n(AwA: b)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_nAU^-, P^+AT^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_3J_1 \cdots J_nA_1D^{-1}A_2A_2C^{-1}; R^+A_1A_3U^-, P^+A_1CA_2DA_3T^-, \dots \}$$

である。

$A = B^{-1}$  の場合には、(1)に現われる 1-labels のあいだの関係として、本質的に異なる 2 種類のパターン :

パターン (X) :  $P=S^{-1}, Q=U^{-1}, R=T^{-1}; H_1=H_*, K_*=J_1, K_1=J_n,$

パターン (Y) :  $P=U^{-1}, Q=S^{-1}, R=T^{-1}; J_1=K_*=J_1, H_1=J_n^{-1}, K_1=H_*^{-1},$

がある。それぞれの模式図はつぎのようになる。

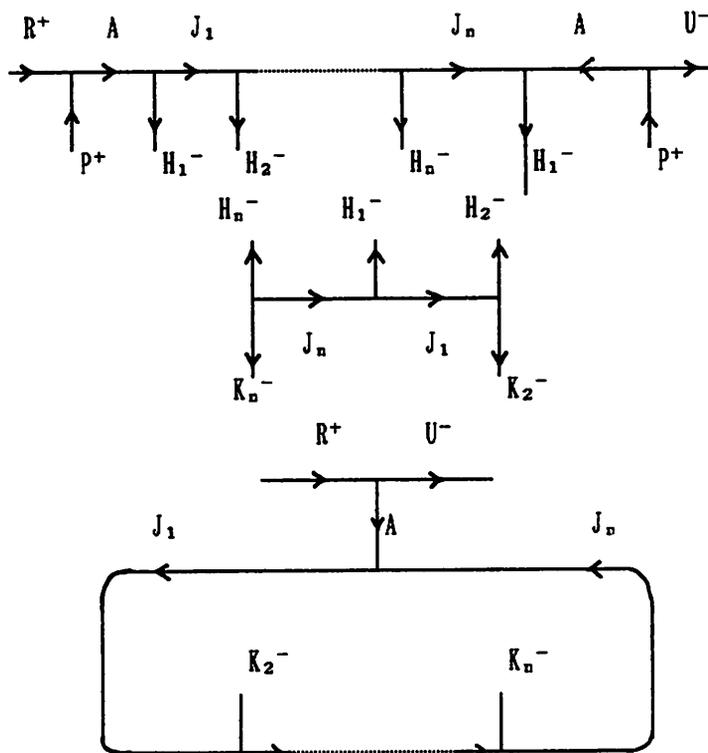


図 7-3 パターン (X)

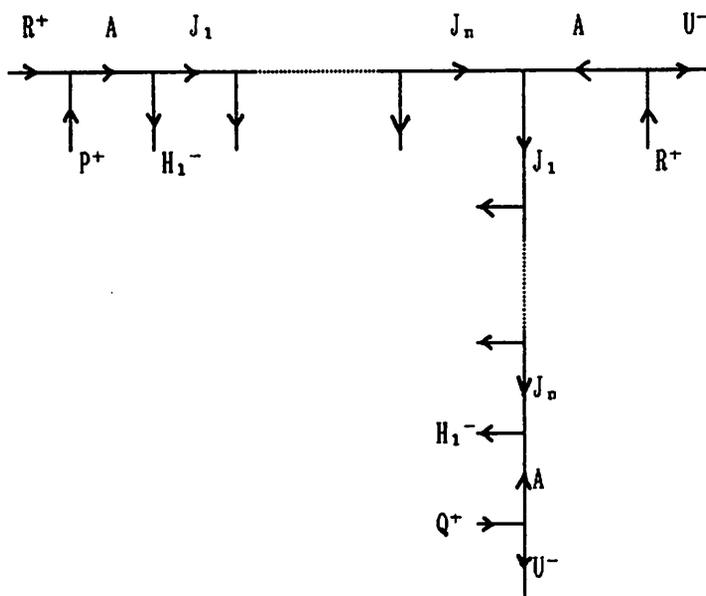


図 7-4 パターン (Y)

以下、上の形にちなんでパターン (X) をカットエッジ型、パターン (Y) をノン-コヒーレント型と呼ぶことにしよう。

(26)

7.3 Proposition.  $A = B^{-1}$ , カットエッジ型るとき :

$L_n(AWA^{-1} : \#)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_n A^{-1}U^-, P^+AH_1^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_3J_1 \cdots J_n A_3^{-1}DA_2^{-1}; R^+A_1CA_2A_1^{-1}U^-, P^+A_1D^{-1}A_2CA_3H_1^-, \dots \},$$

$L_n(AWA^{-1} : \flat)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_n A^{-1}U^-, P^+AH_1^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_2CA_3J_1 \cdots J_n A_3^{-1}; R^+A_1A_2^{-1}DA_1^{-1}U^-, P^+A_1CA_2D^{-1}A_3H_1^-, \dots \},$$

$A = B^{-1}$ , ノンコヘレント型るとき :

$L_n(AWA^{-1} : \#)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_n A^{-1}U^-, P^+AH_1^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_3J_1 \cdots J_n A_3^{-1}DA_2^{-1}; R^+A_1CA_2A_1^{-1}U^-, P^+A_1D^{-1}A_2CA_3H_1^-, \dots \},$$

$L_n(AWA^{-1} : \flat)$  は

$$\Sigma = \{ R^+AJ_1 \cdots J_n A^{-1}U^-, P^+AH_1^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma^* = \{ CD, A_2CA_3J_1 \cdots J_n A_3^{-1}; R^+A_1A_2^{-1}DA_1^{-1}U^-, P^+A_1CA_2D^{-1}A_3H_1^-, \dots \}$$

である。

## §8. 主定理の証明

4節, 5節, 6節において,  $n \leq 1$  での  $L_n$  がDS変形であることをみた. この節では一般の  $n$  に対して『 $L_n$  がDS変形である』ことを示す. 手法は  $n$  に関する数学的帰納法である. この場合, 6節の結果: 『 $L_1$  はDS変形である』が議論の出発点となる. 以下, 『 $k \leq n-1$  のとき,  $L_k$  はDS変形である』と仮定して,  $L_n$  もDS変形であることを示す.

$u = J_1 J_2 \cdots J_{n-1}$  とする. すなわち  $w = J_1 J_2 \cdots J_{n-1} J_n = u J_n$  である.

8.1 Lemma.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき, piping  $L_n(AwB)$  はDS変形である.

[証明]

7.1 Proposition.  $\|A\| \neq \|B\|$  のとき,  $L_n(AwB)$  はつぎのようになる:

$$\Sigma = \{ R^+ A u J_n B U^-, P^+ A H_1^-, Q^+ A K_1^-, H_*^- B S^-, K_*^- B T^-, \dots \}$$

$$\Rightarrow \Sigma_* = \{ CD, A_2 u J_n B_1; R^+ A_1 B_2 U^-,$$

$$P^+ A_1 C A_2 H_1^-, Q^+ A_1 D^{-1} A_2 K_1^-, H_*^- B_1 C^{-1} B_2 S^-, K_*^- B_1 D B_2 T^-, \dots \}$$

これがDS変形であることを,  $J_n$  の形に応じて場合に分けて示す.

(a)  $\|J_n\| \neq \|A\|, \|B\|$  の場合:

$$\Sigma = \Sigma(A u J_n B) = \{ R^+ A u J_n B U^-, P^+ A H_1^-, Q^+ A K_1^-, H_*^- B S^-, K_*^- B T^-, \\ H_n^- J_n H_*^-, K_n^- J_n K_*^-, H_*^- K_*^-, \dots \}$$

$L_{n-1}(A u J_n)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_2 u J_{n1}; R^+ A_1 J_{n2} B U^-, P^+ A_1 E A_2 H_1^-, Q^+ A_1 F^{-1} A_2 K_1^-, H_*^- B S^-, K_*^- B T^-, \\ H_n^- J_{n1} E^{-1} J_{n2} H_*^-, K_n^- J_{n1} F J_{n2} K_*^-, H_*^- K_*^-, \dots \}$$

$L_1(A J_{n2} B)$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{12} J_{n2} B_1, EF, A_2 u J_{n1}; R^+ A_{11} B_2 U^-, P^+ A_{11} C A_{12} E A_2 H_1^-, \\ Q^+ A_{11} D^{-1} A_{12} F^{-1} A_2 K_1^-, H_*^- B_1 C^{-1} B_2 S^-, K_*^- B_1 D B_2 T^-, \\ H_n^- J_{n1} E^{-1} J_{n2} H_*^-, K_n^- J_{n1} F J_{n2} K_*^-, H_*^- K_*^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(A_{12} J_{n2} B_1)$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1} D, EFG, A_2 u J_{n1}; R^+ A_{11} B_2 U^-, P^+ A_{11} C E A_2 H_1^-, \\ Q^+ A_{11} D^{-1} F^{-1} A_2 K_1^-, H_*^- C^{-1} B_2 S^-, K_*^- D B_2 T^-, \\ H_n^- J_{n1} E^{-1} H_*^-, K_n^- J_{n1} F K_*^-, H_*^- G^{-1} K_*^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(EFG)$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_2 u J_{n1} B_*; R^+ A_{11} B_2 U^-, P^+ A_{11} C A_2 H_1^-, Q^+ A_{11} D^{-1} A_2 K_1^-, \\ H_*^- B_* C^{-1} B_2 S^-, K_*^- B_* D B_2 T^-,$$

(28)

$$H_n^- J_{n1} H_{\bullet}^-, K_n^- J_{n1} K_{\bullet}^-, H_{\bullet}^- K_{\bullet}^-, \dots \}$$

ここで  $A_{11} \rightarrow A_1$ ,  $J_{n1} \rightarrow J_n$ ,  $B_{\bullet} \rightarrow B_1$  と文字の交換をすれば  $\Sigma_4$  は

$$\begin{aligned} \Sigma_4 = \{ & CD, A_2 \cup J_n B_1; R^+ A_1 B_2 U^-, P^+ A_1 C A_2 H_1^-, Q^+ A_1 D^{-1} A_2 K_1^-, \\ & H_{\bullet}^- B_1 C^{-1} B_2 S^-, K_{\bullet}^- B_1 D B_2 T^-, \\ & H_n^- J_n H_{\bullet}^-, K_n^- J_n K_{\bullet}^-, H_{\bullet}^- K_{\bullet}^-, \dots \} \end{aligned}$$

と書けるが、この  $\Sigma_4$  は  $\Sigma_{\bullet}$  にほかならない。

(b)  $\|J_n\| = \|B\|$  の場合：この場合は必然的に  $J_n = B$  となる。

$$\Sigma = \Sigma(A \cup BB) = \{ R^+ A \cup B B U^-, P^+ A H_1^-, Q^+ A K_1^-, K_1^- \cup U^-, U^- B J_{n-1}^+, J_{n-1}^+ \cup \dots \}$$

$$\begin{aligned} L_{n-1}(A \cup B) \\ \Rightarrow \Sigma_1 = \{ & EF, A_2 \cup B_1; R^+ A_1 B_2 B_1 B^{-1} B_2 U^-, P^+ A_1 E A_2 H_1^-, Q^+ A_1 F^{-1} A_2 K_1^-, \\ & J_{n-1}^+ \cup U^-, U^- B_1 F B_2 J_{n-1}^+, J_{n-1}^+ \cup U^-, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(A_1 B_2 B_1) \\ \Rightarrow \Sigma_2 = \{ & CD, A_{12} B_2 B_{11}, EF, A_2 \cup B_{11} D B_{12}; R^+ A_{11} B_{12} E^{-1} B_2 U^-, P^+ A_{11} C A_{12} E A_2 H_1^-, \\ & Q^+ A_{11} D^{-1} A_{12} F^{-1} A_2 K_1^-, U^- B_{11} C^{-1} B_{12} F B_2 J_{n-1}^+, J_{n-1}^+ \cup U^-, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(A_{12} B_2 B_{11}) \\ \Rightarrow \Sigma_3 = \{ & CG^{-1} D, EFG, A_2 \cup D B_{12}; R^+ A_{11} B_{12} E^{-1} U^-, P^+ A_{11} C E A_2 H_1^-, \\ & Q^+ A_{11} D^{-1} F^{-1} A_2 K_1^-, U^- C^{-1} B_{12} F J_{n-1}^+, J_{n-1}^+ \cup G U^-, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(EFG) \\ \Rightarrow \Sigma_4 = \{ & CD, A_2 \cup B_{\bullet} D B_{12} B_{\bullet}; R^+ A_{11} B_{12} U^-, P^+ A_{11} C A_2 H_1^-, \\ & Q^+ A_{11} D^{-1} A_2 K_1^-, U^- B_{\bullet} C^{-1} B_{12} J_{n-1}^+, J_{n-1}^+ \cup U^-, \dots \} \end{aligned}$$

ここで、 $A_{11} \rightarrow A_1$ ,  $B_{\bullet} \rightarrow B_1$ ,  $B_{12} \rightarrow B_2$  とすれば  $\Sigma_{\bullet}$  を得る。

(c)  $J_n = A^{-1}$  (その1) カットエッジ型の場合：

$$\begin{aligned} \Sigma = \Sigma(A \cup A^{-1} B) = \{ & R^+ A \cup A^{-1} B U^-, P^+ A H_1^-, P^+ B S^-, R^+ B T^-, P^+ R^+, \dots \} \\ L_{n-1}(A \cup A^{-1} : \#) \\ \Rightarrow \Sigma_1 = \{ & EF, A_3 \cup A_3^{-1} E^{-1} A_2^{-1}; R^+ A_1 E A_2 A_1^{-1} B U^-, P^+ A_1 F^{-1} A_2 F^{-1} A_3 H_1^-, \\ & P^+ B S^-, R^+ B T^-, P^+ R^+, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(A_2 A_1^{-1} B) \\ \Rightarrow \Sigma_2 = \{ & CD, A_{22} A_1^{-1} B_1, EF, A_3 \cup A_3^{-1} E^{-1} A_{22}^{-1} D A_{21}^{-1}; R^+ A_1 E A_{21} B_2 U^-, \\ & P^+ A_1 F^{-1} A_{21} C A_{22} F^{-1} A_3 H_1^-, P^+ B_1 C^{-1} B_2 S^-, R^+ B_1 D B_2 T^-, P^+ R^+, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(A_{22} A_1^{-1} B_1) \\ \Rightarrow \Sigma_3 = \{ & CG^{-1} D, EFG, A_3 \cup A_3^{-1} E^{-1} D A_{21}^{-1}; R^+ E A_{21} B_2 U^-, \\ & P^+ F^{-1} A_{21} C F^{-1} A_3 H_1^-, P^+ C^{-1} B_2 S^-, R^+ D B_2 T^-, P^+ G^{-1} R^+, \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(EFG) \\ \Rightarrow \Sigma_4 = \{ & CD, A_3 \cup A_3^{-1} D A_{21}^{-1} B_{\bullet}; R^+ A_{21} B_2 U^-, \\ & P^+ A_{21} C A_3 H_1^-, P^+ B_{\bullet} C^{-1} B_2 S^-, R^+ B_{\bullet} D B_2 T^-, P^+ R^+, \dots \} \end{aligned}$$

$A_{21} \rightarrow A_1, A_3 \rightarrow A_2, B_* \rightarrow B_1$  により,  $\Sigma_*$  を得る.

(d)  $J_n = A^{-1}$  (その2) ノン-コヘレント型の場合:

$$\Sigma = \Sigma(A \cup A^{-1}B) = \{ R^+A \cup A^{-1}BU^-, P^+AH_1^-, R^+BS^-, P^+BT^-, P^+R^+, \dots \}$$

$L_{n-1}(A \cup A^{-1} : \#)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_3 \cup A_3^{-1}FA_2^{-1}; R^+A_1EA_2A_1^{-1}BU^-, P^+A_1F^{-1}A_2EA_3H_1^-, \\ R^+BS^-, P^+BT^-, P^+R^+, \dots \}$$

$L_1(A_2A_1^{-1}B)$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{22}A_1^{-1}B_1, EF, A_3 \cup A_3^{-1}FA_{22}^{-1}DA_{21}^{-1}; R^+A_1EA_{21}B_2U^-, \\ P^+A_1F^{-1}A_{21}CA_{22}EA_3H_1^-, R^+B_1C^{-1}B_2S^-, P^+B_1DB_2T^-, P^+R^+, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(A_{22}A_1^{-1}B_1)$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1}D, EFG, A_3 \cup A_3^{-1}FDA_{21}^{-1}; R^+EA_{21}B_2U^-, \\ P^+F^{-1}A_{21}CEA_3H_1^-, R^+C^{-1}B_2S^-, P^+DB_2T^-, P^+G^{-1}R^+, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(EFG)$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_3 \cup A_3^{-1}DA_{21}^{-1}B_*; R^+A_{21}B_2U^-, \\ P^+A_{21}CA_3H_1^-, R^+B_*C^{-1}B_2S^-, P^+B_*DB_2T^-, P^+R^+, \dots \}$$

$A_{21} \rightarrow A_1, A_3 \rightarrow A_2, B_* \rightarrow B_1$  により,  $\Sigma_*$  を得る.

(e)  $J_n = A$  の場合:

$$\Sigma = \Sigma(A \cup AB) = \{ R^+A \cup ABU^-, Q^+AH_*^-, H_*^-BS^-, J_1^-BT^-, H_*^-J_1^-, \dots \}$$

$L_{n-1}(A \cup A : b)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_3 \cup A_1EA_2A_2F; R^+A_1A_3BU^-, Q^+A_1F^{-1}A_2E^{-1}A_3H_*^-, \\ H_*^-BS^-, J_1^-BT^-, H_*^-J_1^-, \dots \}$$

$L_1(A_1A_3B)$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{12}A_3B_1, EF, A_3 \cup A_{11}CA_{12}EA_2A_2F; R^+A_{11}B_2U^-, \\ Q^+A_{11}D^{-1}A_{12}F^{-1}A_2E^{-1}A_3H_*^-, H_*^-B_1C^{-1}B_2S^-, J_1^-B_1DB_2T^-, H_*^-J_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(A_{12}A_3B_1)$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1}D, EFG, \cup A_{11}CEA_2A_2F; R^+A_{11}B_2U^-, \\ Q^+A_{11}D^{-1}F^{-1}A_2E^{-1}H_*^-, H_*^-C^{-1}B_2S^-, J_1^-DB_2T^-, H_*^-G^{-1}J_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(EFG)$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, \cup A_{11}CA_2B_*A_2; R^+A_{11}B_2U^-, \\ Q^+A_{11}D^{-1}A_2H_*^-, H_*^-B_*C^{-1}B_2S^-, J_1^-B_*DB_2T^-, H_*^-J_1^-, \dots \}$$

$A_{11} \rightarrow A_1, B_* \rightarrow B_1$  により,  $\Sigma_*$  を得る. ■

8.2 Lemma.  $A = B$  のとき, piping  $L_n(AWA : \#)$ ,  $L_n(AWA : b)$  は DS変形である.

(30)

[証明] 先ず,  $L_n(AwA : \#)$  について示す.

$$\Sigma = \Sigma(AuJ_nA) = \{ R^+A_uJ_nAU^-, P^+AT^-, H_n^-J_nR^+, K_n^-J_nP^+, R^+P^+, \dots \}$$

$$L_{n-1}(AuJ_n)$$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ BF, A_2uJ_{n1}; R^+A_1J_{n2}A_1F^{-1}A_2U^-, P^+A_1EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}R^+, \\ K_n^-J_{n1}FJ_{n2}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

$$L_1(A_1J_{n2}A_1 : \#)$$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{13}J_{n2}A_{11}, EF, A_2uJ_{n1}; R^+A_{11}CA_{12}A_{12}DA_{13}F^{-1}A_2U^-, \\ P^+A_{11}D^{-1}A_{12}C^{-1}A_{13}EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}R^+, K_n^-J_{n1}FJ_{n2}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

$$\Psi^{-1}(A_{13}J_{n2}A_{11})$$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CDG, EFG, A_2uJ_{n1}; R^+CA_{12}A_{12}DF^{-1}A_2U^-, \\ P^+D^{-1}A_{12}C^{-1}EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}R^+, K_n^-J_{n1}FP^+, R^+G^{-1}P^+, \dots \}$$

$$\Psi^{-1}(EFG)$$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_2uJ_{n1}A_*; R^+A_*CA_{12}A_{12}DA_2U^-, \\ P^+A_*D^{-1}A_{12}C^{-1}A_2T^-, H_n^-J_{n1}R^+, K_n^-J_{n1}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

$A_* \rightarrow A_1, A_{12} \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, J_{n1} \rightarrow J_n$  により,

$$\Sigma_* = \{ CD^{-1}A_3uJ_nA_1; R^+A_1CA_2A_2D^{-1}A_3U^-, \\ P^+A_1DA_2C^{-1}A_3T^-, H_n^-J_nR^+, K_n^-J_nP^+, R^+P^+, \dots \}$$

を得る.

つぎに,  $L_n(AwA : b)$  がDS変形であることを示す.  $\Sigma = \Sigma(AuJ_nA)$  から  $L_{n-1}(AuJ_n)$  によって  $\Sigma_1$  に変形するところまでは上とおなじである. この  $\Sigma_1$  からの変形の流れを記す.

$$\Sigma_1 = \{ EF, A_2uJ_{n1}; R^+A_1J_{n2}A_1F^{-1}A_2U^-, P^+A_1EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}R^+, \\ K_n^-J_{n1}FJ_{n2}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

$$L_1(A_1J_{n2}A_1 : b)$$

$$\Rightarrow \Sigma_5 = \{ CD, A_{13}J_{n2}A_{11}DA_{12}A_{12}C, EF, A_2uJ_{n1}; R^+A_{11}A_{13}F^{-1}A_2U^-, \\ P^+A_{11}C^{-1}A_{12}D^{-1}A_{13}EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}R^+, K_n^-J_{n1}FJ_{n2}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

$$\Psi(J_{n2})$$

$$\Rightarrow \Sigma_6 = \{ CD, EFG, XYG, A_{13}A_{11}DA_{12}A_{12}C, A_2uJ_{n1}; R^+XA_{11}A_{13}YF^{-1}A_2U^-, \\ P^+Y^{-1}A_{11}C^{-1}A_{12}D^{-1}A_{13}X^{-1}EA_2T^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}R^+, K_n^-J_{n1}FP^+, R^+G^{-1}P^+, \dots \}$$

$$\Psi^{-1}(EFG)$$

$$\Rightarrow \Sigma_7 = \{ CD, XY, A_{13}A_{11}DA_{12}A_{12}C, A_2uJ_{n1}A_*; R^+A_*XA_{11}A_{13}YA_2U^-, \\ P^+A_*Y^{-1}A_{11}C^{-1}A_{12}D^{-1}A_{13}X^{-1}A_2T^-, H_n^-J_{n1}R^+, K_n^-J_{n1}P^+, R^+P^+, \dots \}$$

となる. ここで

$$A_* \rightarrow A_1, A_{11} \rightarrow A_2, A_{12} \rightarrow A_3, A_{13} \rightarrow A_4, A_2 \rightarrow A_5, J_{n1} \rightarrow J_n$$

と文字を変えたものを  $\Sigma_{**}$  とすると

$$\Sigma_{**} = \{ CD, XY, A_4 A_2 D A_3 A_3 C, A_5 u J_n A_1; R^+ A_1 X A_2 A_4 Y A_5 U^-, \\ P^+ A_1 Y^{-1} A_2 C^{-1} A_3 D^{-1} A_4 X^{-1} A_5 T^-, H_n^- J_n R^+, K_n^- J_n P^+, R^+ P^+, \dots \}$$

となる. すなわち  $\Sigma$  は  $\Sigma_{**}$  と DS 同値である. 一方  $\Sigma_*$  について考えると

$$\Sigma_* = \{ CD, A_3 u J_n A_1 D A_2 A_2 C; R^+ A_1 A_3 U^-, \\ P^+ A_1 C^{-1} A_2 D^{-1} A_3 T^-, H_n^- J_n R^+, K_n^- J_n P^+, R^+ P^+, \dots \}$$

$L_n(A_3 W A_1)$

$$\Rightarrow \Sigma_8 = \{ CD, XY, A_{31} A_{12} D A_2 A_2 C, A_{32} u J_{n1} A_{11}; R^+ A_{11} X A_{12} A_{31} Y A_{32} U^-, \\ P^+ A_{11} Y^{-1} A_{12} C^{-1} A_2 D^{-1} A_{31} X^{-1} A_{32} T^-, H_n^- J_{n1} R^+, K_n^- J_{n1} P^+, R^+ P^+, \dots \}$$

となる. ここで

$$A_{11} \rightarrow A_1, A_{12} \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, A_{31} \rightarrow A_4, A_{32} \rightarrow A_5, J_{n1} \rightarrow J_n$$

と文字を変えたものは  $\Sigma_{**}$  になる. すなわち  $\Sigma_*$  も  $\Sigma_{**}$  と DS 同値である. したがって  $\Sigma$  と  $\Sigma_*$  も DS 同値となる. ■

8.3 Lemma.  $A = B^{-1}$  のとき, piping  $L_n(AWA^{-1} : \#)$ ,  $L_n(AWA^{-1} : b)$  は DS 変形である.

[証明]  $AWA^{-1}$  については本質的に異なる 2 種類のパターンがあった. すなわち カットエッジ型とノン-コヘレント型である. カットエッジ型の  $L_n(AWA^{-1} : \#)$  を  $L_n(AWA^{-1} : \#)_+$ , ノン-コヘレント型の  $L_n(AWA^{-1} : \#)$  を  $L_n(AWA^{-1} : \#)_-$  とあらわすことにする.  $L_n(AWA^{-1} : b)$  についても同様にカットエッジ型のほうに + 印をつけることにする.

$$L_n(AWA^{-1} : \#)_+ = L_n(AW^{-1}A^{-1} : b)_+ \\ L_n(AWA^{-1} : \#)_- = L_n(AW^{-1}A^{-1} : b)_-$$

であるから,  $\#, b$  の一方について示せばよい. ここでは  $b$  型について示すことにする. まず,  $L_n(AWA^{-1} : b)_+$  が DS 変形であることから示そう.

$$\Sigma = \Sigma(Au J_n A^{-1}) = \{ R^+ A u J_n A^{-1} U^-, P^+ A H_1^-, H_n^- J_n H_1^-, K_n^- J_n J_1^-, J_1^- H_1^-, \dots \}$$

$L_{n-1}(Au J_n)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_2 u J_{n1}; R^+ A_1 J_{n2} A_2^{-1} E^{-1} A_1^{-1} U^-, \\ P^+ A_1 F^{-1} A_2 H_1^-, H_n^- J_{n1} F J_{n2} H_1^-, K_n^- J_{n1} E^{-1} J_{n2} J_1^-, J_1^- H_1^-, \dots \}$$

$L_1(A_1 J_{n2} A_2)$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{12} J_{n2} A_{22}^{-1}, EF, A_{21} C A_{22} u J_{n1}; R^+ A_{11} A_{21}^{-1} E^{-1} A_{12}^{-1} C^{-1} A_{11}^{-1} U^-, \\ P^+ A_{11} D^{-1} A_{12} F^{-1} A_{21} D^{-1} A_{22} H_1^-, H_n^- J_{n1} F J_{n2} H_1^-, K_n^- J_{n1} E^{-1} J_{n2} J_1^-, \\ J_1^- H_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(A_{12} J_{n2} A_{22}^{-1})$

(32)

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1}D, EFG, A_{21}C \cup J_{n1}; R^+A_{11}A_{21}^{-1}E^{-1}C^{-1}A_{11}^{-1}U^-, \\ P^+A_{11}D^{-1}F^{-1}A_{21}D^{-1}H_1^-, H_n^-J_{n1}FH_1^-, K_n^-J_{n1}E^{-1}J_1^-, J_1^-G^{-1}H_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(EFG)$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_{21}CA_* \cup J_{n1}A_*^{-1}; R^+A_{11}A_{21}^{-1}C^{-1}A_{11}^{-1}U^-, \\ P^+A_{11}D^{-1}A_{21}D^{-1}A_*H_1^-, H_n^-J_{n1}H_1^-, K_n^-J_{n1}J_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

$\Sigma_4$  で  $A_{11} \rightarrow A_1, A_{21} \rightarrow A_2, A_* \rightarrow A_3, J_{n1} \rightarrow J_n$  と文字を交換すれば

$$\Sigma_* = \{ CD, A_2CA_3 \cup J_nA_3^{-1}; R^+A_1A_2^{-1}C^{-1}A_1^{-1}U^-, \\ P^+A_1D^{-1}A_2D^{-1}A_3H_1^-, H_n^-J_nH_1^-, K_n^-J_nJ_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

を得る。したがって、 $L_n(AwA^{-1}: b)_+$  はDS変形である。

つぎに、 $L_n(AwA^{-1}: b)_-$  がDS変形であることを示す。

$$\Sigma = \Sigma(A \cup J_n A^{-1}) = \{ R^+A \cup J_n A^{-1}U^-, P^+AH_1^-, H_n^-J_nJ_1^-, K_n^-J_nH_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

$L_{n-1}(A \cup J_n)$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \{ EF, A_2 \cup J_{n1}; R^+A_1J_{n2}A_2^{-1}FA_1^{-1}U^-, \\ P^+A_1BA_2H_1^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}J_1^-, K_n^-J_{n1}FJ_{n2}H_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

$L_1(A_1J_{n2}A_2^{-1})$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \{ CD, A_{12}J_{n2}A_{22}^{-1}, EF, A_{21}CA_{22} \cup J_{n1}; R^+A_{11}A_{21}^{-1}FA_{12}^{-1}DA_{11}^{-1}U^-, \\ P^+A_{11}CA_{12}EA_{21}D^{-1}A_{22}H_1^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_{n2}J_1^-, K_n^-J_{n1}FJ_{n2}H_1^-, \\ J_1^-H_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(A_{12}J_{n2}A_{22})$

$$\Rightarrow \Sigma_3 = \{ CG^{-1}D, EFG, A_{21}C \cup J_{n1}; R^+A_{11}A_{21}^{-1}FDA_{11}^{-1}U^-, \\ P^+A_{11}CEA_{21}D^{-1}H_1^-, H_n^-J_{n1}E^{-1}J_1^-, K_n^-J_{n1}FH_1^-, J_1^-G^{-1}H_1^-, \dots \}$$

$\Psi^{-1}(EFG)$

$$\Rightarrow \Sigma_4 = \{ CD, A_{21}CA_* \cup J_{n1}A_*^{-1}; R^+A_{11}A_{21}^{-1}DA_{11}^{-1}U^-, \\ P^+A_{11}CA_{21}D^{-1}A_*H_1^-, H_n^-J_{n1}J_1^-, K_n^-J_{n1}H_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

$\Sigma_4$  で  $A_{11} \rightarrow A_1, A_{21} \rightarrow A_2, A_* \rightarrow A_3, J_{n1} \rightarrow J_n$  と文字を交換すれば

$$\Sigma_* = \{ CD, A_2CA_3 \cup J_nA_3^{-1}; R^+A_1A_2^{-1}DA_1^{-1}U^-, \\ P^+A_1CA_2D^{-1}A_3H_1^-, H_n^-J_nJ_1^-, K_n^-J_nH_1^-, J_1^-H_1^-, \dots \}$$

を得る。したがって、 $L_n(AwA^{-1}: b)_-$  はDS変形である。■

§9.  $D_2$  変形

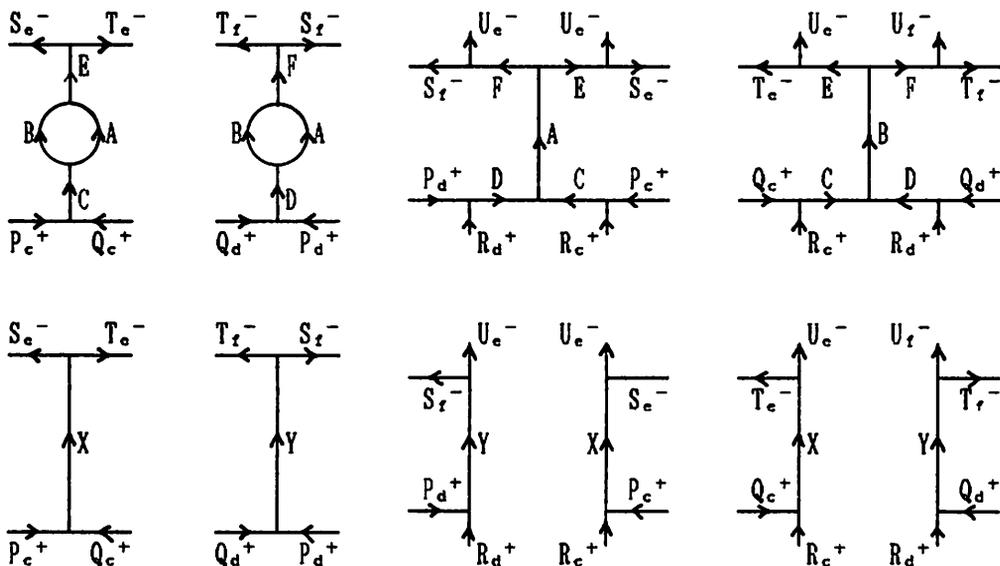
## 9.1 Definition.

$$\Sigma_1 = \{ AB^{-1}; P_c^+ CAES_e^-, P_d^+ DAFT_e^-, Q_c^+ CBFT_e^-, Q_d^+ DAFT_e^-, \\ R_c^+ CD^{-1}R_d^+, U_e^- E^{-1}FU_e^-, \\ P_c^+ R_c^+, P_d^+ R_d^+, Q_c^+ R_c^+, Q_d^+ R_d^+, P_c^+ Q_c^+, P_d^+ Q_d^+, \\ S_e^- U_e^-, S_f^- U_f^-, T_e^- U_e^-, T_f^- U_f^-, S_e^- T_e^-, S_f^- T_f^-, \dots \}$$

⇒

$$\Sigma_2 = \{ P_c^+ XS_e^-, P_d^+ YS_f^-, Q_c^+ XT_e^-, Q_d^+ YT_f^-, R_c^+ XU_e^-, R_d^+ YU_f^-, \\ P_c^+ R_c^+, P_d^+ R_d^+, Q_c^+ R_c^+, Q_d^+ R_d^+, P_c^+ Q_c^+, P_d^+ Q_d^+, \\ S_e^- U_e^-, S_f^- U_f^-, T_e^- U_e^-, T_f^- U_f^-, S_e^- T_e^-, S_f^- T_f^-, \dots \}$$

を 2-gon  $AB^{-1}$  に関する  $D_2$  変形という。



9.2 Theorem.  $C^+D^+$ ,  $E^-F^-$  を fragment に持つ 2-labels が互いに異なるならば,  $D_2$  変形は  $DS$  変形である。

[証明] 仮定から,  $\Sigma_2$  において  $\dots R_c^+ XU_e^- \dots R_d^+ YU_f^- \dots$  は 2-cell の境界のラベルの列である。したがって,  $\Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_1$  は piping にほかならない。すなわち  $D_2$  変形は  $DS$  変形である。■